AWCC

UEC Tokyo

IEEE AP-S Kansai Chapter
次世代の超高速ワイヤレス通信システムを支える
アンテナ･伝搬技術ワークショップ

Nov. 20, 2010

相関行列の固有値から見るマルチパス伝搬の本質

－目から鱗が落ちる電波伝搬理解－

電気通信大学（UEC Tokyo）
先端ワイヤレスコミュニケーションセンター（AWCC）

唐沢　好男

概要

「不易流行」という言葉がある.「**不易**」はものごとの基本となる永遠性,「**流行**」はその時々の新 風, 両者は根本において一であると言われる. CDMAやOFDM, あるいはMIMOと言った「流行(新風)」に代表される**移動通信技術の進化の歩みは電波 伝搬との戦いの歴史**といっても過言ではない. マルチパス伝搬に起因する「**ドップラーシフトの広がり**」,「**遅延時間の広がり**」,「**到来角度の広がり**」はシス テム設計に考慮すべき3大要因である. これらを扱う**電波伝搬の理論**(マルチパス伝搬理論)は, すなわち, **相関解析の理論**である. この部分が電波伝搬の「不易」に当たり, 重要ではあるが分かりにくい部分でもある. そこで, 「今まで, もやもやしていた電波伝搬の理論や仕組みが感覚的に分かった」という講義をし たい(副題はその意気込みを示したもの). そのために, アレー信号処理や広帯域信号伝送に重要な働きをする**空間領域と周波数領域の相関行列**を取り上げ, そ こに現れる**固有値**の視点から, 物理的な電波伝搬環境を見直してみたい. そのようにすることによって**新たな景色**が見えてくることになり, 感覚的理解が深まる と確信する. 講義の後半では, 伝搬成果の活用が期待される**MIMO-OTA測定環境**の構築という「流行」を取り上げ, 伝搬環境構築に具備すべき本質的なこととは何かの考え方を示したい.

講演内容

以下、この章のスライドを公開します

1. 広帯域ディジタル移動通信と電波伝搬
   (通信の高速化に立ちはだかる電波伝搬の壁)

2. マルチパス伝搬モデルに現れる確率分布
   (正規分布から仲上m分布まで，その関連と物理的意味)

3. 相関行列と固有値
   (相関行列は伝搬情報の宝庫：その固有値が意味するものとは)

4. スペースダイバーシチにおける固有値問題
   (アレーアンテナから見える伝搬環境に対する景色)

5. 空間相関と周波数相関のアナロジー
   (広帯域信号の電力変動特性を，固有値問題として解く)

6. MIMOチャネル表現
   (次節の議論のための必要最小限のまとめ)

7. MIMO-OTA測定環境構築への考察
   (環境構築に具備すべき本質的なことは何か)

さらに、詳しく勉強したい人は、唐沢著「ディジタル移動通信の電波伝搬基礎」(コロナ社)で

講演内容

1. 広帯域ディジタル移動通信と電波伝搬
(通信の高速化に立ちはだかる電波伝搬の壁)

2. マルチパス伝搬モデルに現れる確率分布
(正規分布から仲上m分布まで，その関連と物理的意味)

3. 相関行列と固有値
(相関行列は伝搬情報の宝庫：その固有値が意味するものとは)

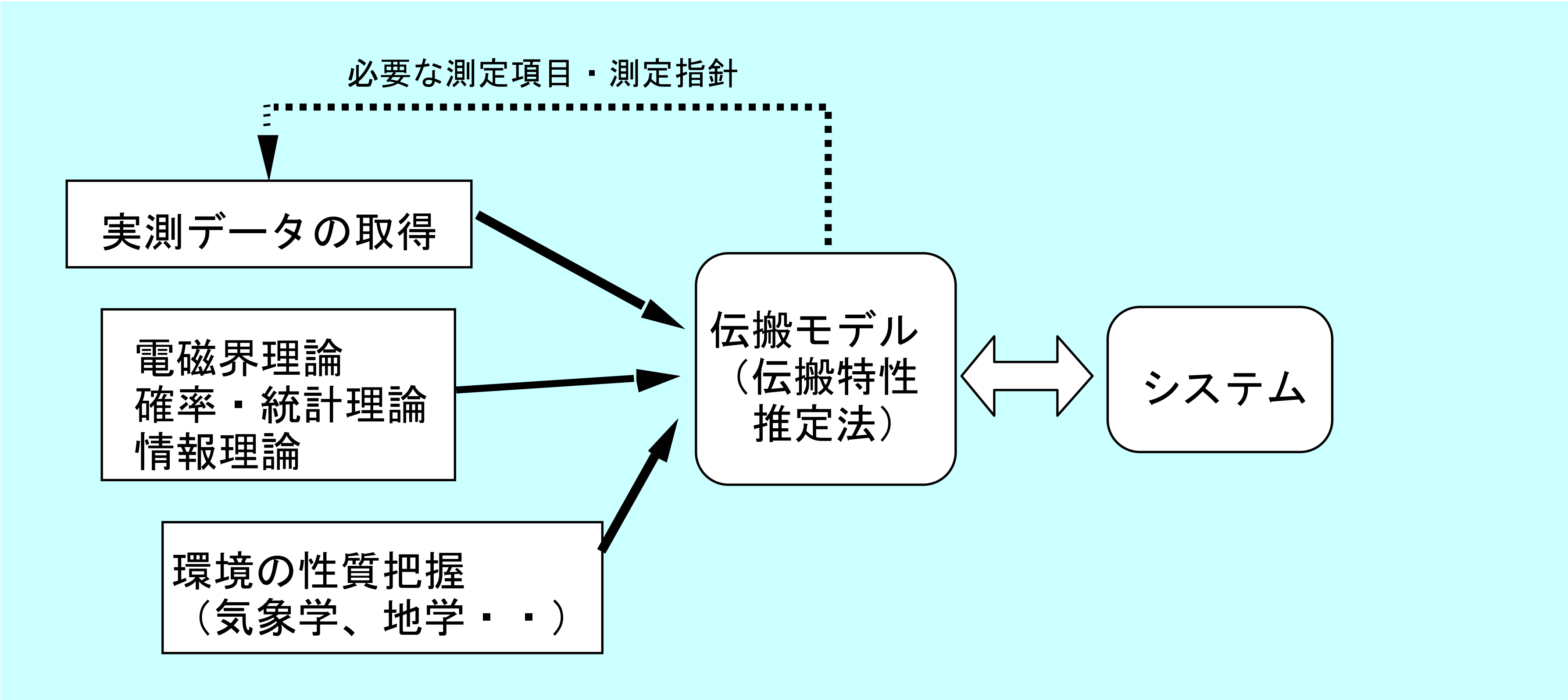
4. スペースダイバーシチにおける固有値問題
(アレーアンテナから見える伝搬環境に対する景色)

5. 空間相関と周波数相関のアナロジー
(広帯域信号の電力変動特性を，固有値問題として解く)

6. MIMOチャネル表現
(次節の議論のための必要最小限のまとめ)

7. MIMO-OTA測定環境構築への考察
(環境構築に具備すべき本質的なことは何か)

伝搬現象のモデル化のアプローチ



４つのレベル

（Ⅰ）純経験的モデル（パラメータとの相関関係を利用）
（Ⅱ）半実験的モデル（ある程度の理論的裏付けあり）
（Ⅲ）伝搬メカニズムに基づく統計モデル
（Ⅳ）計算で求められるもの

通信モデルに現れる確率分布

- 正規分布：確率分布の基本
- 確率分布の一般的な性質
- 各種確率分布の特徴と物理的意味
- 分布の一般系と相互の関係

テキスト：
〔講義〕
　唐沢好男、ディジタル移動通信の電波伝搬基礎（第2章）、コロナ社
〔情報・通信分野の確率・統計〕
　渡辺澄夫、村田昇、確率と統計－情報学への架橋－、コロナ社

通信モデルと確率分布

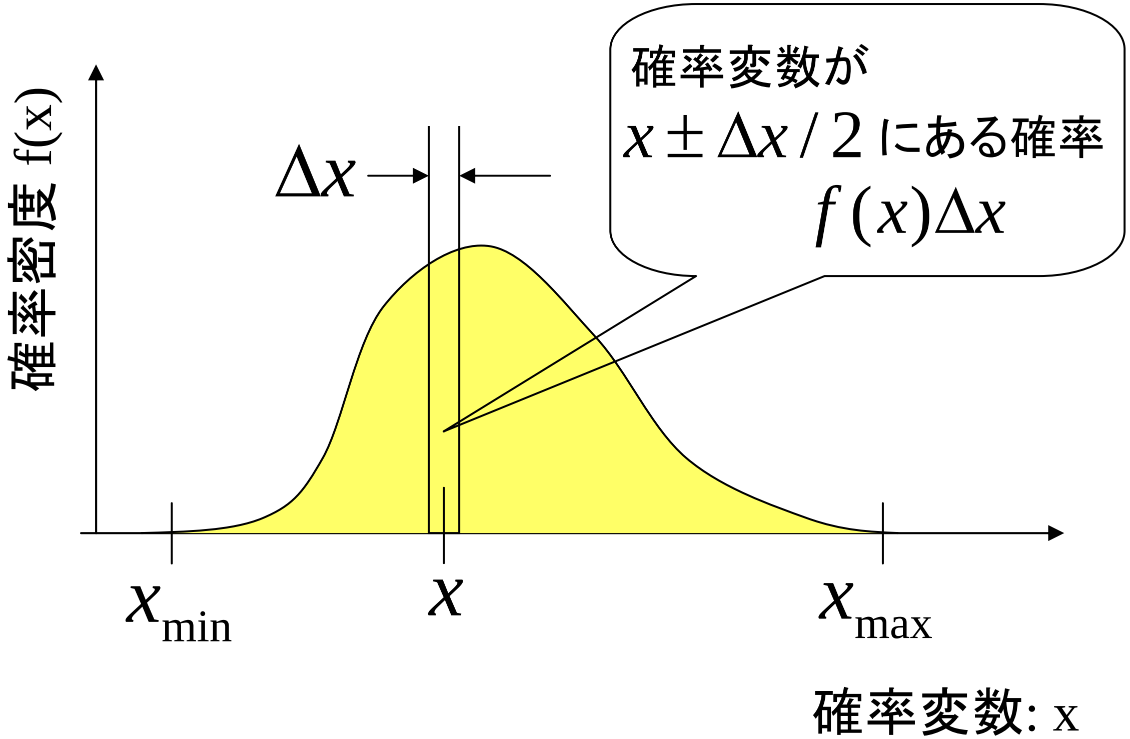
物理量	代表的確率分布
雑音	正規分布
信号強度	レイリー分布、仲上・ライス分布
待ち時間	指数分布
発生回数	ポアソン分布
ダイバーシチ	ガンマ分布（カイ自乗分布）
MIMO固有値	ウィシャート分布
平均受信電力	対数正規分布
・	・
・	・

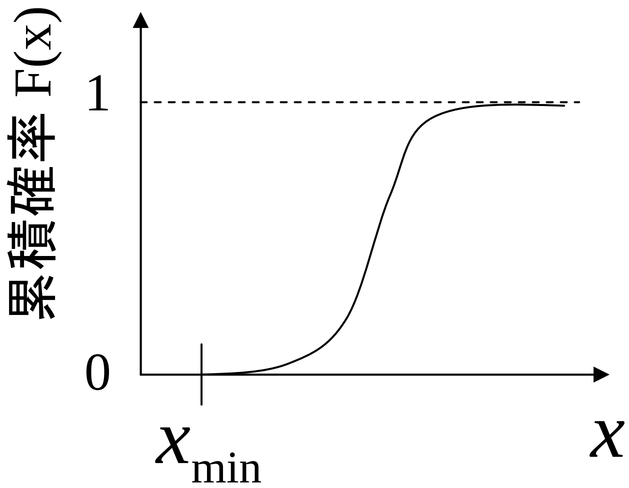
確率分布とは？

確率密度関数 (PDF) : $f(x)$

確率分布関数
累積分布関数(CDF) : $F(x)$

$$F(x) = \int_{x_{\min}}^{x} f(x)\,dx$$





中心極限定理（Central Limit Theorem）

$$\hat{x} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_N) / N$$

x_i : 同一かつ独立な分布（i.i.d.）

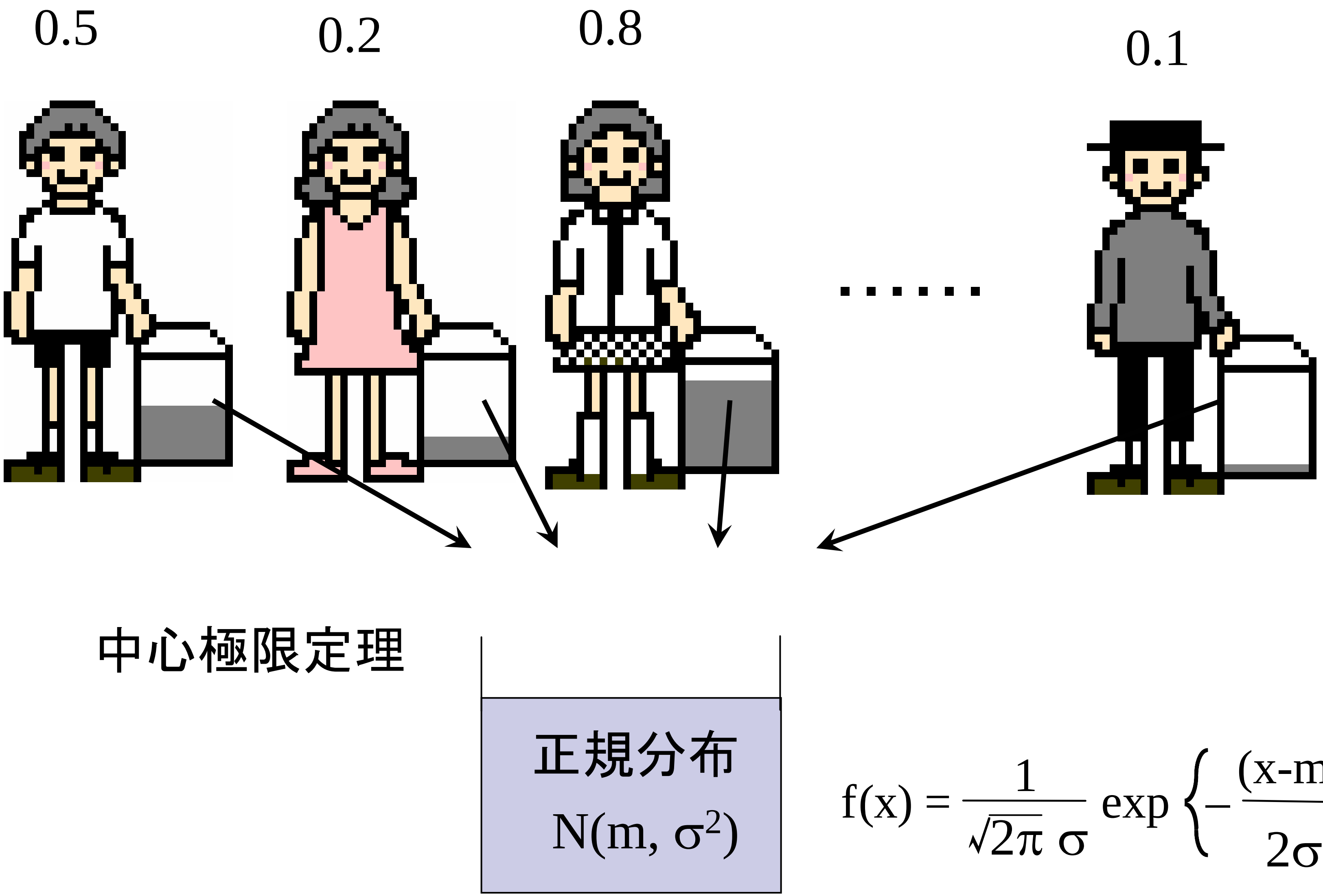
（もう少し条件を緩めることも可能）

N が十分大きいとき、正規分布になる

種々の誤差要因が足し算される現象の物理量は
正規分布をする ⇒ **正規分布は確率分布の基本分布**

この証明は、どの確率の教科書にも書かれていて、さほど難しくない。
しかし、その証明を理解するためには、確率の和の分布を求める
確率分布の特性関数（あるいは積率母関数）の知識が必要

正規分布: 加算的確率過程(Additive Stochastic Process)



中心極限定理

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

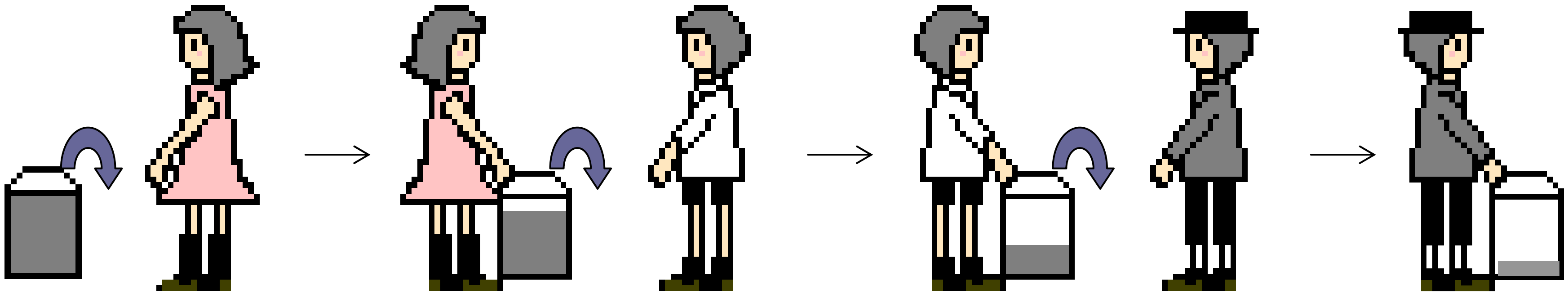
対数正規分布: 積算的確率過程(Multiplicative Stochastic Process)

$$x = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_N$$

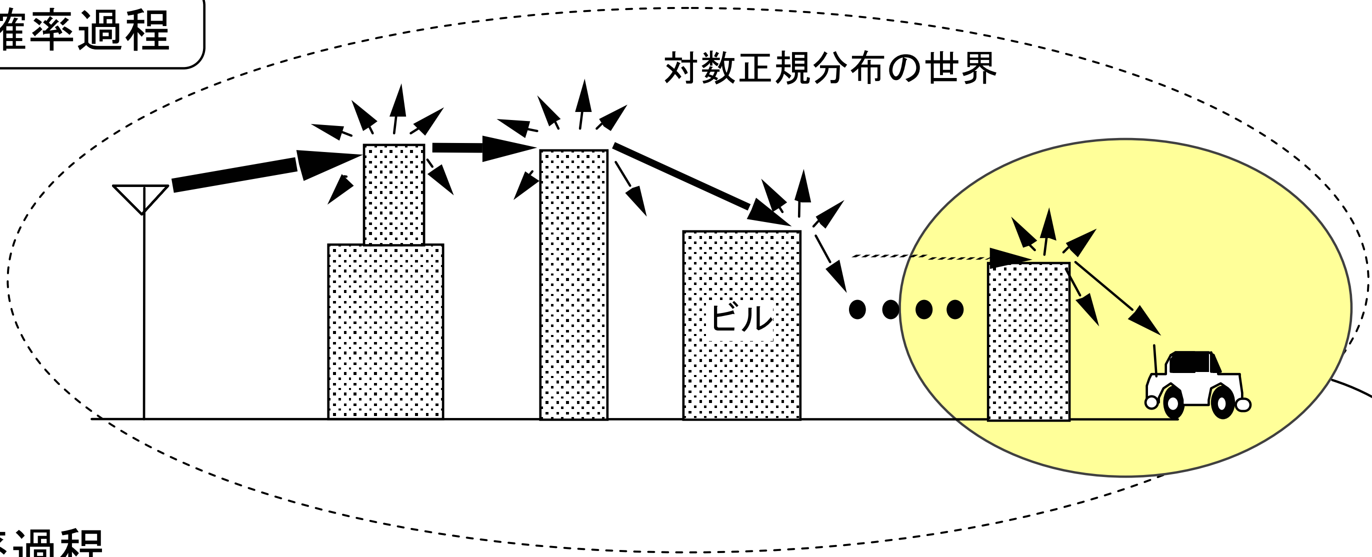
$$\ln x = \ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3 + \cdots + \ln x_N$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

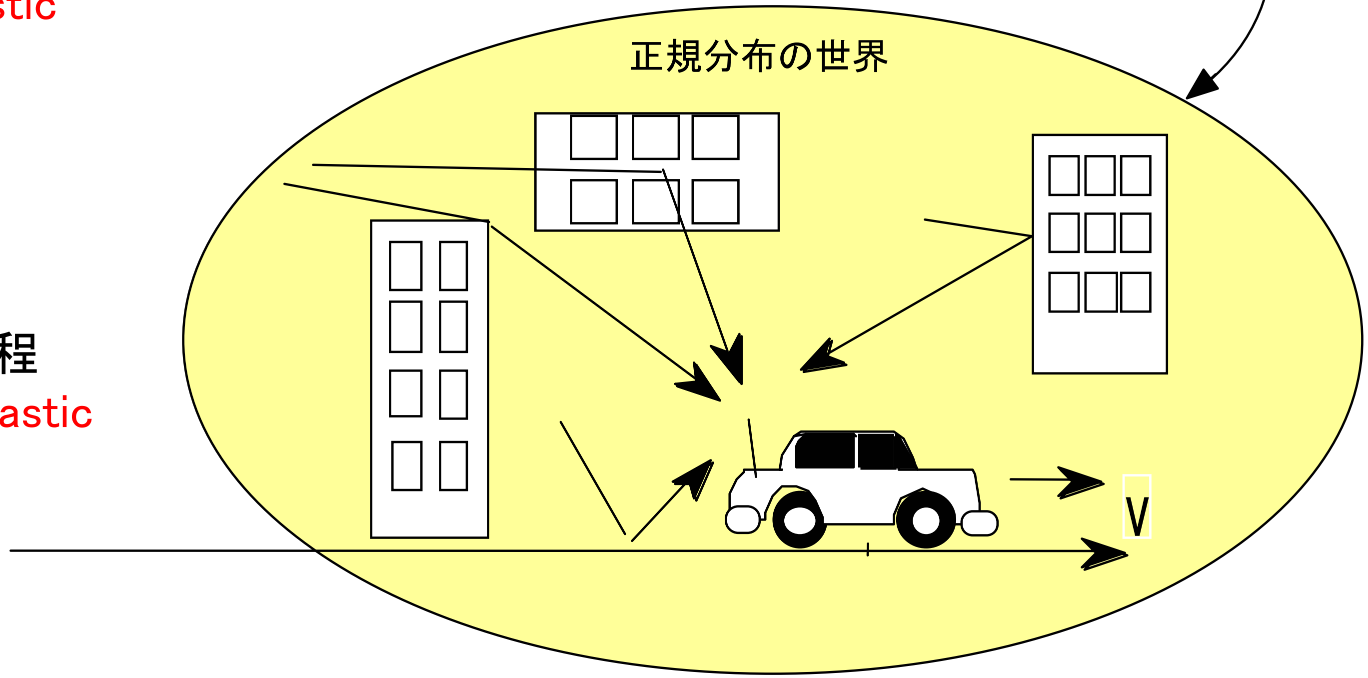
1.0 × 0.8 × 0.5 × 0.7



移動伝搬の確率過程



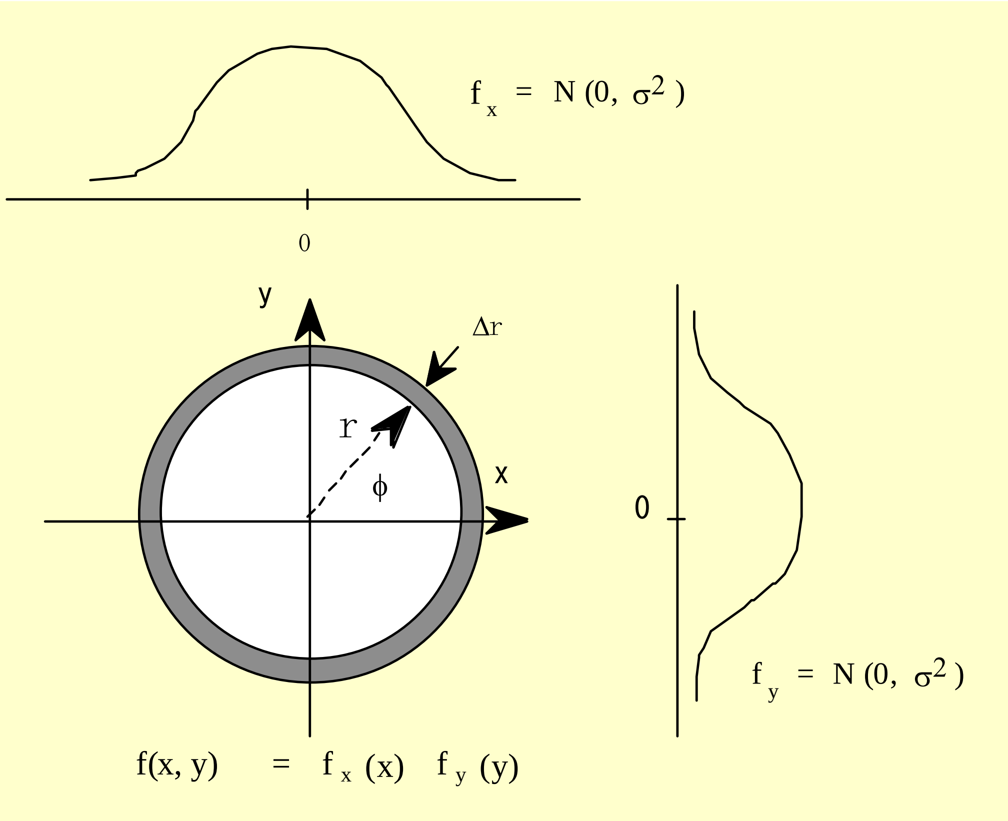
積算的確率過程
Multiplicative Stochastic Process



加算的確率過程
Additive Stochastic Process

レイリー分布

独立な変数x、yが各々正規分布N (0, σ^2)するときのx+ jyの振幅の分布



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$r = \left|x + jy\right| \left(= \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

$$x = r\cos\phi\,,\quad y = r\sin\phi$$

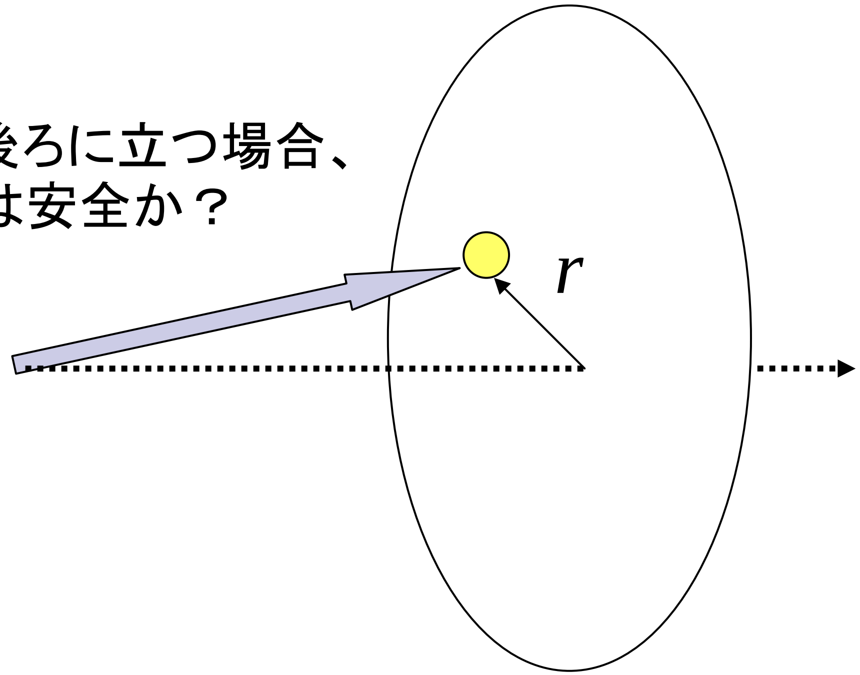
$$f_{r\phi}(r,\phi) = f_x(x)\, f_y(y) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$

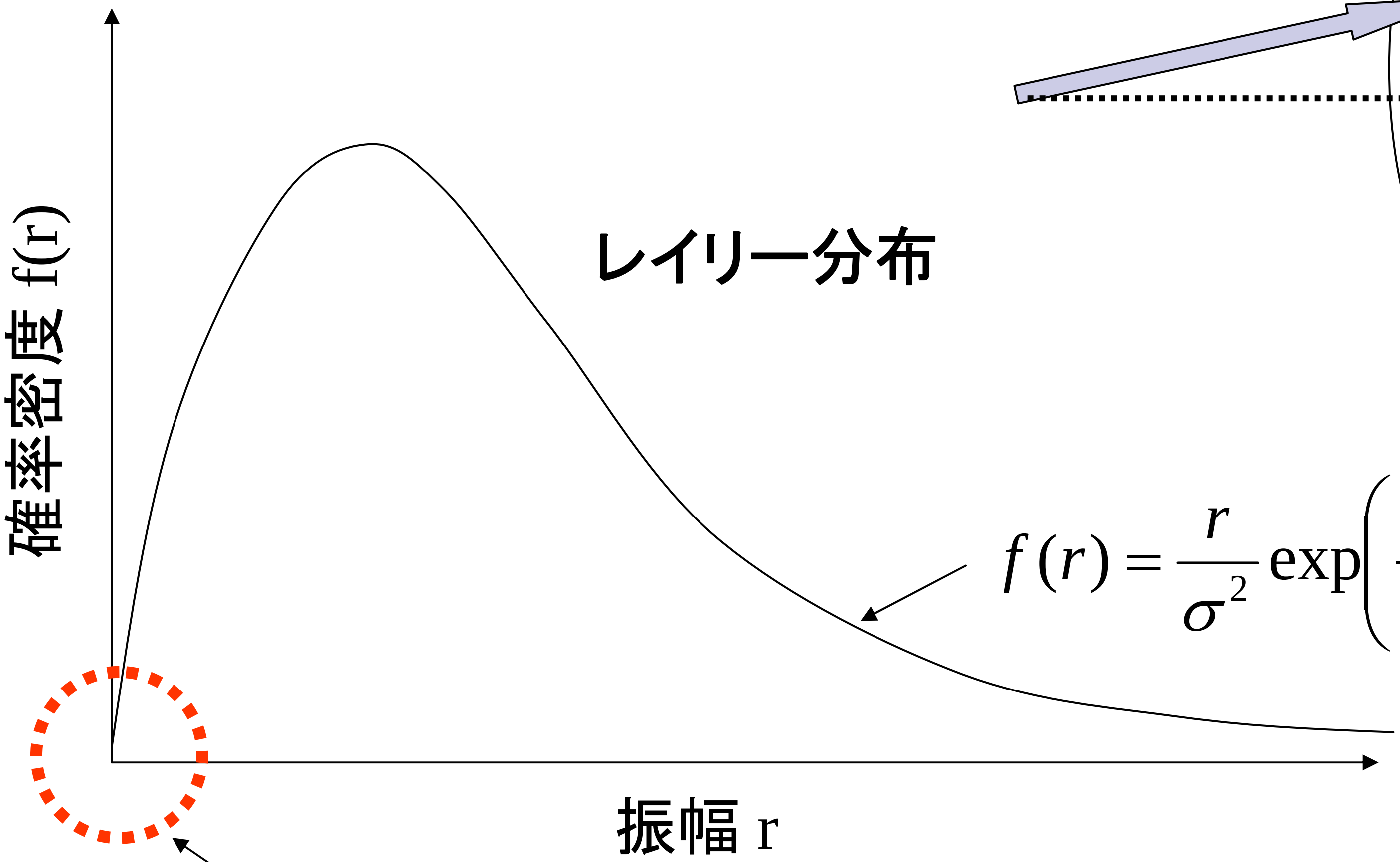
$$= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f_r(r) = \int_0^{2\pi} f_{r\phi}(r,\phi)\, d\phi = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

考えてみよう

右の円盤の中心に向けてボールを投げる。
円盤にボールより大きい孔をあけて、円盤の後ろに立つ場合、
円盤の中心(r=0)に孔をあけて待ち受けるのは安全か？



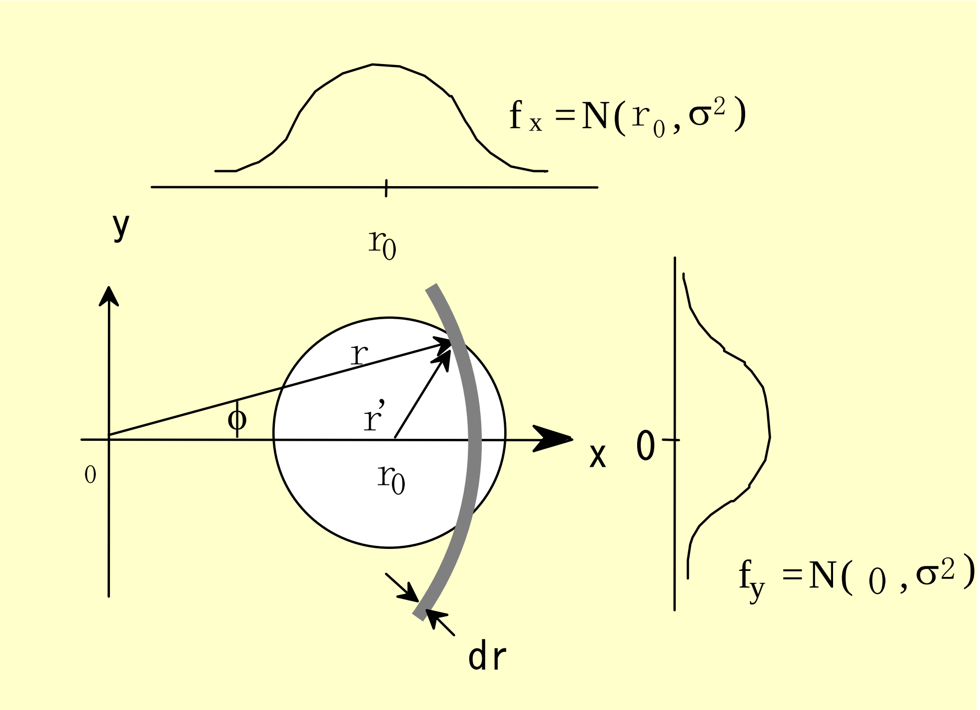


$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

r=0でf(r)=0となる意味は？

仲上・ライス分布

変数xがN(r_0, σ^2)、yがN(0, σ^2)であるときのx+ jyの振幅の分布



$$r = |x + jy| \left(= \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

$$f_{r\phi}(r,\phi) = f_x(x)\, f_y(y) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 - 2r_0 r\cos\phi + r^2}{2\sigma^2}\right)$$

|r| 仲上–ライス分布

|r'| レイリー分布

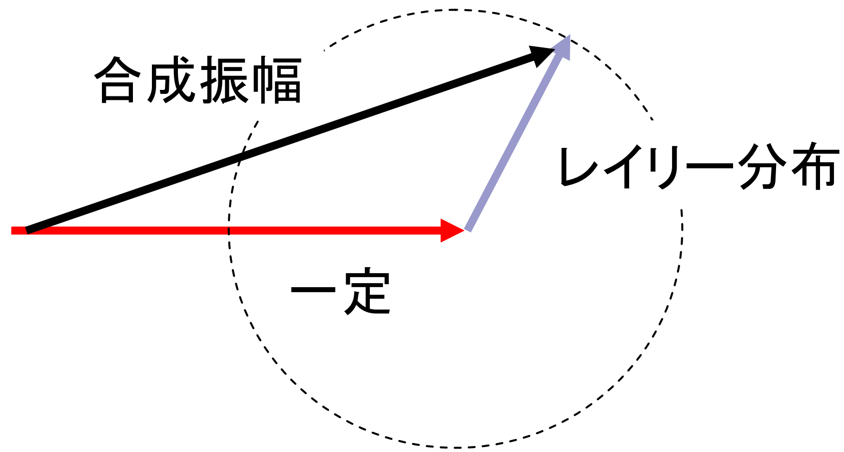
（r_0=0で両者は一致）

$$f_r(r) = \int_0^{2\pi} f_{r\phi}(r,\phi)\, d\phi$$

$$= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{r_0 r}{\sigma^2}\right)$$

仲上　稔　先生の功績

Rice分布
↓
Rice-Nakagami 分布
↓
Nakagami-Rice　分布



S. O. Rice（ベル研究所）:　信号と雑音の研究　（BSTJ, 1944）

仲上　稔（国際電気通信株式会社⇒神戸大学）:
短波のフェージングの研究（電気通信学会誌, 1940）

仲上先生の、世界的な名声は、次の**仲上m分布 (1943)**によって、不動のものとなった。（Nakagami distribution, or, The m distribution）

仲上m分布

仲上分布、m分布と呼ばれる場合もある。短波の電波伝搬の研究の過程で生まれた分布であるが、移動通信のモデルにも役立つ非常に汎用的な分布である。

$$f(r) = \frac{2m^m}{\Omega^m \, \Gamma(m)} \, r^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} r^2\right)$$

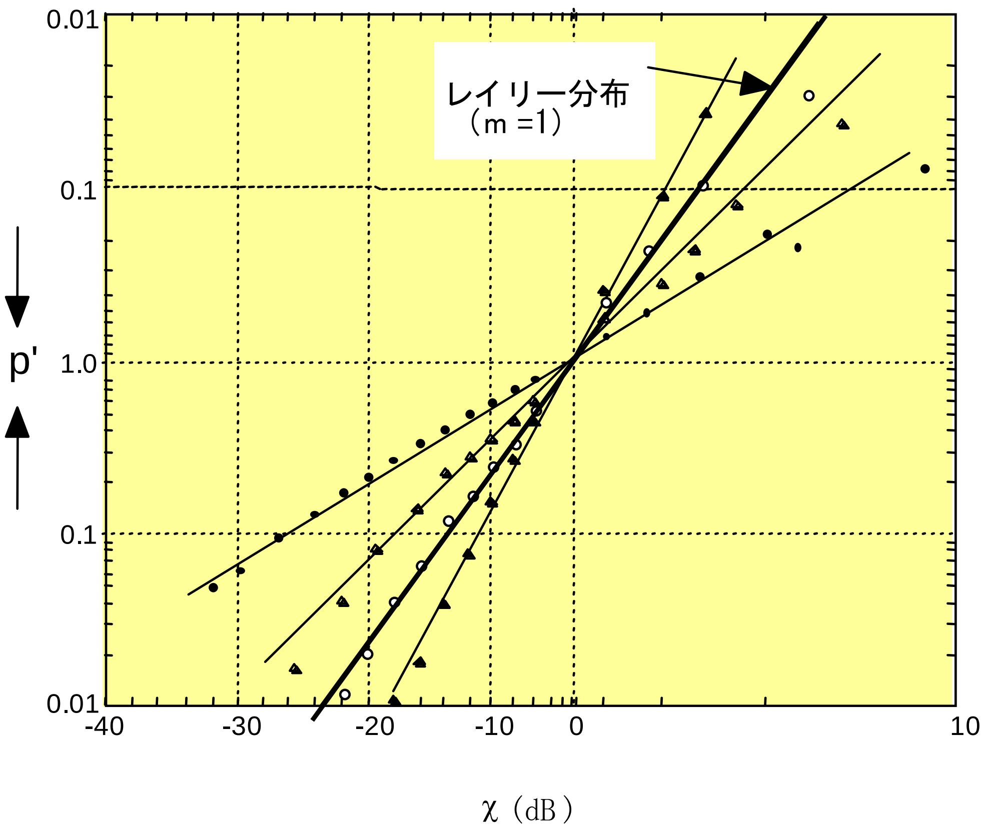
$$1/2 \leq m \leq \infty, \Omega = \left\langle r^2 \right\rangle$$

式の形

$$f(r) = A \, r^{2m-1} \exp\left(-\beta r^2\right)$$

他と組み合わせての利用する場合に、仲上･ライス分布よりは、解析性に優れている。

仲上m分布：そのルーツ



短波通信に見られるフェージングの相対頻度特性

相対頻度特性：確率密度関数の最大値（モード）を1として正規化したもの。この相対頻度をp'、信号強度のデシベル値をχとし、最大値1を与えるχを0dBにとる。

$$x = 1 + \frac{2}{M} - \exp(2\chi / M)$$

$$(M \equiv 20 \log e)$$

$$y = \ln p' \quad (\text{for } \chi \leq 0)$$

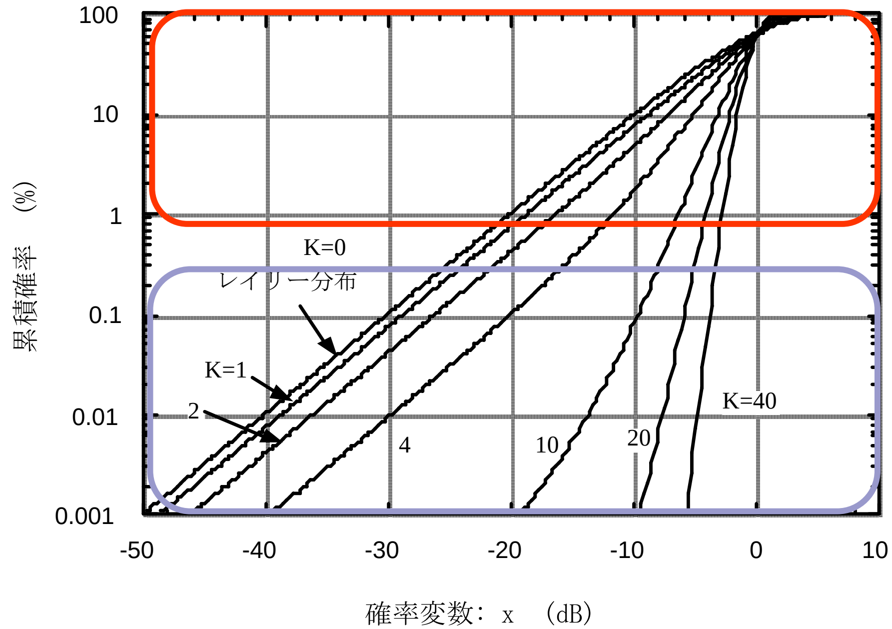
$$= -\ln p' \quad (\text{for } \chi > 0)$$

y = x → y = m x

レイリー分布 → 仲上m分布

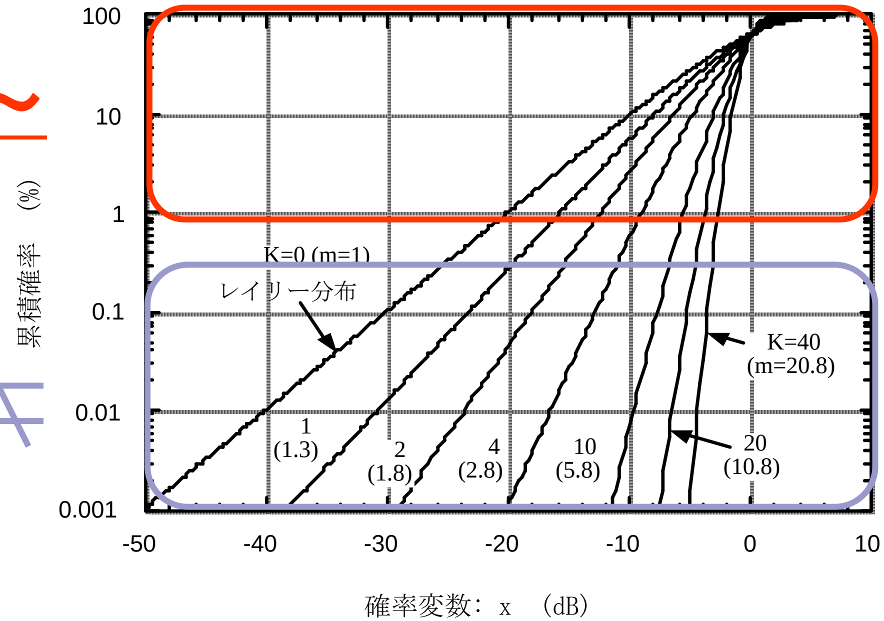
仲上・ライス分布と仲上m分布：その近似関係は？

[仲上・ライス分布]



≃ ≠

[仲上m分布]



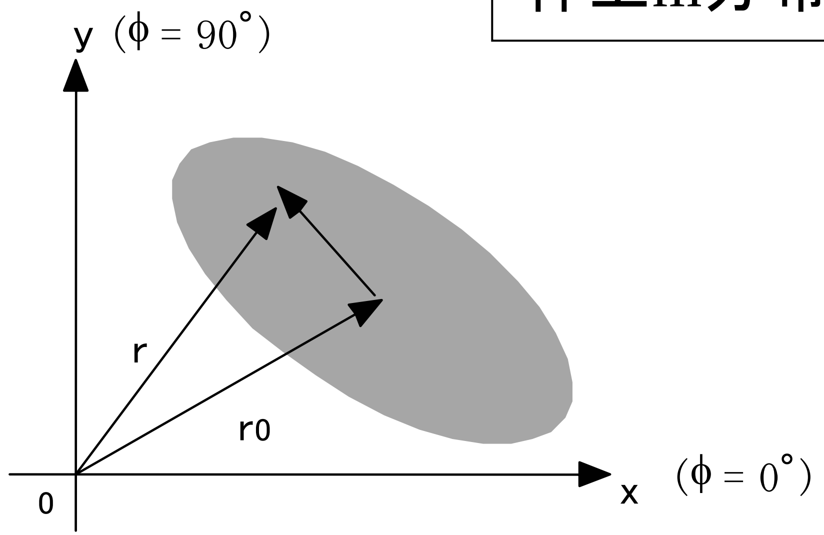
$$m = \frac{(K+1)^2}{2K+1}$$

$$r_0^2/2\sigma^2 \left(\equiv \quad K\right) = \sqrt{m^2 - m} + m - 1$$

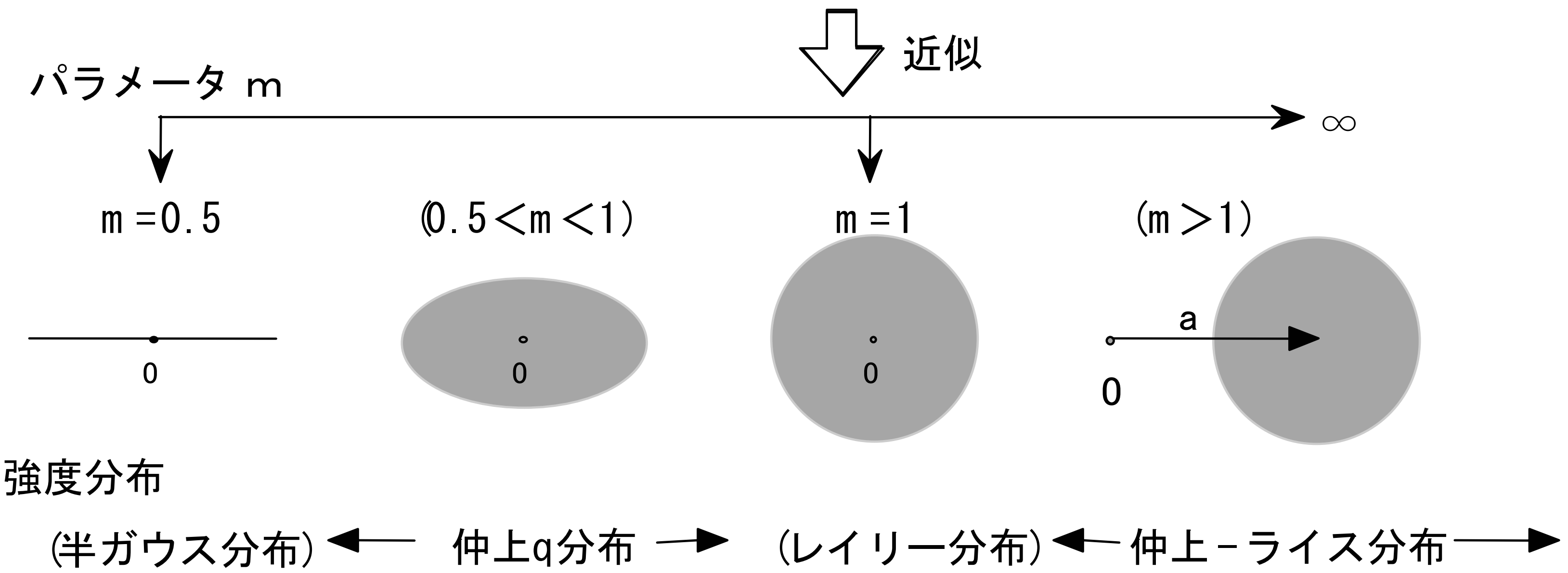
注意：
小さい確率の部分では傾向が異なり、良い近似関係では無い

Channel Capacity: ○　　BER: ×

仲上m分布とその仲間達



［仲上m分布が対象とする環境］



指数分布とガンマ分布（χ^2 分布）

指数分布

$$f(z) = \lambda \exp(-\lambda z)$$

$\lambda = 1 / \langle z \rangle$ for $z \geq 0$

レイリー分布する変数rに対して、$z = r^2$ と変換すると
この分布になる。
レイリーフェージング環境での電力分布やSNRの分布

ポアソン過程で現れる時間の分布（事象の発生間隔、持続時間等）
も指数分布になる。

ガンマ分布（χ^2分布）

x_iが独立にN(0,1)の正規分布をするとき、

$$z = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

は次式のχ自乗分布する。（自由度nのχ自乗分布）

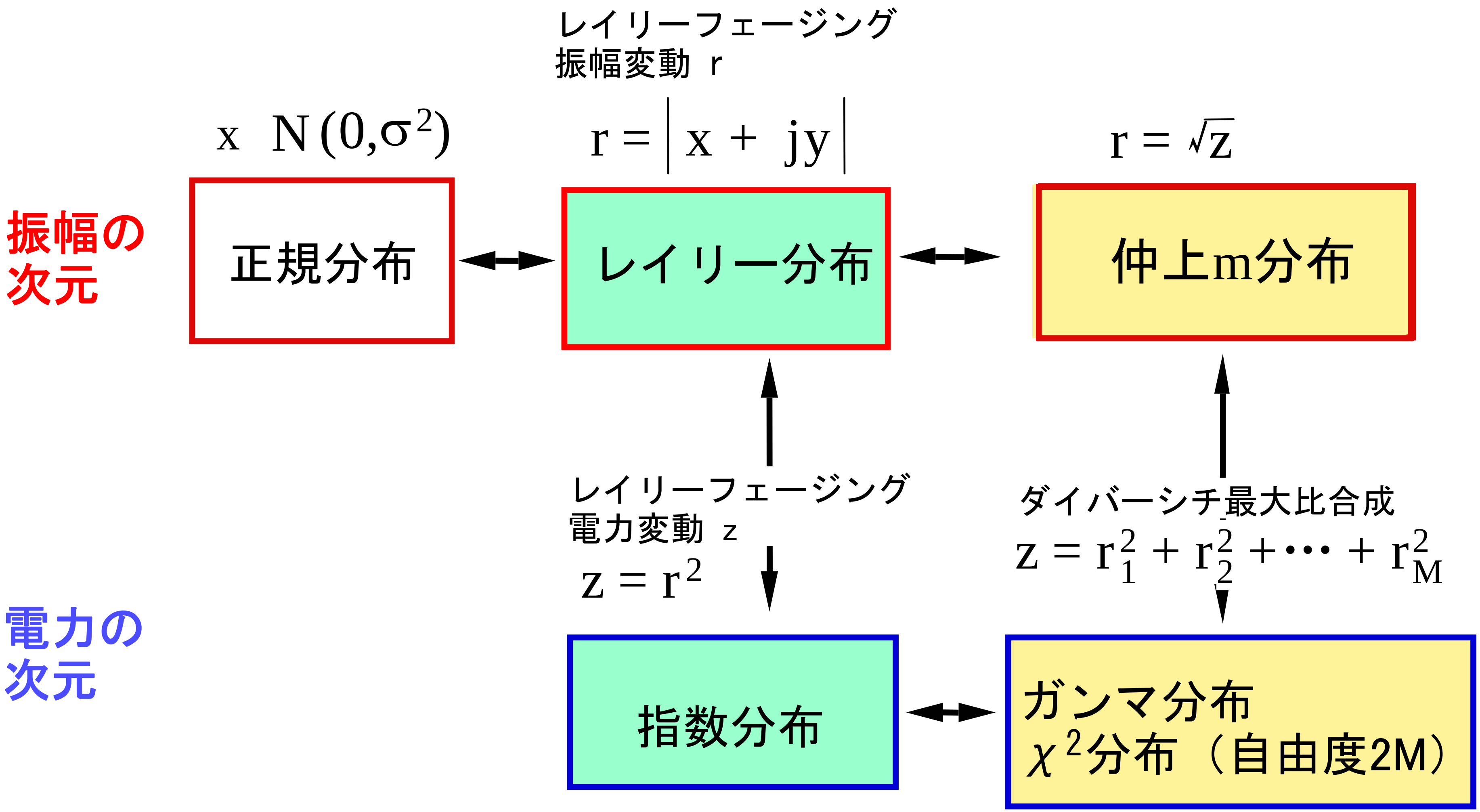
$$f(z) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{z}{2}\right)$$

これにスケールファクタを導入して一般化したものが、
ガンマ分布

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \beta^{\nu} z^{\nu-1} \exp(-\beta z)$$

$\nu = 2$　は指数分布。　　　$r = \sqrt{z}$　としたrの分布は仲上m分布。

多重波の理論から導かれる分布



電波伝搬のモデルに現れる連続分布の関数として

一般化されたガンマ分布

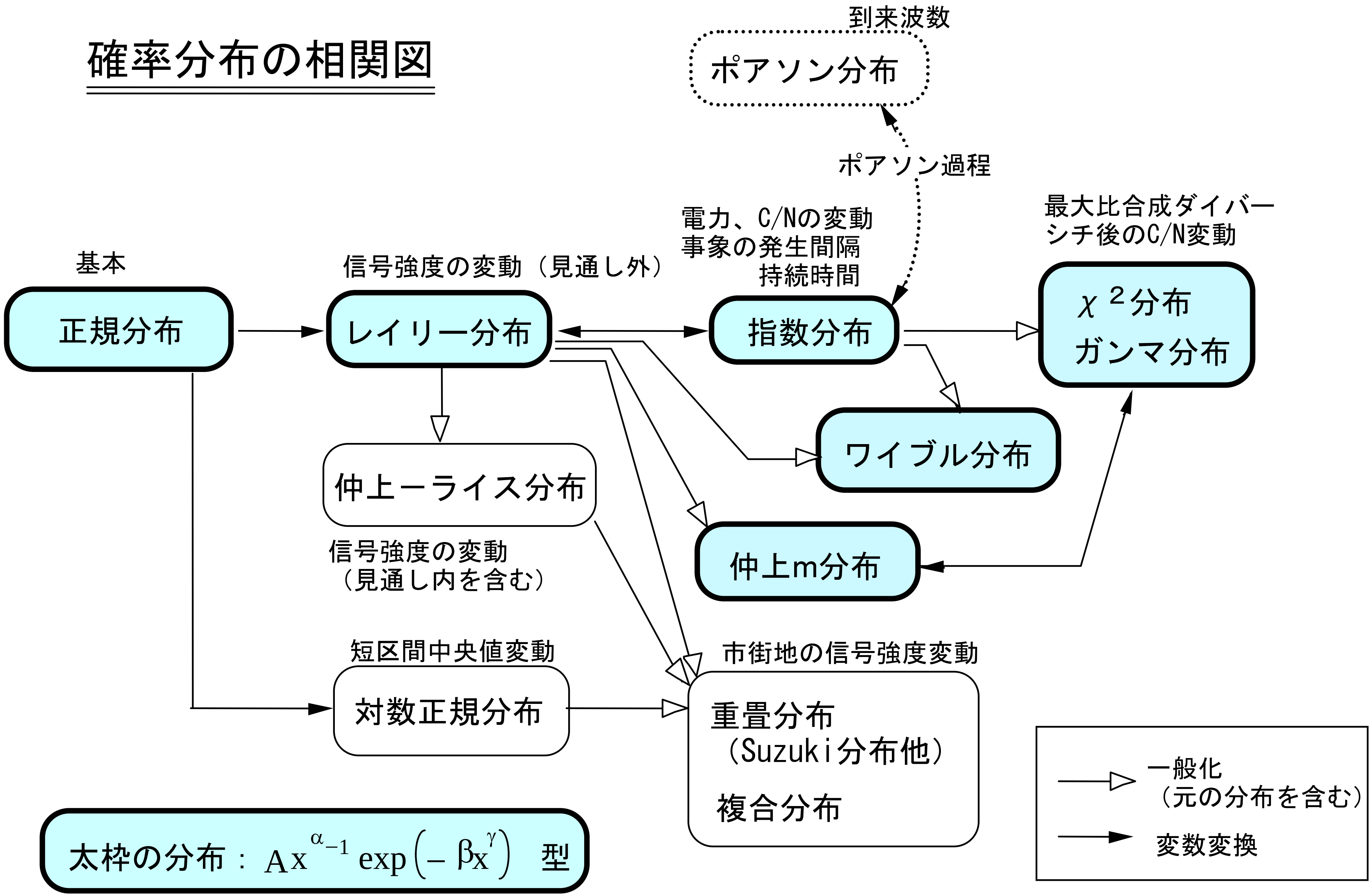
$$A x^{\alpha-1} \exp\left(-\beta x^{\gamma}\right)$$

のタイプが多い

表１　標準タイプ（$A x^{\alpha-1}\exp\left(-\beta x^{\gamma}\right)$　）の分布の整理

分布名	α	β	γ	A	変数Xとパラメータ範囲	備考
正規	1	$\frac{1}{2\sigma^2}$	2	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$	$-\infty < x < \infty$ $\sigma > 0$	平均値０のタイプ
レイリー	2	$\frac{1}{2\sigma^2}$	2	$\frac{1}{\sigma^2}$	$x \geq 0$ $\sigma > 0$	$m = 1$の仲上m分布 $m = 2$ ワイブル分布
指数	1	β	1	β	$x \geq 0$ $\beta > 0$	$\nu = 1$ のガンマ分布 $n = 2$ の χ^2 分布 m=1のワイブル分布
ガンマ	ν	β	1	$\frac{1}{\Gamma(\nu)}\beta^{\nu}$	$x \geq 0$ $\beta > 0, \nu > 0$	Γ: ガンマ関数
χ^2	$\frac{n}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$	$x \geq 0$ $n > 0$	$\nu = \frac{n}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ の ガンマ分布
仲上 m	$2m$	$\frac{m}{\Omega}$	2	$\frac{2m^m}{\Gamma(m)\Omega^m}$	$x \geq 0$ $\Omega > 0, m \geq \frac{1}{2}$	
ワイブル	m	β	m	βm	$x \geq 0$ $\beta > 0, m > 0$	

確率分布の相関図


到来波数
ポアソン分布
ポアソン過程
電力、C/Nの変動
事象の発生間隔
持続時間
最大比合成ダイバーシチ後のC/N変動
基本
正規分布
信号強度の変動（見通し外）
レイリー分布
指数分布
χ 2分布
ガンマ分布
ワイブル分布
仲上ーライス分布
信号強度の変動
（見通し内を含む）
仲上m分布
短区間中央値変動
対数正規分布
市街地の信号強度変動
重畳分布
（Suzuki分布他）
複合分布
一般化
（元の分布を含む）
変数変換
太枠の分布： $Ax^{\alpha-1}\exp\left(-\beta x^{\gamma}\right)$ 型

More about Normal Distribution

多次元正規分布

【1次元正規分布】

$$f_1(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

【2次元正規分布】

$$f_2(x_1,x_2;\mu_1,\sigma_1,\mu_2,\sigma_2,\rho_{12})$$

$$=\frac{1}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)}\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho_{12}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right]$$

相関係数 $\rho_{12}=0$ のときは $f_2(x_1,x_2;\mu_1,\sigma_1,\mu_2,\sigma_2,0)=f_1(x_1;\mu_1,\sigma_1)\,f_1(x_2;\mu_2,\sigma_2)$

【多次元正規分布】

$$f_n(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\boldsymbol{V}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \sigma_i^2 & \cdots & \sigma_i\sigma_j\rho_{ij} & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & \sigma_j\sigma_i\rho_{ji} & \cdots & \sigma_j^2 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

共分散行列
(Covariance Matrix)

相関行列
(Correlation Matrix)

【多次元正規分布の性質】

$\boldsymbol{V}$ は実対称行列 （$\boldsymbol{x}$ が複素数の場合にはエルミート行列）

⇩

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Lambda}$$ となる直交行列 $\boldsymbol{P}$ と、対角行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ が存在する

固有値が要素となる

⇩

$$\boldsymbol{V}^{1/2} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\boldsymbol{P}$$ と定義すると

$$\boldsymbol{V}^{1/2}\boldsymbol{V}^{1/2} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{V}$$

より、$\boldsymbol{V}^{1/2}$ は $\boldsymbol{V}$ の平方根の意味を持ち、対角行列 $\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}$ は、
特異値（＝固有値の平方根）が要素となる

知っておくと便利な性質

① 確率変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{n}$ 次元正規分布 $N_n(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{V})$ に従うとき、

$$\boldsymbol{z}=\left(\boldsymbol{V}^{1/2}\right)^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$$ は $N_n(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}_n)$ に従う

相関のある変動を無相関の変動に変える変換
（変換後の信号を扱うことによって、信号処理や理論解析の手間が格段に違う）

② 確率変数ベクトル $\boldsymbol{z}$ が $\boldsymbol{n}$ 次元正規分布 $N_n(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}_n)$ に従うとき、

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{V}^{1/2}\boldsymbol{z}$$ は $N_n(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{V})$ に従う

無相関の変動から、任意の相関行列で与えられる有相関の変動を
作り出す場合に便利
（フェージングシミュレータ、MIMOクロネッカーモデルなどへの応用）

多次元正規分布には、後の相関行列解析で重要な固有値が、
見え隠れしている。

ここでは、確率変数 x を実数のもので扱っているが、
電波伝搬では一般に複素数である。
相関行列が実数対称行列から、エルミート行列に変わる。
その場合に、前スライド①、②の変換はどう表されるか、各自で考えてみよう。

講演内容

1. 広帯域ディジタル移動通信と電波伝搬
   (通信の高速化に立ちはだかる電波伝搬の壁)

2. マルチパス伝搬モデルに現れる確率分布
   (正規分布から仲上m分布まで，その関連と物理的意味)

3. 相関行列と固有値
   (相関行列は伝搬情報の宝庫：その固有値が意味するものとは)

4. スペースダイバーシチにおける固有値問題
   (アレーアンテナから見える伝搬環境に対する景色)

5. 空間相関と周波数相関のアナロジー
   (広帯域信号の電力変動特性を，固有値問題として解く)

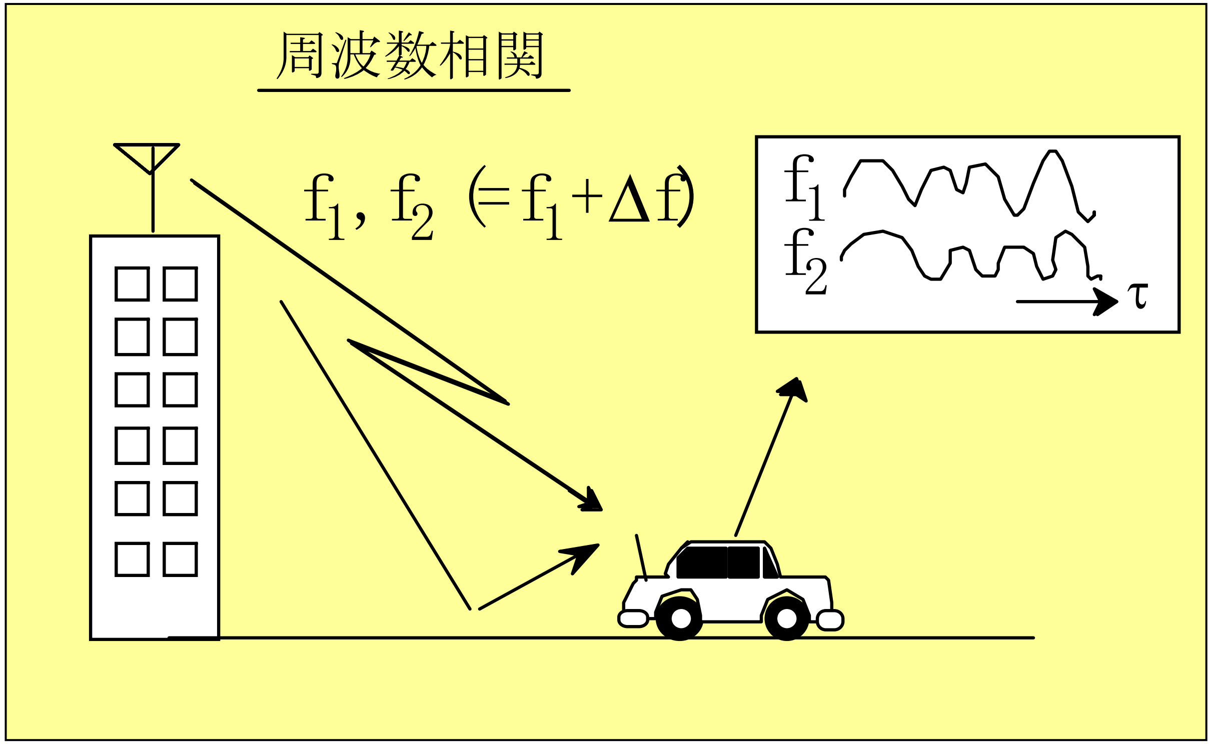
6. MIMOチャネル表現
   (次節の議論のための必要最小限のまとめ)

7. MIMO-OTA測定環境構築への考察
   (環境構築に具備すべき本質的なことは何か)

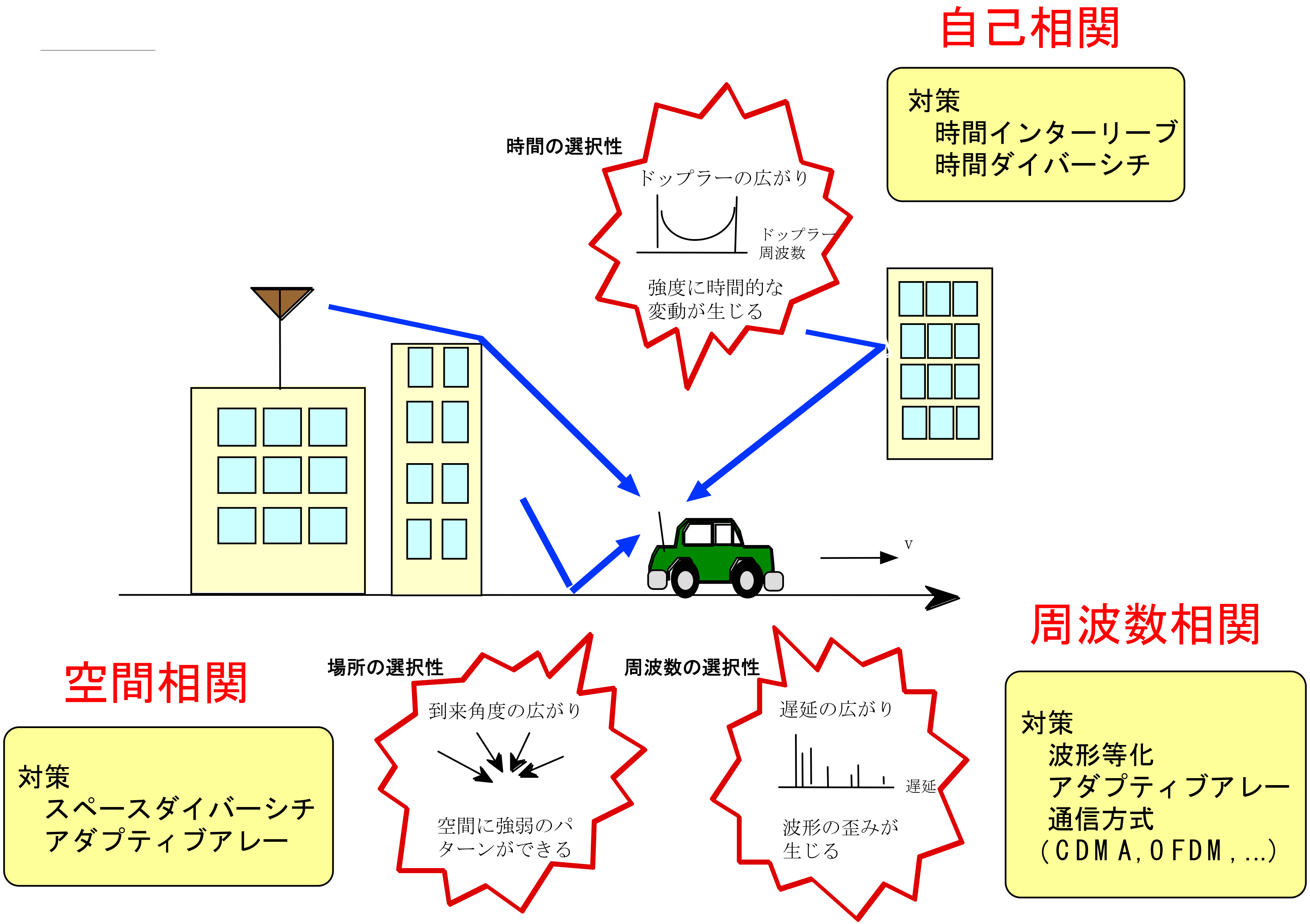
相関特性

ある変数xとx+Δx間の信号の相関

X: 時間(t), 場所(x), 周波数(f)等



時間相関(自己相関):変動の速さを表す性質
空間相関:空間的変化の性質、スペースダイバーシチに利用
周波数相関:広帯域信号の波形歪み, FDDの送受信信号の相関等


自己相関
対策
時間インターリーブ
時間ダイバーシチ
時間の選択性
ドップラーの広がり
ドップラー
周波数
強度に時間的な
変動が生じる
v
周波数相関
対策
波形等化
アダプティブアレー
通信方式
（ＣＤＭＡ, ＯＦＤＭ , ...）
空間相関
対策
スペースダイバーシチ
アダプティブアレー
場所の選択性
到来角度の広がり
空間に強弱のパ
ターンができる
周波数の選択性
遅延の広がり
遅延
波形の歪みが
生じる

相関の定義：複素振幅・振幅・電力の相関係数

$$\rho_a(\Delta x) = \frac{\left\langle \left\{ a(x) - \langle a(x) \rangle \right\}^* \left\{ a(x+\Delta x) - \langle a(x+\Delta x) \rangle \right\} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \left\{ a(x) - \langle a(x) \rangle \right\}^* \left\{ a(x) - \langle a(x) \rangle \right\} \right\rangle \left\langle \left\{ a(x+\Delta x) - \langle a(x+\Delta x) \rangle \right\}^* \left\{ a(x+\Delta x) - \langle a(x+\Delta x) \rangle \right\} \right\rangle}}$$

$$= \frac{\langle a^*(x)\, a(x+\Delta x) \rangle}{\langle a^*(x)\, a(x) \rangle}$$

複素振幅 a の相関

$$\rho_A(\Delta x) = \frac{\langle A(x)\, A(x+\Delta x) \rangle - \langle A(x) \rangle^2}{\langle A^2(x) \rangle - \langle A(x) \rangle^2}$$

振幅 $A = |a|$ の相関

$$\rho_P(\Delta x) = \frac{\langle P(x)\, P(x+\Delta x) \rangle - \langle P(x) \rangle^2}{\langle P^2(x) \rangle - \langle P(x) \rangle^2}$$

電力 $P = A^2$ の相関

ρ_Aとρ_P

$$\rho_A(\Delta x) \equiv \frac{\boxed{\langle A(x)\, A(x+\Delta x)\rangle} - \langle A(x)\rangle^2}{\langle A(x)^2\rangle - \langle A(x)\rangle^2}$$

$$\boxed{\langle A(x)\, A(x+\Delta x)\rangle} \rightarrow \boxed{= \sigma^2\left\{2E(\rho) - (1-\rho^2)\, K(\rho)\right\}}$$

$$= \frac{\pi\rho^2}{4(4-\pi)}\left(1 + \frac{\rho^2}{16} + \frac{\rho^4}{64} + \cdots\right)$$

（使いやすさ：×）

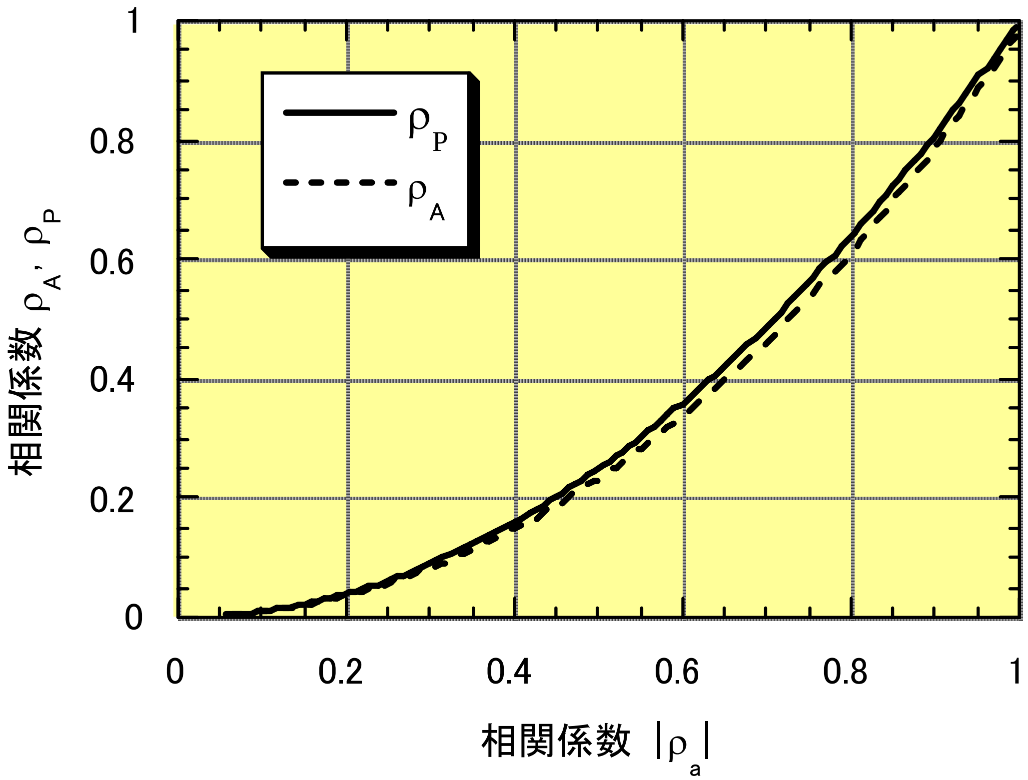
$$\rho_P(\Delta x) \equiv \frac{\boxed{\langle P(x)\, P(x+\Delta x)\rangle} - \langle P(x)\rangle^2}{\langle P(x)^2\rangle - \langle P(x)\rangle^2}$$

$$\boxed{\langle P(x)\, P(x+\Delta x)\rangle} \rightarrow \boxed{= 4\sigma^4\left(1+\rho^2\right)}$$

$$= \left|\, \rho_a(\Delta x) \right|^2$$

（使いやすさ：○）

3つの量 (a, A, P) の相関係数の相互の関係



振幅変動の相関の代わりに、計算式がシンプルな電力の相関を用いても、問題が無い

$$\rho_A(\Delta x) \approx \rho_P(\Delta x) = \left| \rho_a(\Delta x) \right|^2$$

今回の主役は、複素量同士の複素相関

空間相関

$$\rho_a(\Delta x) \propto \left\langle a^*(x)\, a(x+\Delta x) \right\rangle$$

と

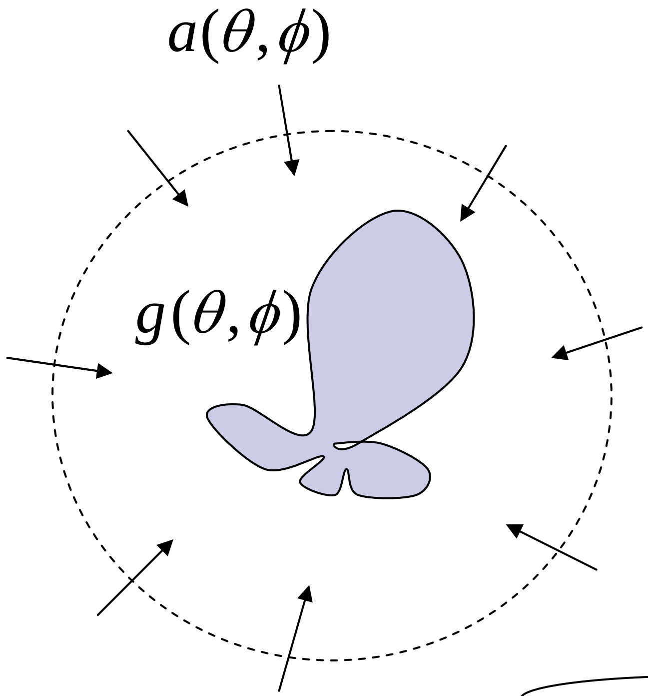
周波数相関

$$\rho_a(\Delta f) \propto \left\langle a^*(f)\, a(f+\Delta f) \right\rangle$$

空間相関

指向性のあるアンテナでのマルチパス環境下での平均受信電力

MEG (Mean Effective Gain)



$a(\theta,\phi)$　到来波（素波）の複素振幅

$g(\theta,\phi)$　アンテナ指向性（複素振幅）

$$\Omega(\theta,\phi) = \left\langle \left| a(\theta,\phi) \right|^2 \right\rangle$$ 平均電力到来角度プロファイル

$$G(\theta,\phi) = \left| g(\theta,\phi) \right|^2$$ アンテナの電力指向性

$$G_e = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} G(\theta,\phi)\,\Omega(\theta,\phi)\,\sin\theta\, d\phi\, d\theta$$

$$G_e : \mathrm{MEG}$$

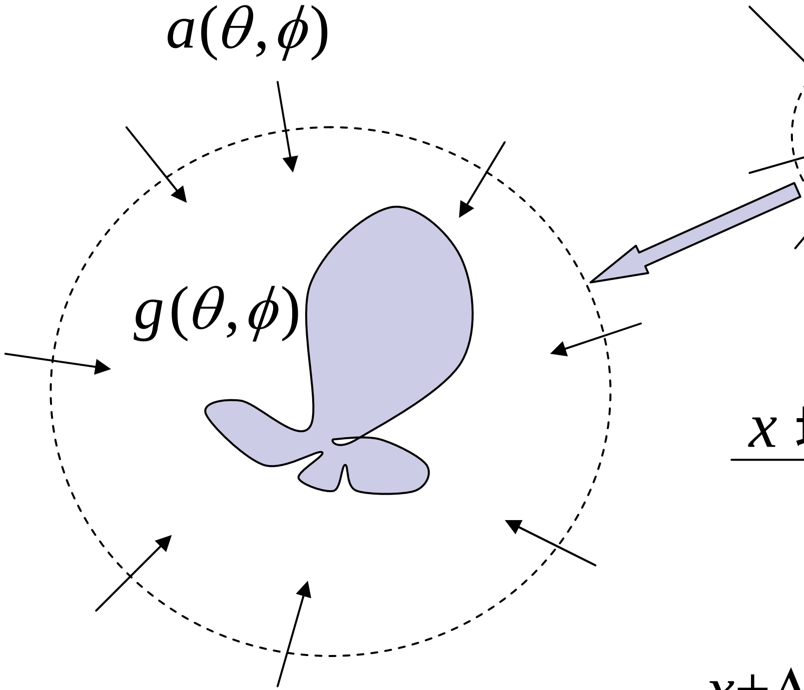
（Taga論文ではXPR成分も含んで一般的に表記されているが
ここではそれを省略している）

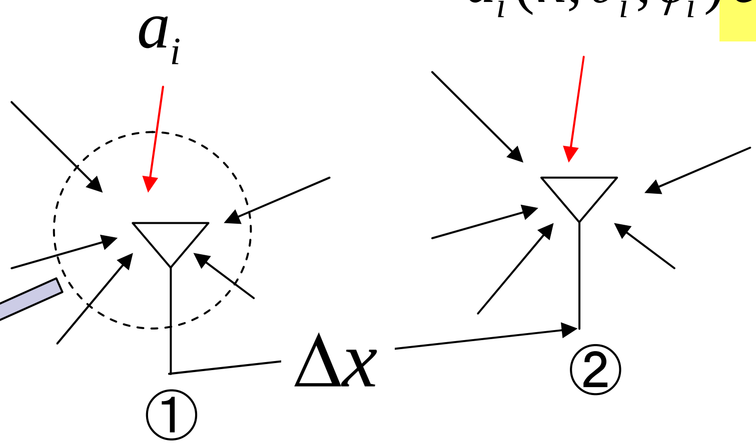
T. Taga, IEEE Trans. VT, vol. VT-39, no. 2, pp. 117-131, 1990

マルチパス環境下での複素受信振幅

$$a_i(x+\Delta x;\theta_i,\phi_i) = a_i(x;\theta_i,\phi_i)\,\boxed{e^{jk\Delta x\sin\theta_i\cos\phi_i}}$$

位相のずれ





x 地点(①)での受信強度(複素受信振幅)

$$a_e^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} g(\theta_i,\phi_i)\,a_i(x;\theta_i,\phi_i)$$

$x+\Delta x$ 地点(②)での受信強度(複素受信振幅)

$$a_e^{(2)}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g(\theta_i,\phi_i)\,a_i(x+\Delta x;\theta_i,\phi_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} g(\theta_i,\phi_i)\,a_i(x;\theta_i,\phi_i)\,\boxed{e^{jk\Delta x\sin\theta\cos\phi}}$$

$a(\theta,\phi)$

到来波(素波)の複素振幅

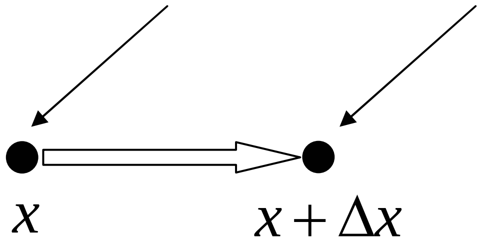
$g(\theta,\phi)$

アンテナ指向性(複素振幅)

空間相関(素波の場合)

$$a_i(x;\theta_i,\phi_i)$$

$$a_i(x+\Delta x;\theta_i,\phi_i) = a_i(x;\theta_i,\phi_i)\,e^{jk\Delta x \sin\theta_i \cos\phi_i}$$



$$\rho_a^{(i)}(\Delta x) \propto \left\langle g^*(\theta_i,\phi_i)\,a_i^*(x;\theta_i,\phi_i)\,g(\theta_i,\phi_i)\,a_i(x+\Delta x;\theta_i,\phi_i)\right\rangle$$

$$= G(\theta_i,\phi_i)\left\langle a_i^*(x;\theta_i,\phi_i)\,a_i(x+\Delta x;\theta_i,\phi_i)\right\rangle$$

$$= G(\theta_i,\phi_i)\,\Omega(\theta_i,\phi_i)\;e^{jk\Delta x \sin\theta_i \cos\phi_i}$$

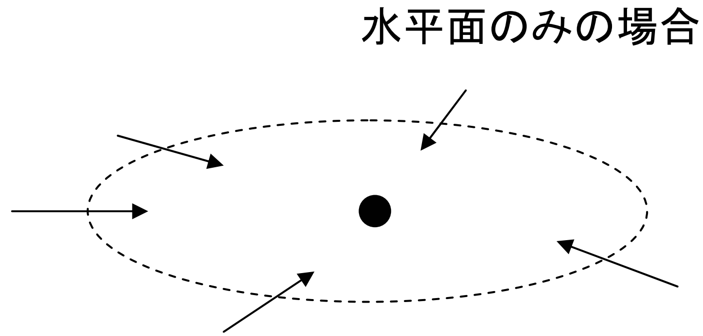
3次元空間からの到来波に対する空間相関は

$$\rho_a(\Delta x) = \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} G(\theta,\phi)\,\Omega(\theta,\phi)\;e^{jk\Delta x \sin\theta\cos\phi}\,\sin\theta\,d\phi d\theta}{\boxed{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} G(\theta,\phi)\,\Omega(\theta,\phi)\sin\theta\,d\phi d\theta}}$$

MEG

２次元空間（水平面内）からの到来波に対して

$$\rho_a(\Delta x) = \frac{\int_0^{2\pi} G(\phi)\,\Omega(\phi)\; e^{jk\Delta x \cos\phi}\, d\phi}{\int_0^{2\pi} G(\phi)\,\Omega(\phi)\, d\phi}$$



無指向性アンテナで受信する場合は

$$\rho_a(\Delta x) = \frac{\int_0^{2\pi} \Omega(\phi)\; e^{jk\Delta x \cos\phi}\, d\phi}{\int_0^{2\pi} \Omega(\phi)\, d\phi}$$

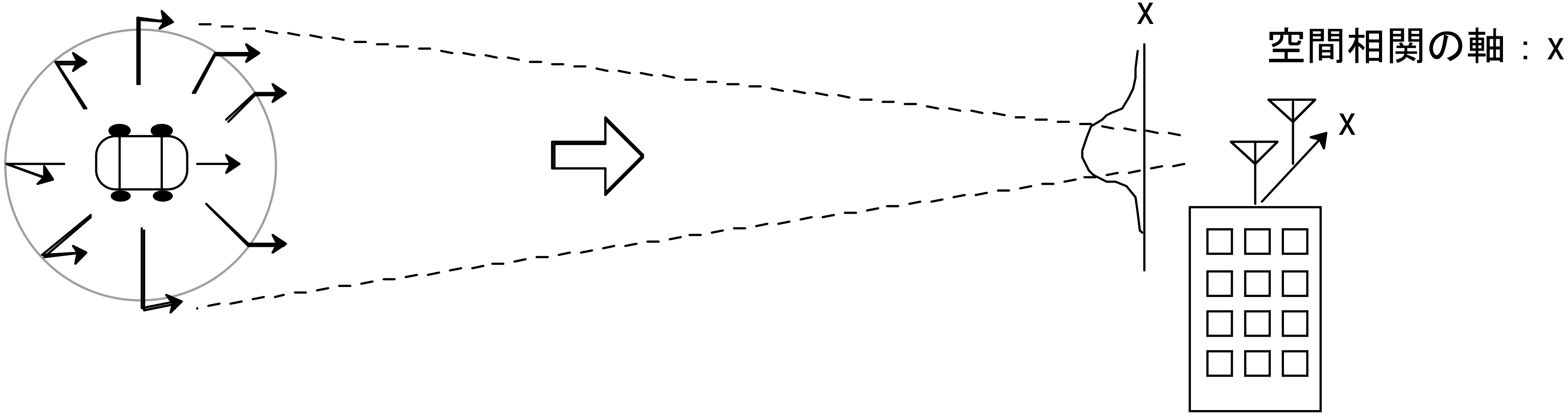
電波伝搬の専門書で
取り上げられている
空間相関はこの形

空間相関特性：移動局と基地局

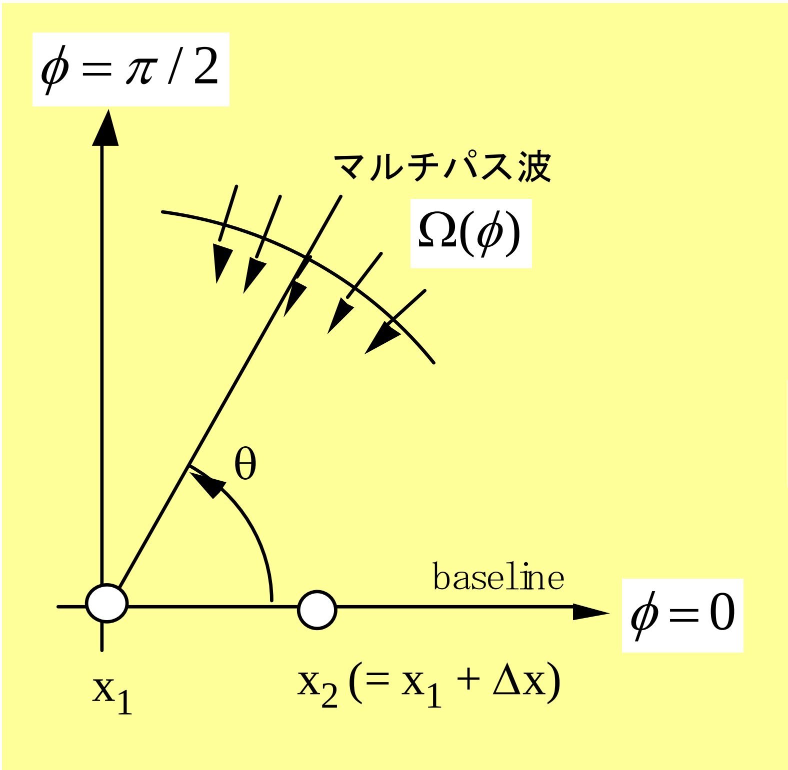
【基地局】

移動局方向を中心と
した正規分布

【移動局】　代表的な角度分布：一様分布



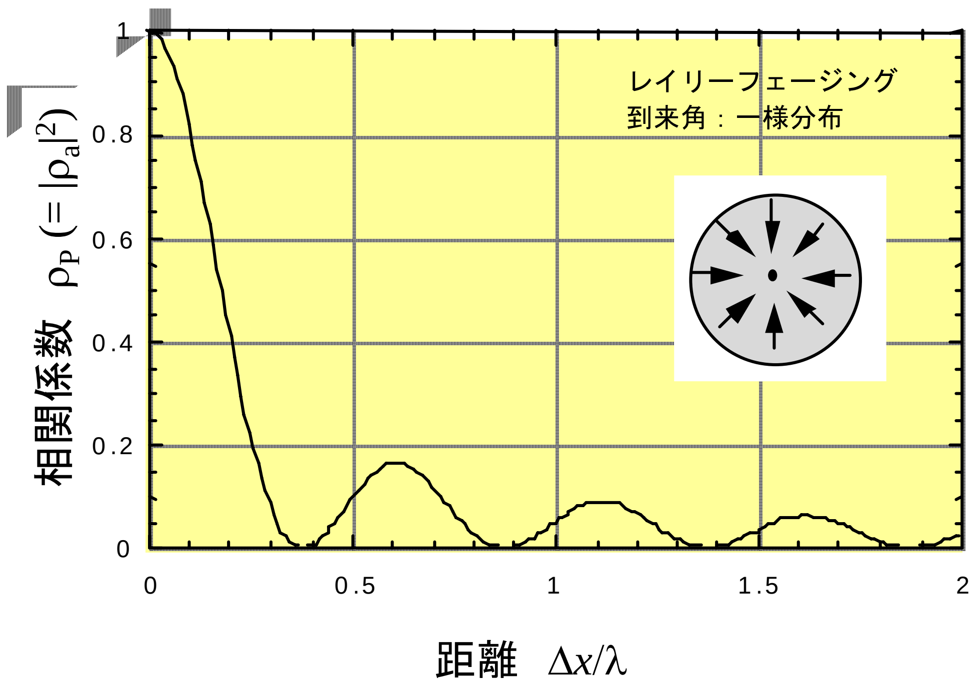
空間相関特性：移動局



$$\rho_a(\Delta x) = \frac{\int_0^{2\pi} \Omega(\phi)\, e^{jk\Delta x \cos\phi} d\phi}{\int_0^{2\pi} \Omega(\phi)\, d\phi}$$

$$\Omega(\phi) = \frac{P_R}{2\pi}$$

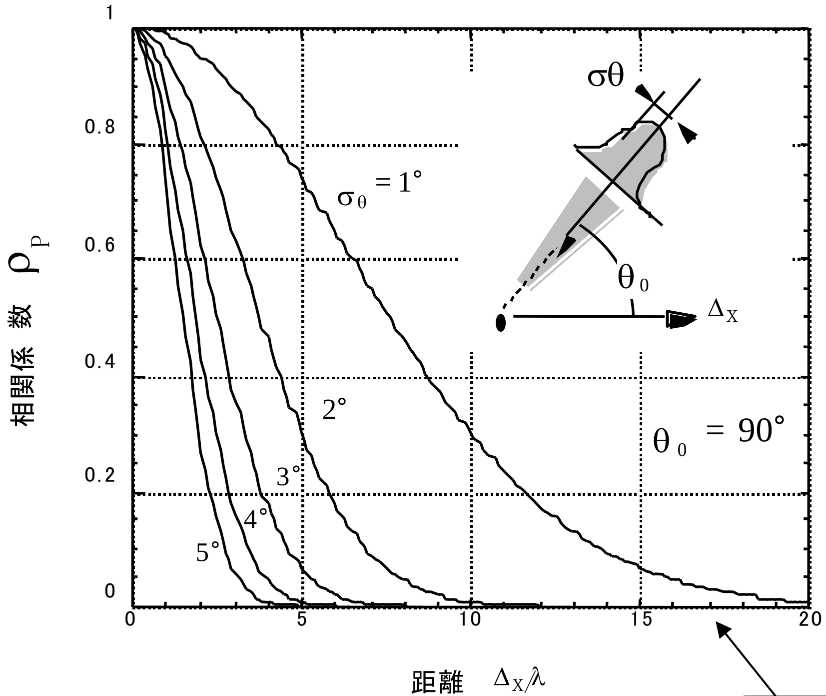
$$\rho_A(\Delta x) \approx \rho_P(\Delta x) = \left| J_0(k\Delta x) \right|^2$$



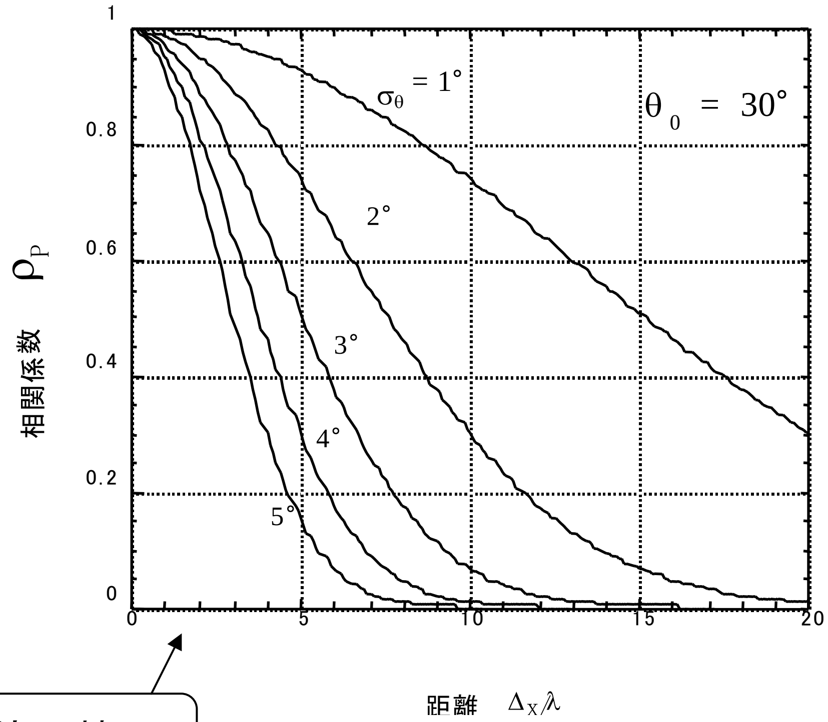
空間相関特性：正規分布型プロファイル（基地局側）

$$\Omega(\phi)=\frac{P_R}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi}\exp\left\{-\frac{(\phi-\phi_0)^2}{2\sigma_\phi^2}\right\}$$

$$\rho_a(\Delta x)=\exp\left\{-\frac{(k\Delta x\sigma_\phi\sin\phi_0)^2}{2}\right\}$$



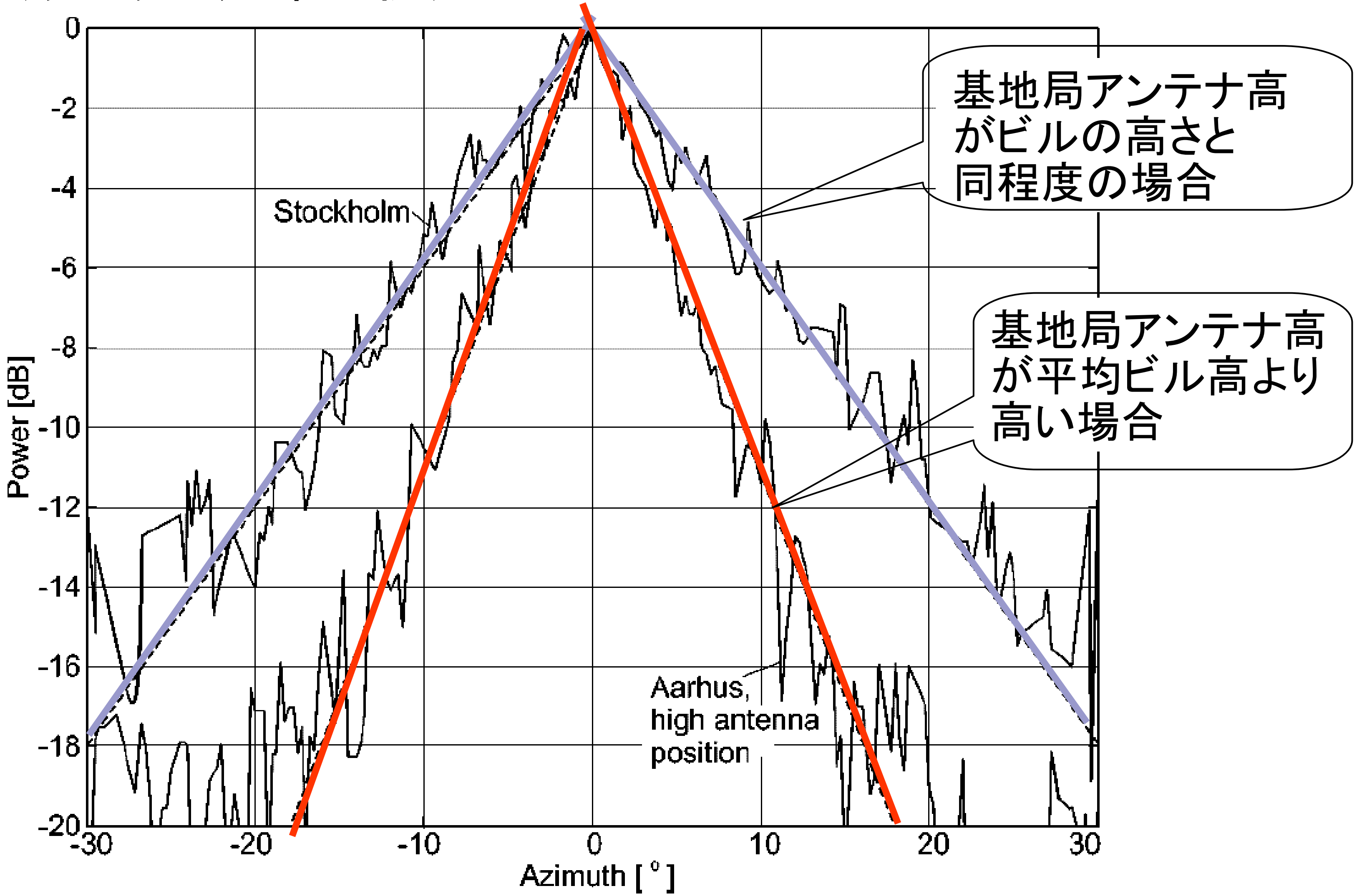
(a) $\phi_0 = 90^\circ$



(b) $\phi_0 = 30^\circ$

(図中のθはφに読み替え)

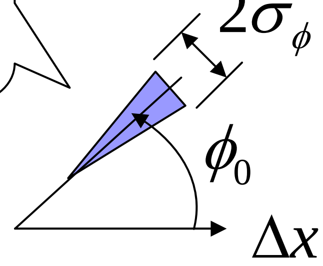
Estimated angular power profiles from measurements
(ラプラス分布の例)



Pedersen et al., IEEE Trans. Vehicul. Tech., vol. 49, no. 2, pp. 437-447, 2000.

角度広がりと空間相関特性の関係

前提条件
$\sigma_\phi << 2\pi$
$\phi_0 \neq 0$



正規分布型角度プロファイル

角度プロファイル

$$\Omega(\phi) \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} \exp\left\{ -\frac{(\phi-\phi_0)^2}{2\sigma_\phi^2} \right\}$$

空間相関

$$\rho_a(\Delta x) = \exp\left\{ jk\Delta x \cos\phi_0 - \frac{(k\Delta x \sigma_\phi \sin\phi_0)^2}{2} \right\}$$

導出の詳細は
唐沢、コロナ社
本の付録3で

ラプラス分布型プロファイル

角度プロファイル

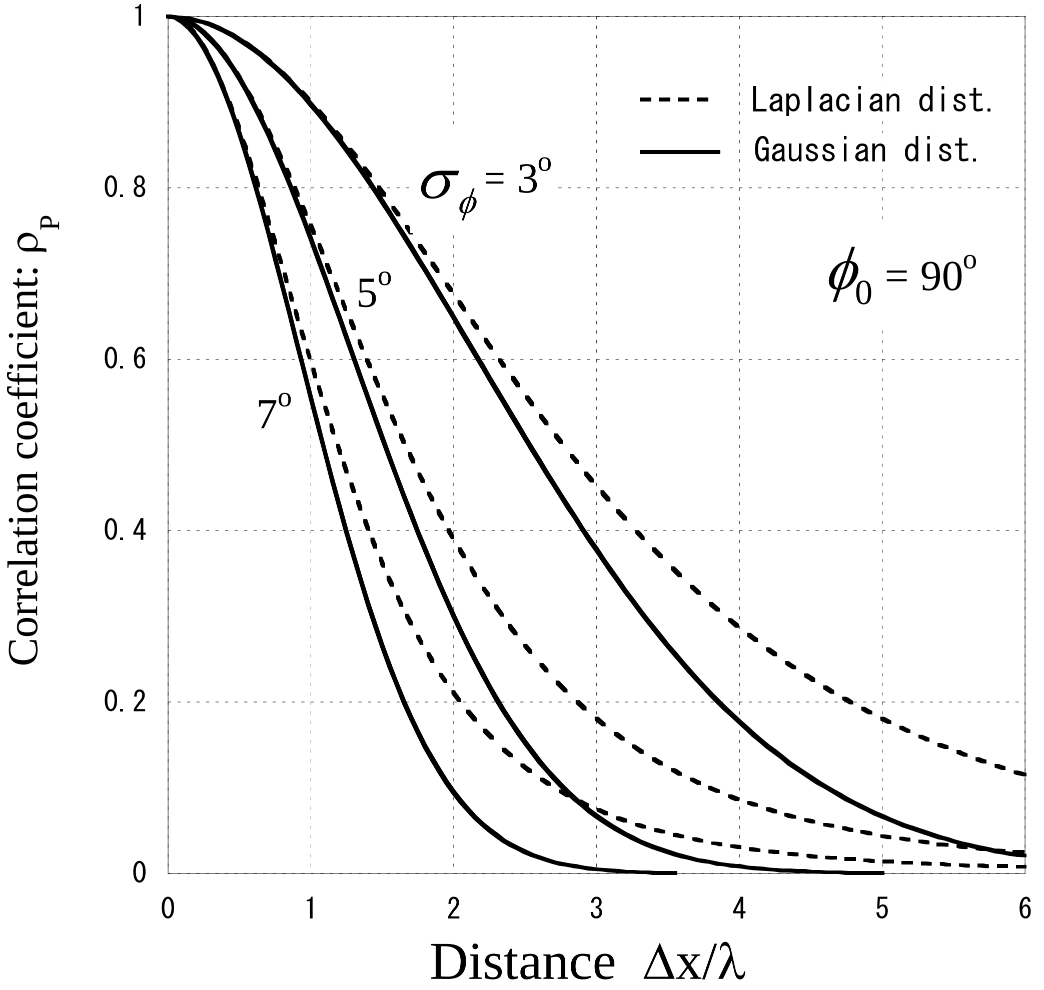
$$\Omega(\phi) \propto \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma_\phi} \exp\left\{ -\frac{\sqrt{2}\left|\phi-\phi_0\right|}{\sigma_\phi} \right\}$$

空間相関

$$\rho_a(\Delta x) \approx \frac{1}{1+\frac{(k\Delta x \sigma_\phi \sin\phi_0)^2}{2}} \exp\left(jk\Delta x \cos\phi_0 \right)$$

正規分布と同じ
手順で得られる
ので、各自で

空間相関特性:　正規分布型とラプラス分布型の違い
（角度広がりの標準偏差（σ_ϕ）共通）



ラプラス分布のほうが
裾を引いているが、
相関係数0.4以下では、
ダイバーシチ効果などは
無相関特性とあまり
変わりはなく、
正規分布の仮定でも
問題になることは
少ないであろう

Y. Karasawa, IEICE Trans. Commun., vol.E90-B, no.3, pp.468-484, 2007.

整理すると

マルチパス環境において

平均受信電力
（実効受信電力）
MEG

空間相関

到来波角度広がりと
アンテナビーム幅との関係

（固有値問題）

3次元到来波、指向性アンテナ受信

水平面到来波、無指向性アンテナ受信

次の章で
詳しく

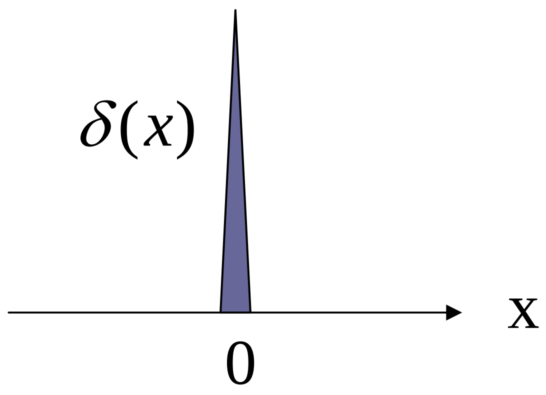
周波数相関

インパルス応答　→　伝達関数　→　周波数相関

電波伝搬環境表現に便利なデルタ関数（Delta function）: δ(x)

定義:　実連続関数 u に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,\delta(x)\,dx = u(0)$$



これより

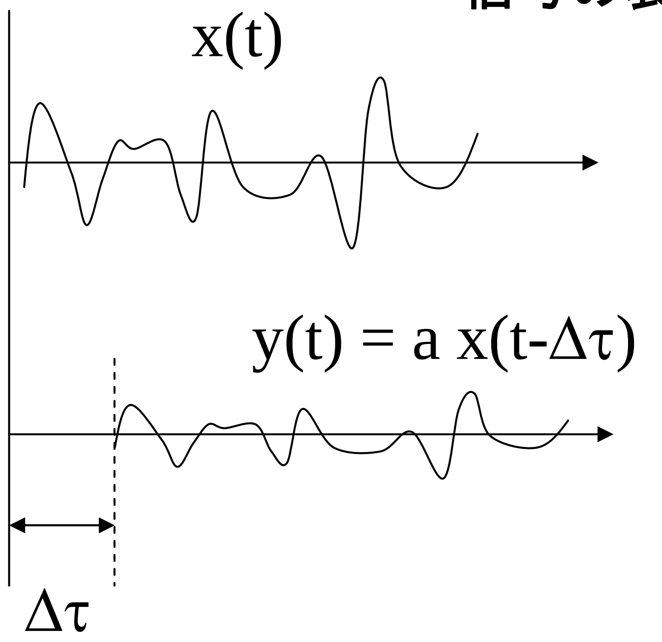
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & for\ x = 0 \\ 0 & for\ x \neq 0 \end{cases}$$

（**Dirac**のデルタ関数と言われる）

振幅変化と時間遅れを伴う信号の表現:　畳み込み積分

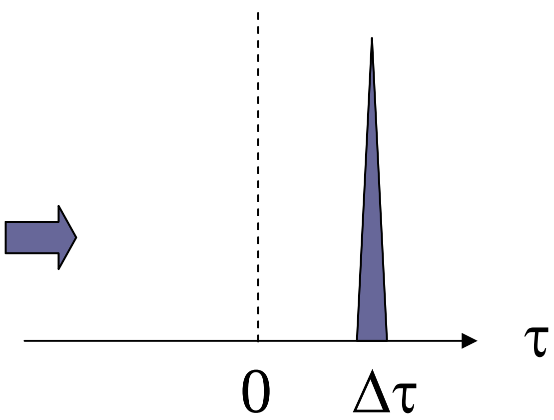
信号の表現



元の信号f(t)が振幅がa倍になり、Δτ だけ遅れる

チャネルの表現

$$h(\tau) = a\,\delta(\tau - \Delta\tau)$$

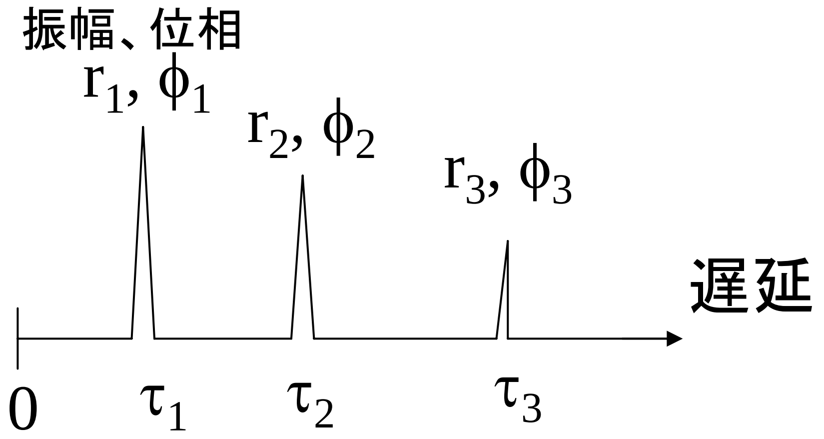


$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau)\, d\tau \quad \left(\equiv h(t) \otimes x(t)\right)$$

$$= a\, x(t - \Delta\tau)$$

畳み込み積分
convolution integral

伝搬と通信信号が
分離された表現



$$y(t) = \boxed{h(t) \otimes x(t)}$$

when

$$h(\tau) = r_1 e^{j\phi_1}\delta(\tau - \Delta\tau_1) + r_2 e^{j\phi_2}\delta(\tau - \Delta\tau_2) + r_3 e^{j\phi_3}\delta(\tau - \Delta\tau_3)$$

$$= \{r_1 e^{j\phi_1}\delta(t - \Delta\tau_1) + r_2 e^{j\phi_2}\delta(t - \Delta\tau_2) + r_3 e^{j\phi_3}\delta(t - \Delta\tau_3)\} \otimes x(t)$$

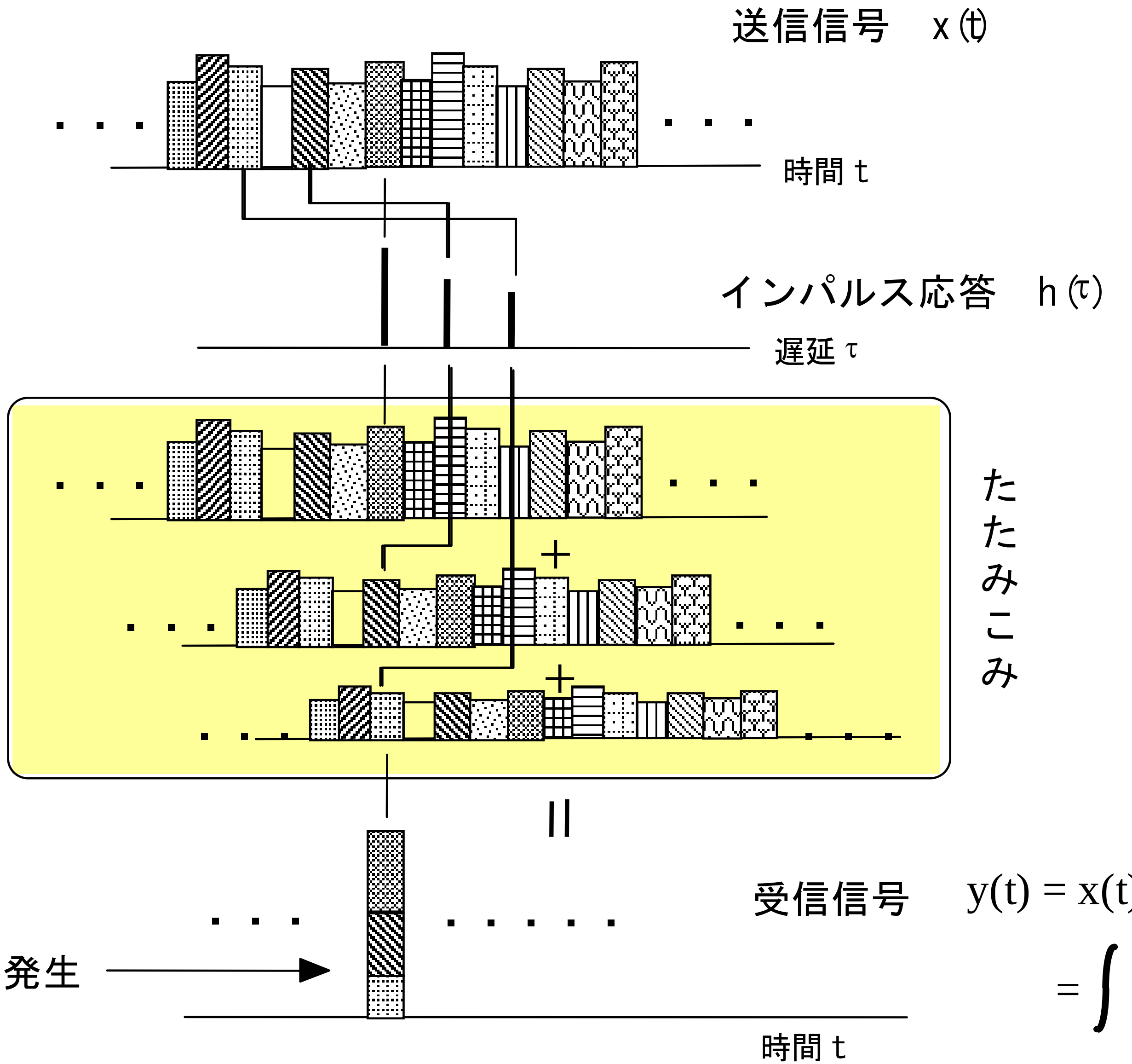
$$= r_1 e^{j\phi_1} x(t - \Delta\tau_1) + r_2 e^{j\phi_2} x(t - \Delta\tau_2) + r_3 e^{j\phi_3} x(t - \Delta\tau_3)$$

when $x(t) = s(t)\cos\omega\, t$

受信信号の実際の形:
伝搬と通信信号が
混ぜこぜになった表現

$$= \boxed{\begin{aligned} & r_1\, s(t - \Delta\tau_1)\cos(\omega\, t + \phi_1) + r_2\, s(t - \Delta\tau_2)\cos(\omega\, t + \phi_2) \\ & + r_3\, s(t - \Delta\tau_3)\cos(\omega\, t + \phi_3) \end{aligned}}$$

畳み込みのイメージ



$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

$$= \int x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

① ある周波数 f_0 で、遅延波 m を見たときの複素振幅: $a_m(f_0)$

チャネル全体の特性は

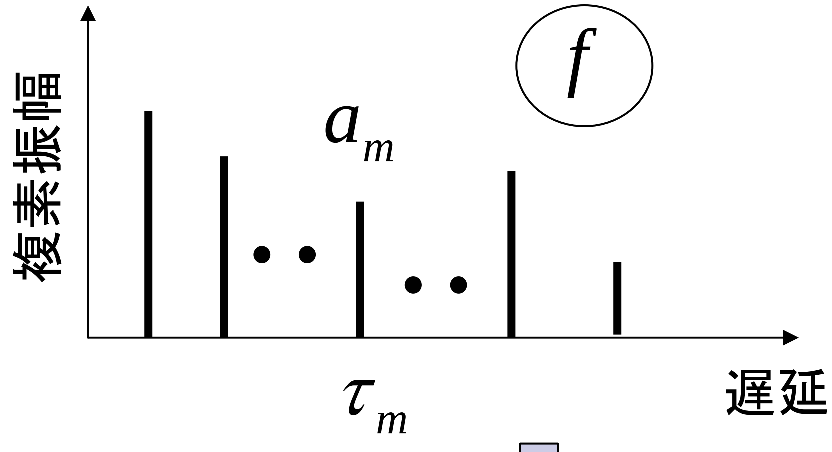
$$T(f_0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f_0)$$

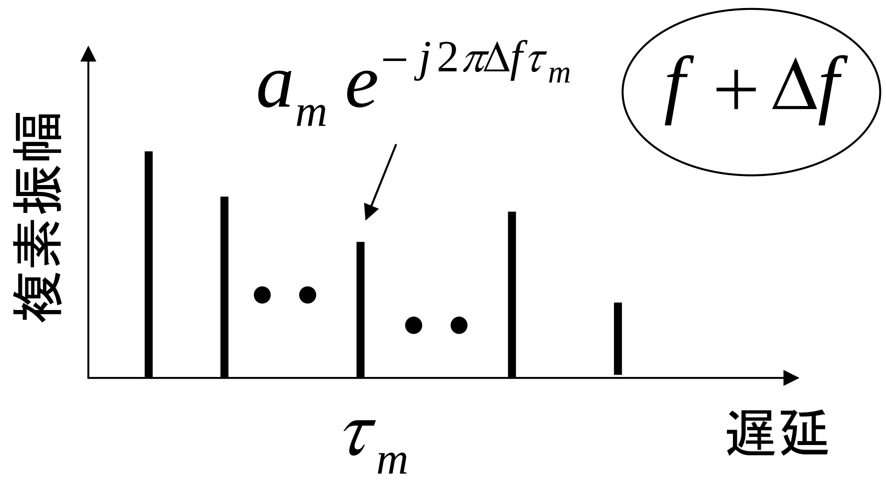
② 周波数 $f_0+\Delta f$で、遅延波 m を見たときの複素振幅:

$$a_m(f_0+\Delta f) = a_m(f_0)e^{-j2\pi\Delta f\tau_m}$$

チャネル全体の特性は

$$T(f_0+\Delta f) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f_0)e^{-j2\pi\Delta f\tau_m}$$





周波数がΔf だけずれると
位相が$-2\pi\Delta f\tau_m$だけずれる

周波数相関

$$\rho_a(\Delta f) = \frac{\left\langle T^*(f)T(f+\Delta f)\right\rangle}{\left\langle \left|T(f)\right|^2 \right\rangle}$$

周波数伝達関数 T は、
チャネルのインパルス応答の
フーリエ変換で求められる

$$= \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \left\langle \left|a_m\right|^2 \right\rangle e^{-j2\pi\Delta f \tau_m}}{\sum_{m=1}^{\infty} \left\langle \left|a_m\right|^2 \right\rangle}$$

WSSUSの仮定を導入
（遅延波mとm’ $(m \neq m')$ の
変動は無相関）

$$= \frac{\int_0^{\infty} p(\tau) e^{-j2\pi\Delta f \tau} \, d\tau}{\int_0^{\infty} p(\tau) \, d\tau}$$

遅延プロファイル p(τ) で表すと
周波数相関は、遅延プロファイルの
フーリエ変換であることが分かる

WSSUS: 移動通信の伝搬理論の基礎となる仮定

Wide-Sense Stationary Uncorrelated Scattering

WSS: 広義定常 + US: 無相関散乱

狭義定常(NSS):

任意の時間をスタートとしてサンプルしたデータの統計的性質(確率密度関数やや各種モーメントの期待値)がスタート時間によらない確率過程

広義定常(WSS):

統計的性質の内、平均値と自己相関特性(二乗平均、分散を含む)がスタート時間によらない確率過程

無相関散乱(US):

マルチパス素波の振幅・位相変動は素波毎に伝搬劣化を受ける場所が異なり、お互いに無相関。どんなに到来角度が近くても、遅延の値が近くても無相関であるとみなす概念

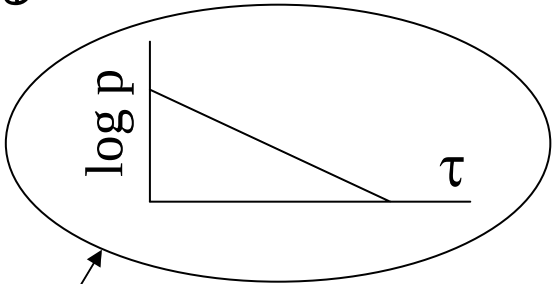
遅延プロファイルから周波数相関特性を求める

周波数相関

遅延プロファイル

遅延τ の信号は、遅延0の信号の位相に比べて、周波数がΔf代わると-2πΔfτだけ位相が変わる

$$\rho_a(\Delta f) = \frac{\int_0^{\infty} p(\tau)\exp(-j2\pi\Delta f\tau)\,d\tau}{P_R}$$



$$p(\tau) = \frac{P_R}{\sigma_\tau}\exp\left(-\frac{\tau}{\sigma_\tau}\right)$$ ← 遅延プロファイル:指数関数型

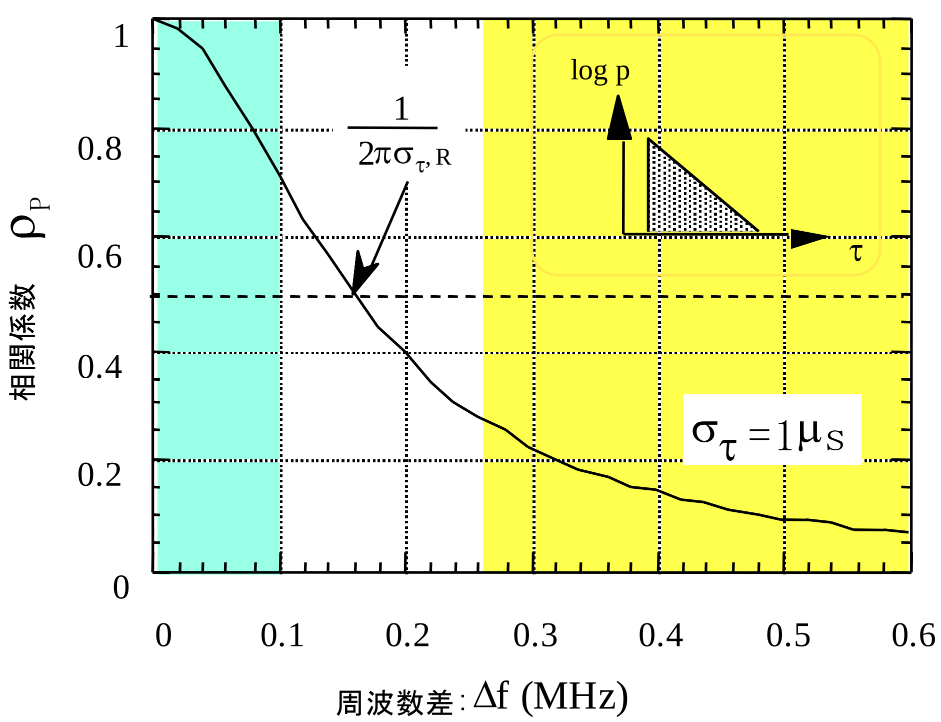
$$\rho_a(\Delta f) = \frac{1 - j2\pi\Delta f\sigma_\tau}{1 + (2\pi\Delta f\sigma_\tau)^2}$$ ← **周波数相関係数:複素振幅**

$$\rho_P(\Delta f) = \frac{1}{1 + (2\pi\Delta f\sigma_\tau)^2}$$ ← 周波数相関係数:電力変動

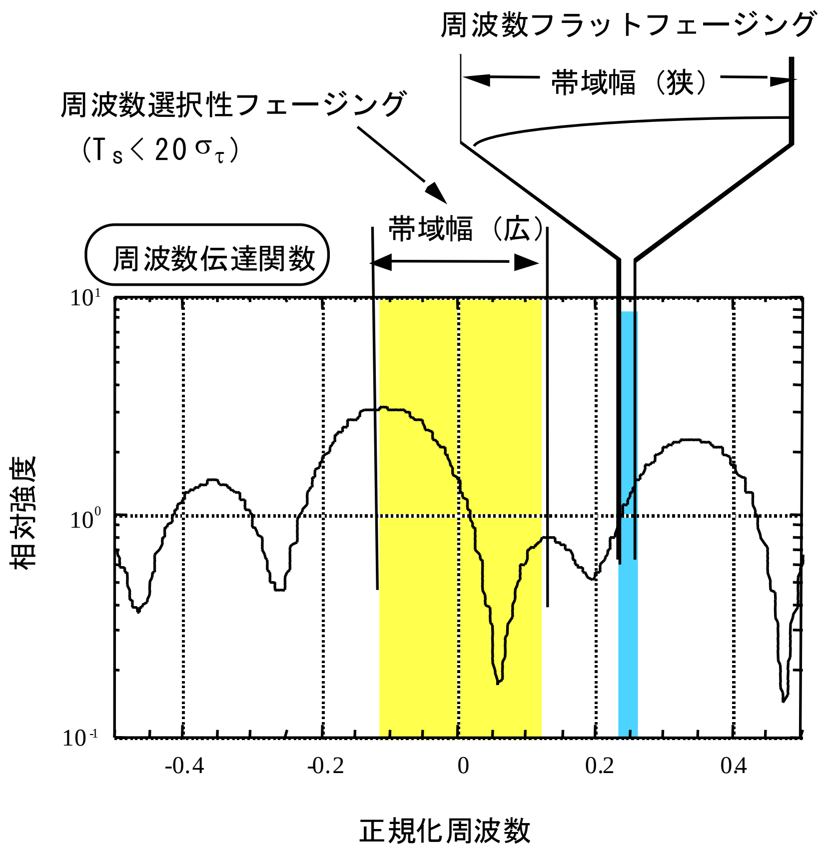
$$B = \frac{1}{2\pi\sigma_\tau}$$ ← 相関帯域幅

周波数相関特性

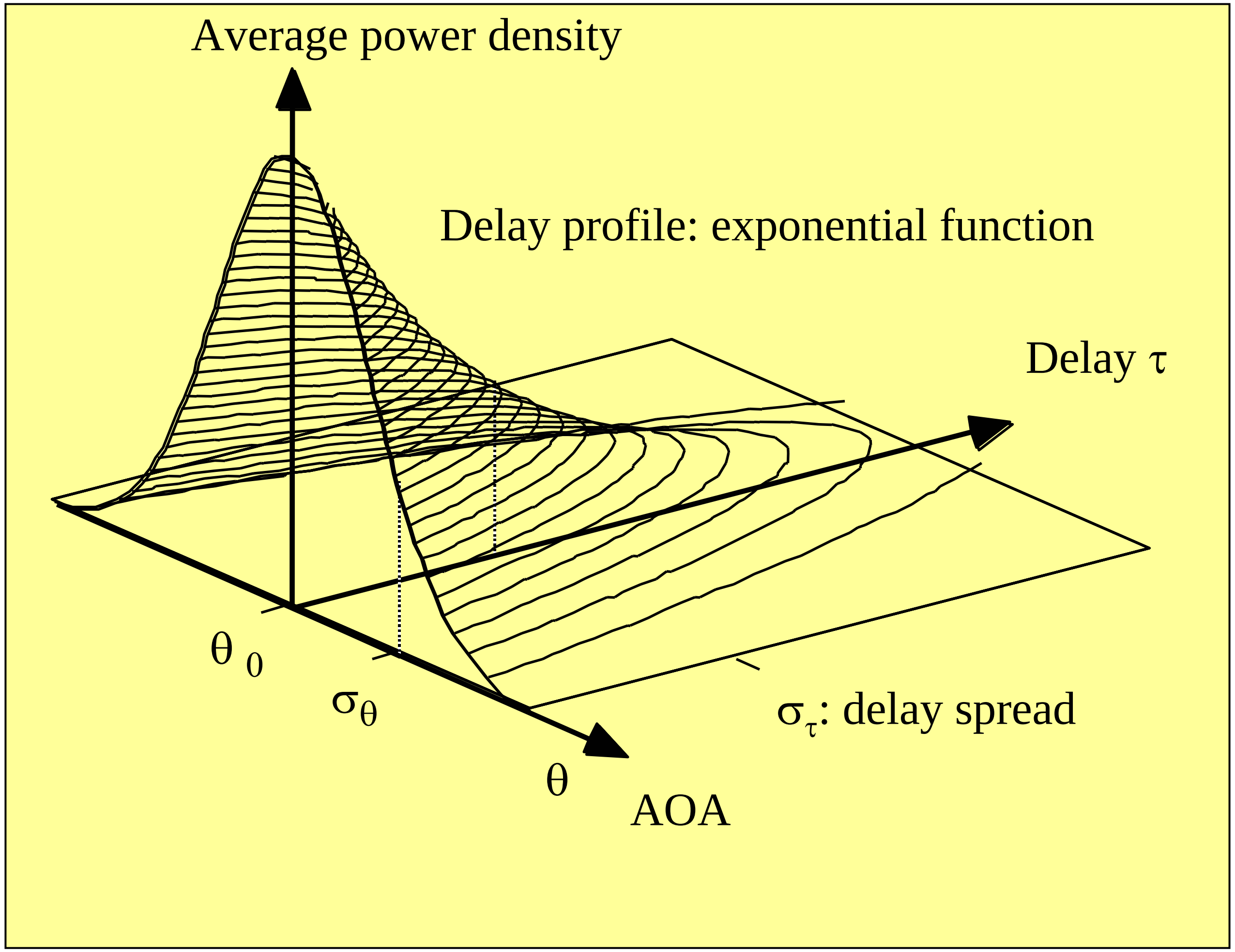
指数関数型遅延プロファイルの例



伝達関数で見ると？



時空間伝搬チャネルモデル（基本モデル）



遅延プロファイル: p(τ)
（指数関数型）

角度プロファイル: Ω(θ)
（移動局：一様分布
基地局：正規分布型
又はラプラス分布型）

時空間モデル

$$p(\tau,\theta)=p(\tau)\,\Omega(\theta)$$

マルチセンサー受信（Multi-Output ）における

相関行列 （Correlation Matrix）

共分散行列 （Covariance Matrix）

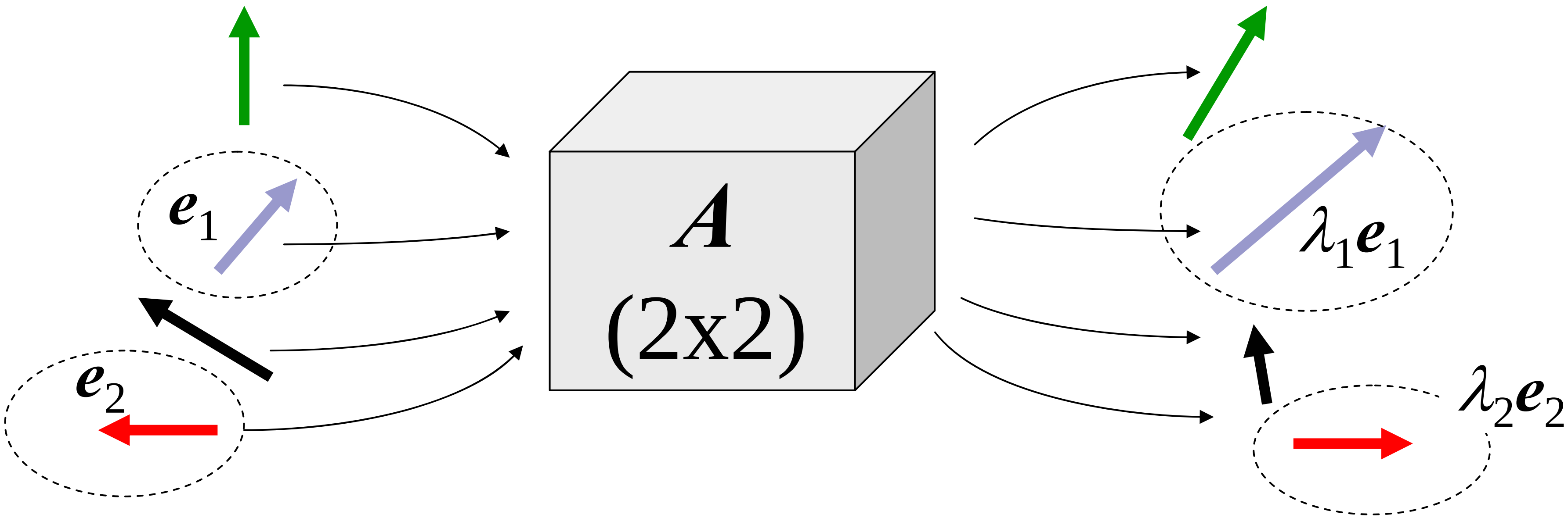
伝搬情報の宝庫

固有値と固有ベクトル

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e} = \lambda \boldsymbol{e}$$

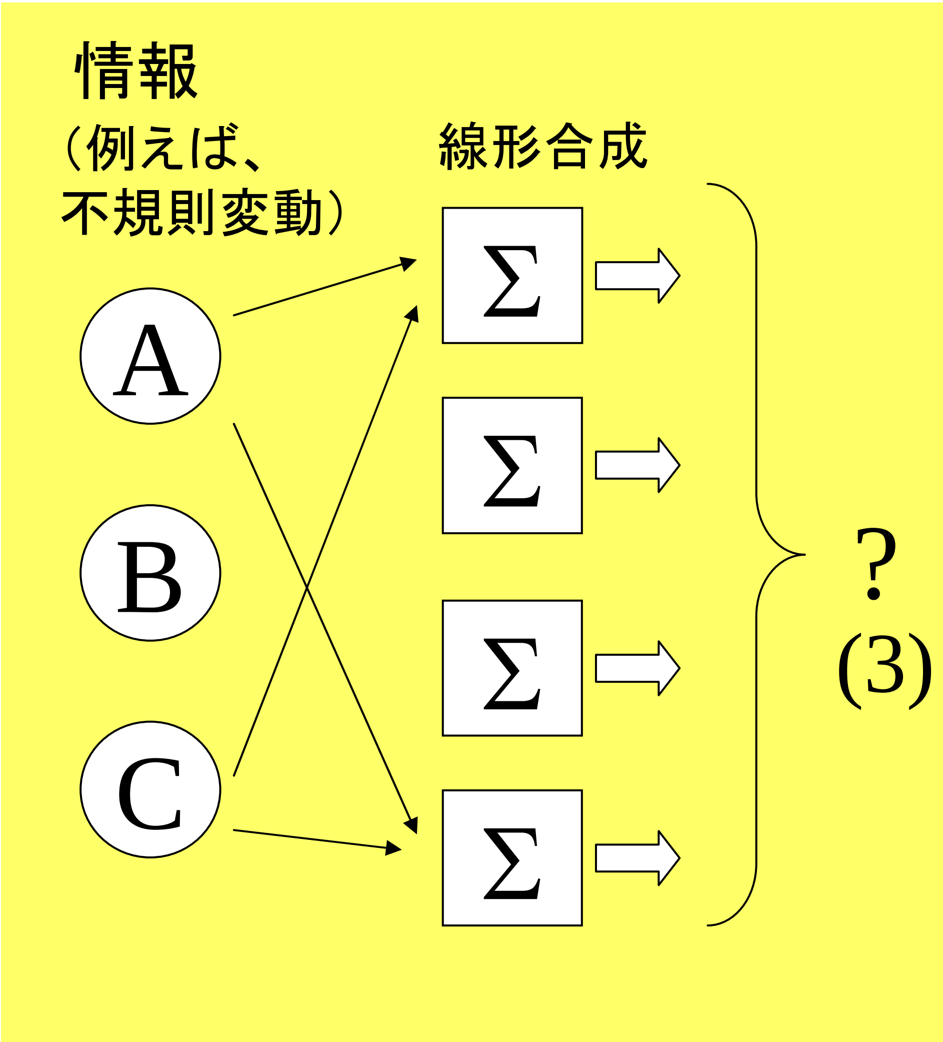
λ : 行列Aの固有値（スカラー値）
$\boldsymbol{e}$: 固有値 λ に属する固有ベクトル

NxNの行列Aの固有値は重根も、複素数根も含めてN個ある
（固有方程式（N次の方程式）を解けば求められる）

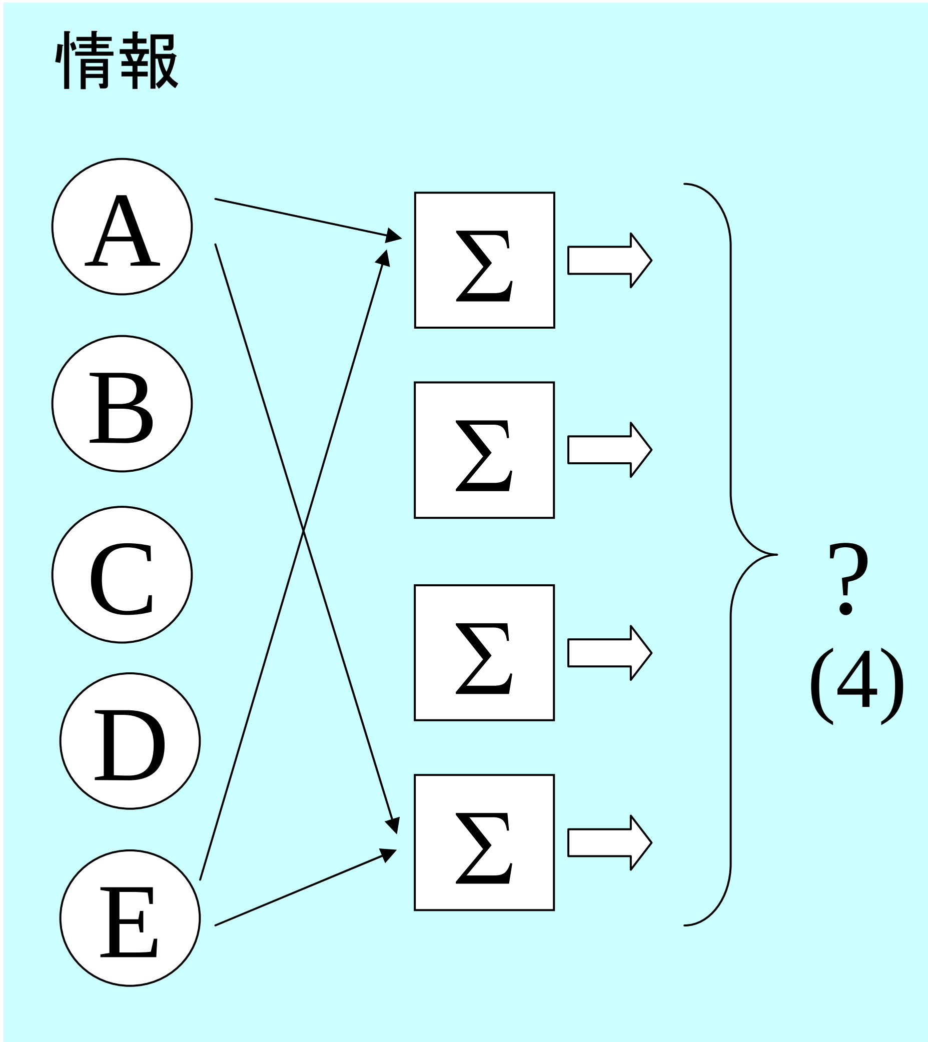


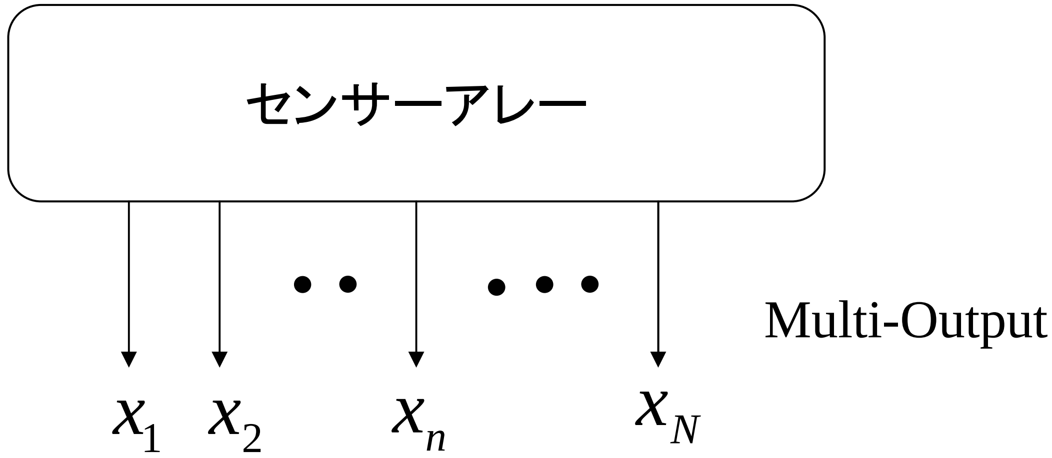
固有値の数 = 独立な情報の数？

(case 1)



(case 2)





相関行列
（ポート間の相互相関関係を表す行列）

$$\boldsymbol{R}_{xx} = \left\langle \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}} \right\rangle = \begin{pmatrix} \left\langle x_1 x_1^{\mathrm{H}} \right\rangle & \left\langle x_1 x_2^{\mathrm{H}} \right\rangle & \cdots & \left\langle x_1 x_N^{\mathrm{H}} \right\rangle \\ \left\langle x_2 x_1^{\mathrm{H}} \right\rangle & \left\langle x_2 x_2^{\mathrm{H}} \right\rangle & \cdots & \left\langle x_2 x_N^{\mathrm{H}} \right\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\langle x_N x_1^{\mathrm{H}} \right\rangle & \left\langle x_N x_2^{\mathrm{H}} \right\rangle & \cdots & \left\langle x_N x_N^{\mathrm{H}} \right\rangle \end{pmatrix}$$

エルミート行列
$(\boldsymbol{R}_{xx} = \boldsymbol{R}_{xx}^{\mathrm{H}})$

$$\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_N)^{\mathrm{T}}$$

エルミート行列の性質

固有値

$$\boldsymbol{R}_{xx}\,\boldsymbol{e} = \lambda\,\boldsymbol{e}$$

固有ベクトル

$$\begin{array}{cccc} \lambda_1, & \lambda_2, & \cdots, & \lambda_N \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \boldsymbol{e}_1, & \boldsymbol{e}_2, & \cdots, & \boldsymbol{e}_N \end{array}$$

(1) $\mathbf{R}_{xx}$がNxNの行列では、固有値はN個ある

(2) 固有値は全て実数である

（相関行列の場合は、0を含む正の値になる。なぜか？）

(3) 固有ベクトルは、お互いに直交する（＝内積が0）

(4) 含まれる信号の中の独立な情報の数KがK<Nであれば、

0でない固有値の数はKである。

$$\boldsymbol{R}_{xx} = \left\langle \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}} \right\rangle = \begin{pmatrix} \langle x_1 x_1^{\mathrm{H}} \rangle & \langle x_1 x_2^{\mathrm{H}} \rangle & \cdots & \langle x_1 x_N^{\mathrm{H}} \rangle \\ \langle x_2 x_1^{\mathrm{H}} \rangle & \langle x_2 x_2^{\mathrm{H}} \rangle & \cdots & \langle x_2 x_N^{\mathrm{H}} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_N x_1^{\mathrm{H}} \rangle & \langle x_N x_2^{\mathrm{H}} \rangle & \cdots & \langle x_N x_N^{\mathrm{H}} \rangle \end{pmatrix}$$

有相関な
変動(**x**)

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{x}$$ 固有ベクトル変換

（Karhunen-Loeve (KL)変換）

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_N \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_{yy} = \left\langle \boldsymbol{y}\,\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}} \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{E}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{E} \right\rangle$$

$$= \boldsymbol{E}^{\mathrm{H}} R_{xx} \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix}$$

無相関な
変動(**y**)に
変換

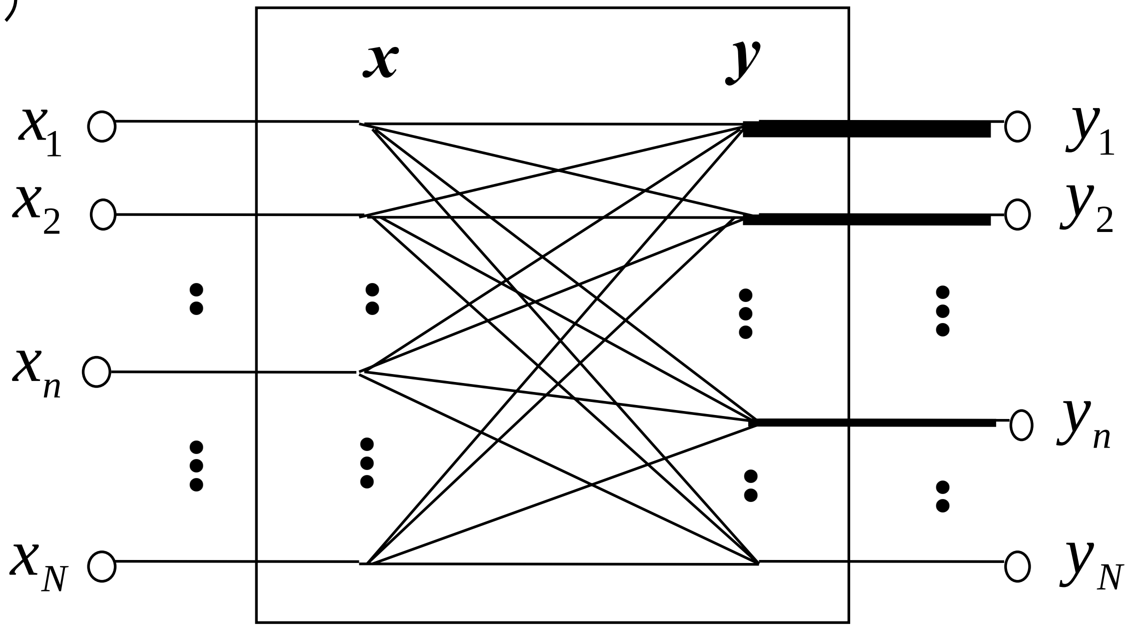
固有値の値に大小ができ、
独立性が弱められている
ことがわかる

多次元正規分布の最後のところで述べた①の変換との関係（同じことのはず？）を調べてみよう

相関を有する信号の直交化:固有ベクトル変換

(アンテナ等からの
ブランチ出力)

$y_n = \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{H}} \boldsymbol{x}$ (固有ベクトル変換)



入力ポートの
平均電力が
等しい場合は
出力ポートの
平均電力は
固有値に比例

信号間に相関がある変動
(解析が一般に難しい)

信号間に相関がない変動
(解析が一般に容易)

本質的なことは、変換前後で何も変わってはいない

講演内容

1. 広帯域ディジタル移動通信と電波伝搬
   (通信の高速化に立ちはだかる電波伝搬の壁)

2. マルチパス伝搬モデルに現れる確率分布
   (正規分布から仲上m分布まで，その関連と物理的意味)

3. 相関行列と固有値
   (相関行列は伝搬情報の宝庫：その固有値が意味するものとは)

4. **スペースダイバーシチにおける固有値問題**
   (アレーアンテナから見える伝搬環境に対する景色)

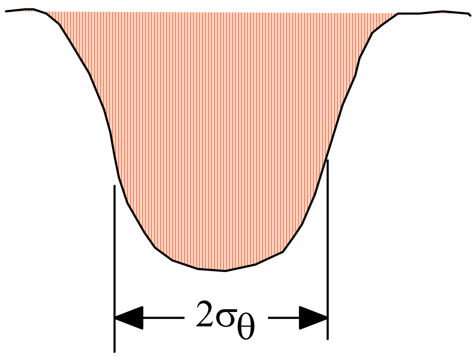
5. 空間相関と周波数相関のアナロジー
   (広帯域信号の電力変動特性を，固有値問題として解く)

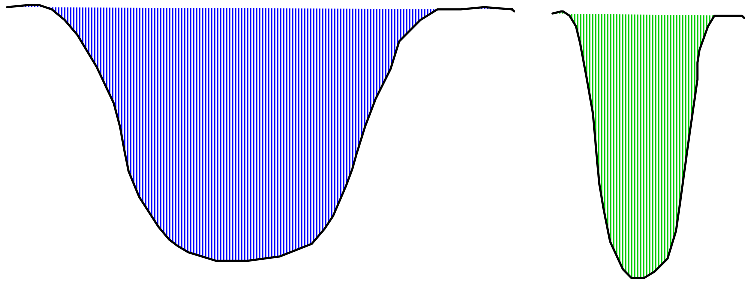
6. MIMOチャネル表現
   (次節の議論のための必要最小限のまとめ)

7. MIMO-OTA測定環境構築への考察
   (環境構築に具備すべき本質的なことは何か)

角度的に広がりがあるマルチパス環境において、アレーアンテナは
いくつの波を認識できるか？ （→スペースダイバーシチ効果の理論解析）

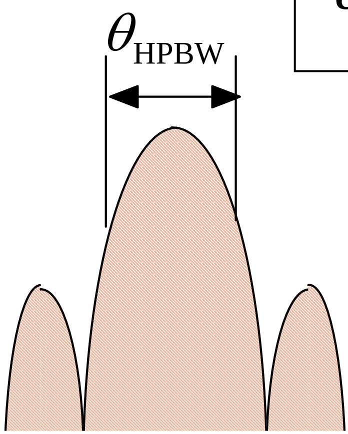
到来角度プロファイル

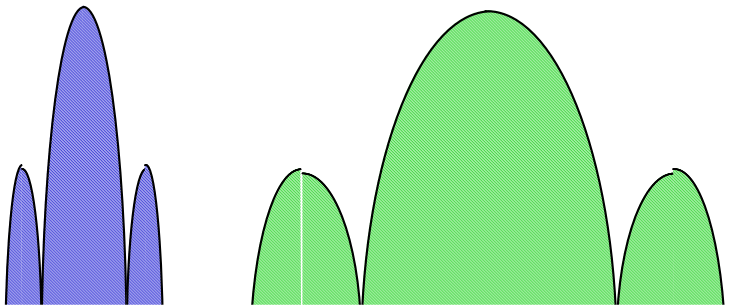




$$\alpha \equiv 2\sigma_\theta / \theta_{\mathrm{HPBW}}$$

$\alpha >> 1$ $\alpha << 1$





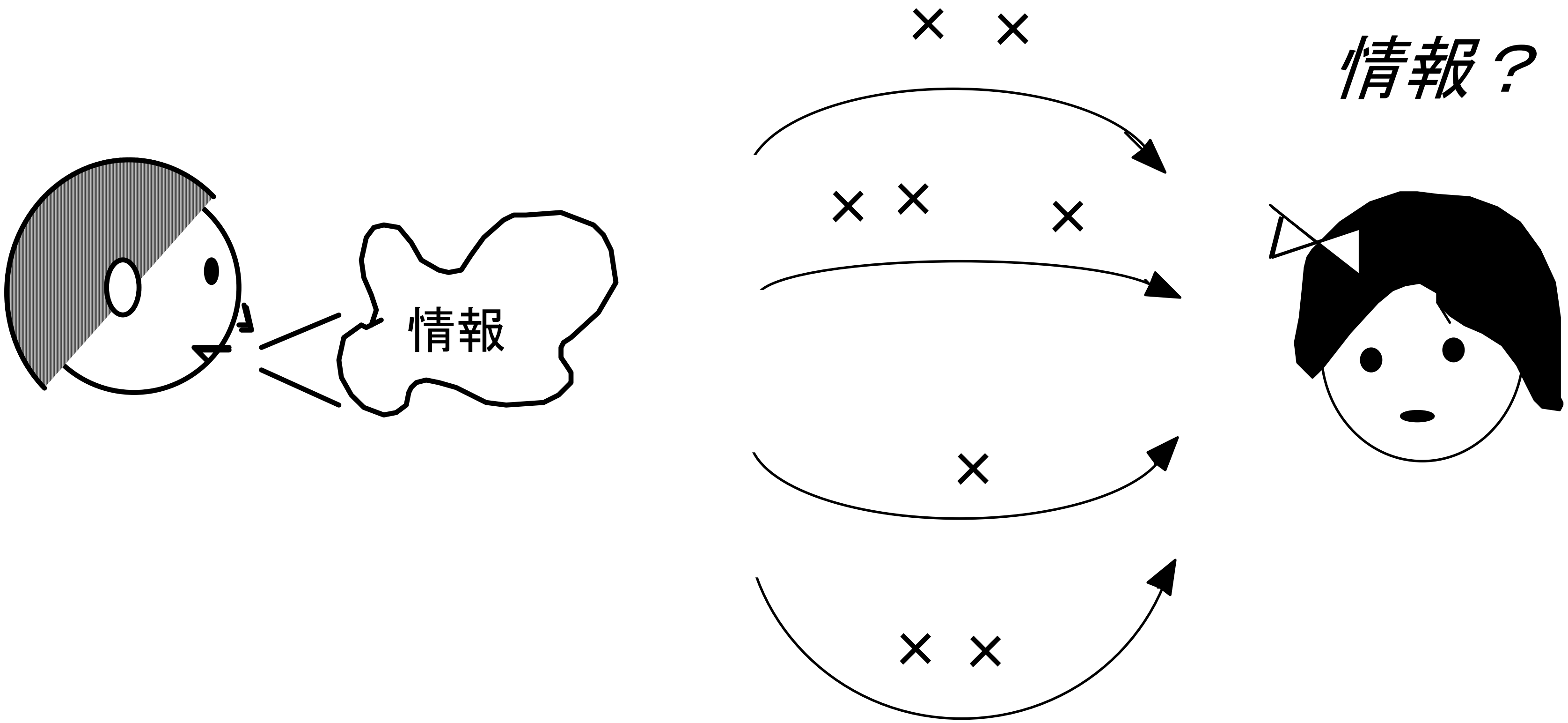
アンテナパターン
（N素子アレーアンテナ）

ダイバーシチの理論

- ダイバーシチとは
- ダイバーシチの分類
- 合成法
- 最大SNR受信を実現するには
- ブランチ間に相関のある信号のダイバーシチ効果

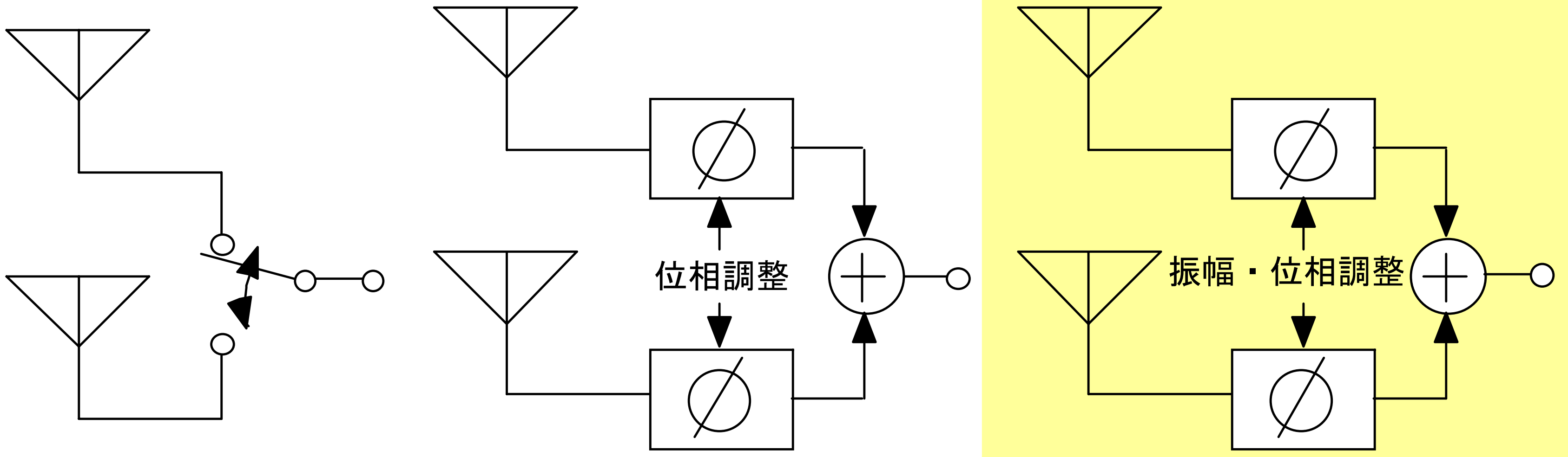
最大比合成ダイバーシチの理論を通じて、電波伝搬とアレーアンテナとの関わりを理解する

ダイバーシチとは



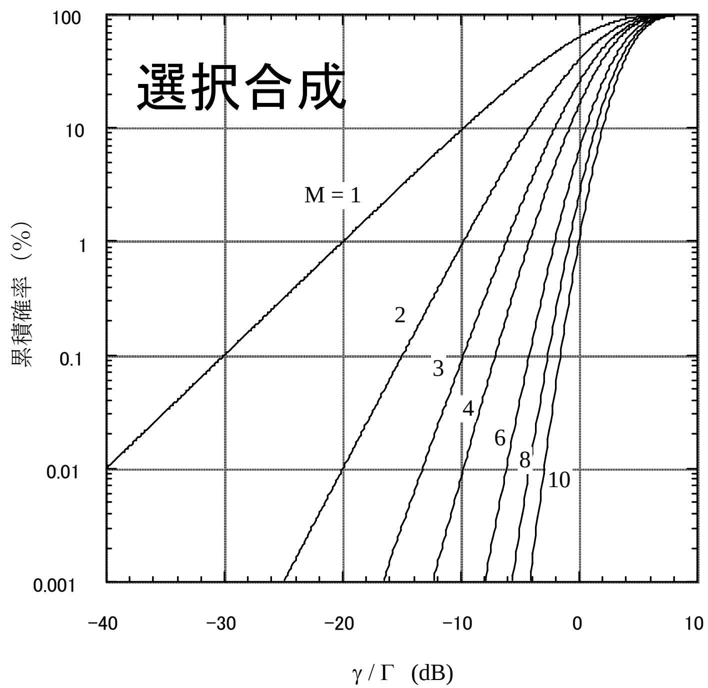
通路：ブランチ

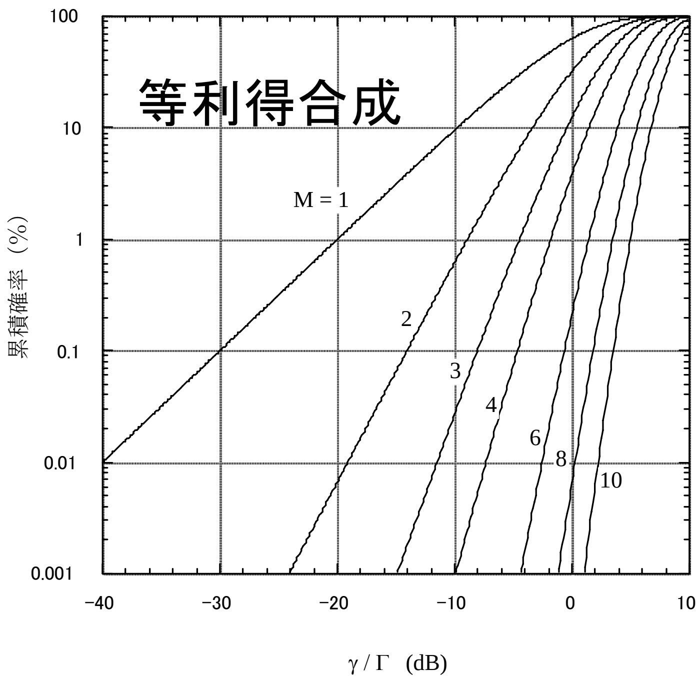
ダイバーシチの合成法

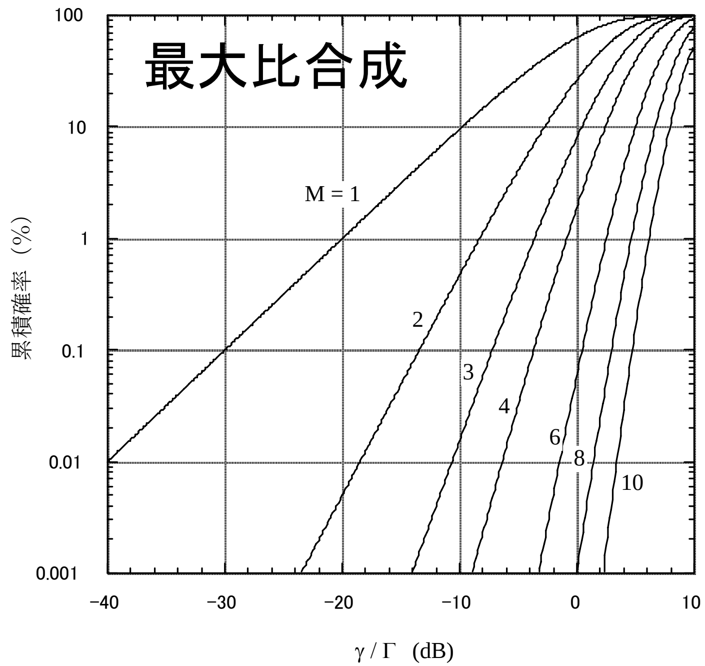


[選択合成法]　[等利得合成法]　[最大比合成法]

３つの合成法の
ダイバーシチ効果

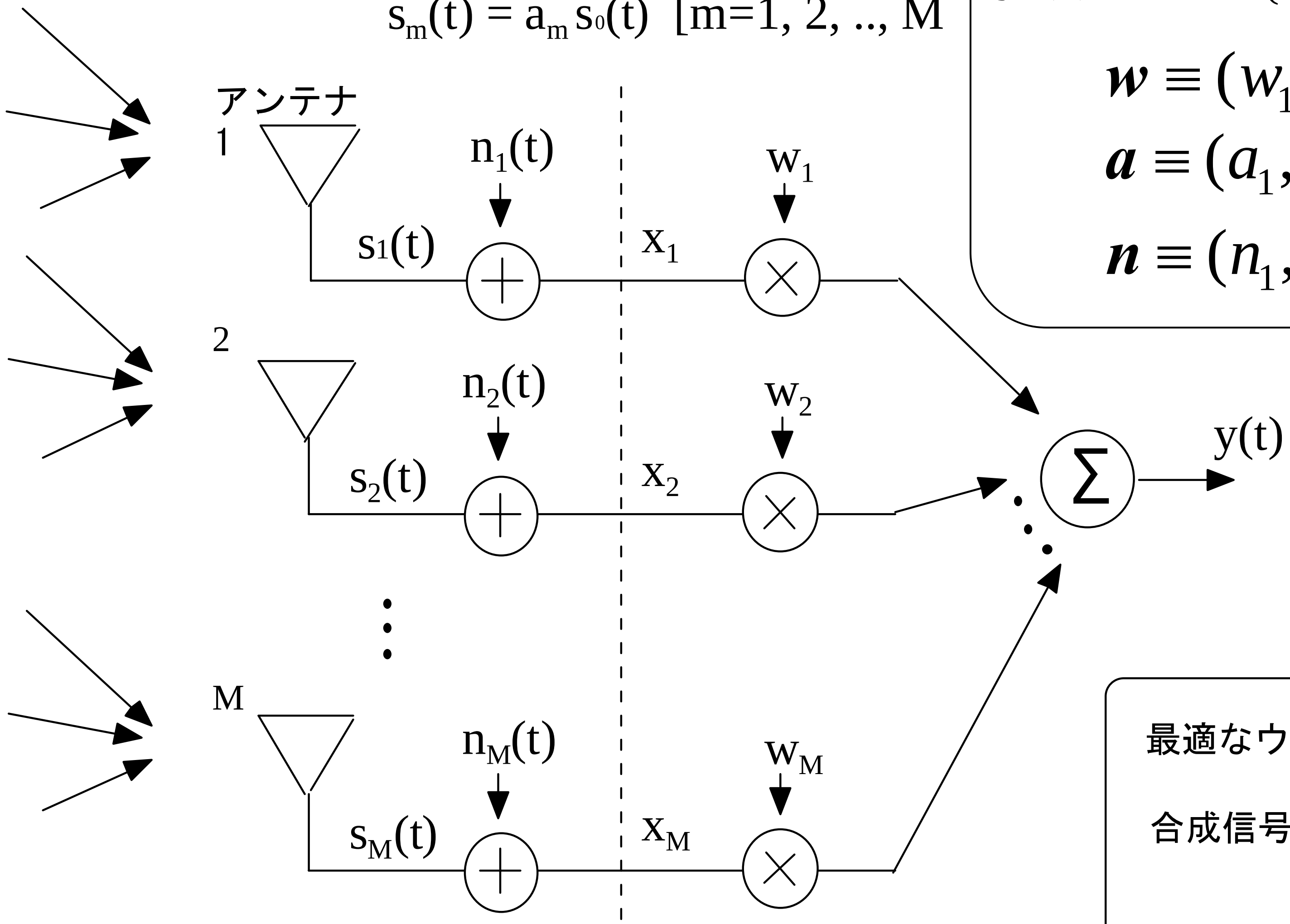






スペースダイバーシチの原理：信号の合成

$s_m(t) = a_m s_0(t)$ [m=1, 2, .., M]



ベクトル表現

$$y(t) = \boldsymbol{w}^H \{\boldsymbol{a}\, s_0(t) + \boldsymbol{n}(t)\}$$

$$\boldsymbol{w} \equiv (w_1, w_2, \cdots, w_M)^T$$

$$\boldsymbol{a} \equiv (a_1, a_2, \cdots, a_M)^T$$

$$\boldsymbol{n} \equiv (n_1, n_2, \cdots, n_M)^T$$

最適なウェイトは？

合成信号のSNRの
確率分布は？

最適なウェイトは？

$$y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{w} \propto \mathbf{a}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix}$$

信号の強さ（複素振幅）に
比例するウェイトで合成すると
最大SNRが得られる

【最大比合成法】

この時の合成信号のSNRは？

各ブランチ信号のSNRの和になる

最大比合成 (Maximal Ratio Combining: MRC)の理論

合成信号 $y(t) = \boldsymbol{w}^H (\boldsymbol{a}\, s_0(t) + \boldsymbol{n}(t))$

付帯条件 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{w} = 1$

$$P_{\text{signal}} = \left\langle \left| s_0(t) \right|^2 \right\rangle = 1$$

$$P_{\text{noise}} = \left\langle \left| n_m(t) \right|^2 \right\rangle = n^2$$

MRCの説明のしかたは、
いろいろあるが
この講義では、
ベクトル解析で行う

平均受信電力

$$\left\langle \left| y(t) \right|^2 \right\rangle = \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H \boldsymbol{w}\, P_{\text{signal}} + P_{\text{noise}}$$

受信SNR

$$SNR = \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H \boldsymbol{w}\, \frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{noise}}}$$

受信SNRの最大化

$$SNR = \boxed{\boldsymbol{w}^H \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H \boldsymbol{w}} \boxed{\frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{noise}}}}$$

最大化したい量　一定値

条件付最大化問題解法の常套手段:ラグランジュの未定乗数法

$$g = \underbrace{\boldsymbol{w}^H \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H \boldsymbol{w}}_{\text{最大化したい量}} + \lambda \underbrace{(1 - \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{w})}_{\text{条件式}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{w}} = 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H \boldsymbol{w} - 2\lambda \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$$

$$R_{aa}\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{w} \quad \left(R_{aa} \equiv \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H\right)$$

この最大化問題は、
結局は
固有値問題になる

最適ウェイトと合成後のSNR

$$R_{aa}\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{w} \quad \left(R_{aa} \equiv \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H \right)$$

⇩ 固有値問題に帰着

$$\lambda = \boldsymbol{a}^H \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\lambda}}$$

チャネル特性に比例

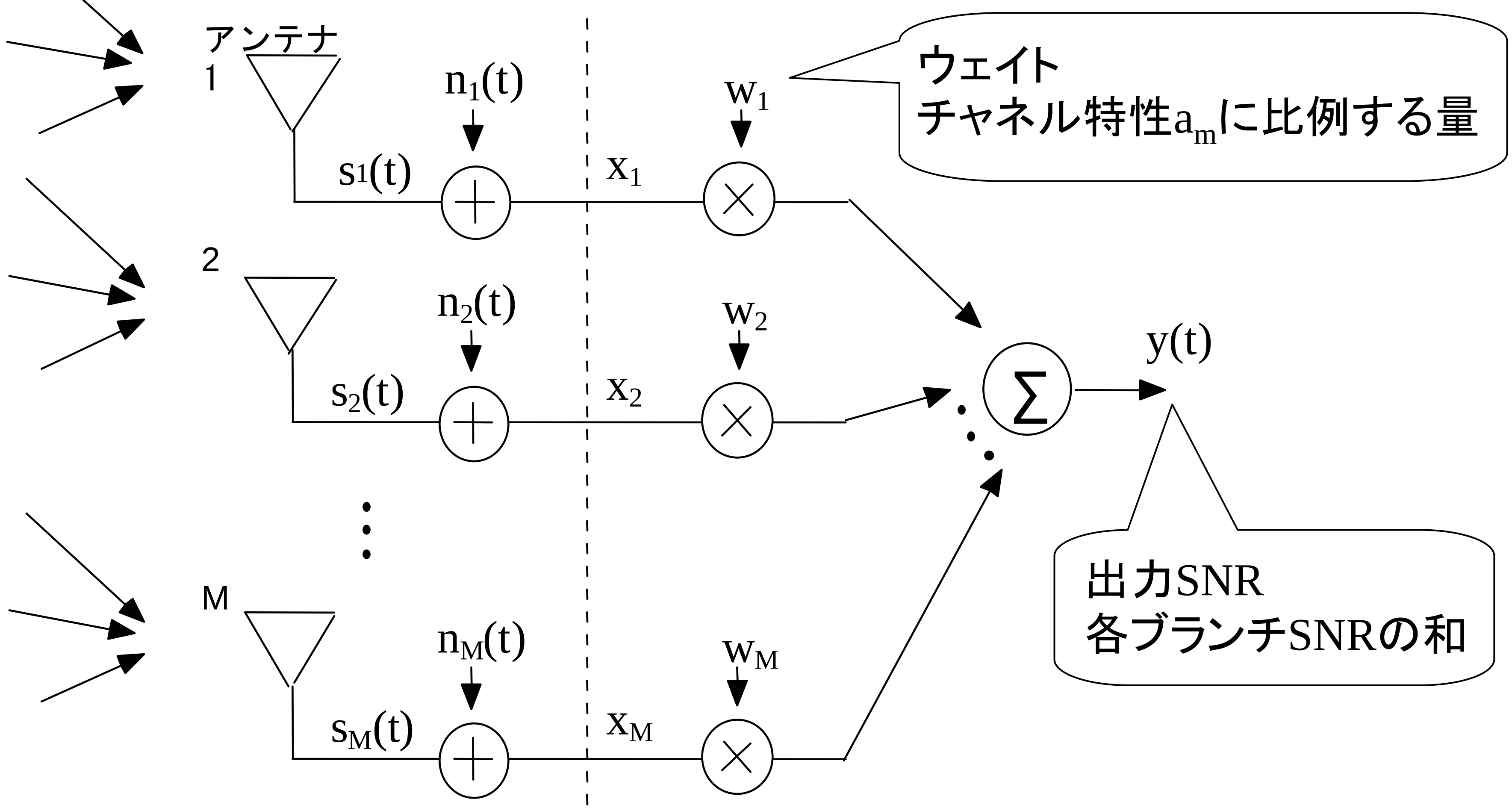
合成SNRは（最大）固有値λ、
それを実現するウェイトはその固有ベクトル**e**

各ブランチのSNRの和になる

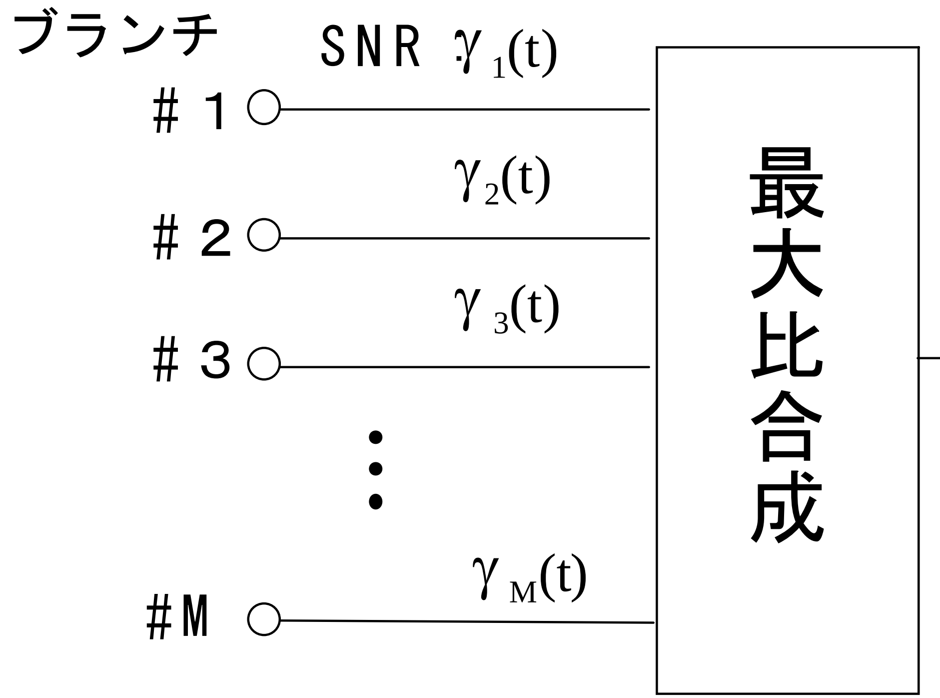
$$SNR_{MRC} = \left(|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_M|^2 \right) \frac{P_{signal}}{P_{noise}}$$

MRCの結論

$s_m(t) = a_m s_0(t)$ [m=1, 2, .., M



レイリーフェージング環境下での最大比合成後のSNRの確率分布



γ_m:平均値 Γ_m の指数分布 (m=1,2,・・・M)

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) + \cdots + \gamma_M(t)$$

確率分布?

- ブランチ信号のSNRの確率分布は?
- 平均SNR :Γ_mが同じか違うか?
- ブランチ間の相関があるかないか?

振幅変動の確率分布と電力（あるいはSNR）変動の確率分布の関係

振幅（r）の変動

［レイリー分布］

$$z = r^2$$

$$z \rightarrow P_R, \gamma$$

電力（P_R）、SNR（γ）
の変動

［指数分布］

$$f_z(z) = \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f_z(z) = f_r\{r(z)\}\,\frac{dr}{dz}$$

$$= \frac{1}{\Gamma}\exp\left(-\frac{z}{\Gamma}\right)$$

（Γ：zの平均値）

最大比合成後のSNRの確率分布:
Case 1:変動が独立でかつΓ_mが等しい場合

最大比合成後のSNR :γ

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) + \cdots + \gamma_M(t)$$

ブランチSNRのPDF $f_m(\gamma_m;\Gamma) = \frac{1}{\Gamma}\exp\left(-\frac{\gamma_m}{\Gamma}\right)$ 指数分布

合成後SNRのPDF $f(\gamma;\Gamma,M) = \frac{1}{(M-1)!}\frac{\gamma^{M-1}}{\Gamma^M}\exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma}\right)$ ガンマ分布

Case 2
変動に相関のあるブランチ信号の最大比合成

その対象となる電波環境は？

最大比合成後のSNRの確率分布は？

解析の方法

相関のあるブランチ信号を無相関のブランチ信号になるように変換する(**固有ベクトル変換**)。

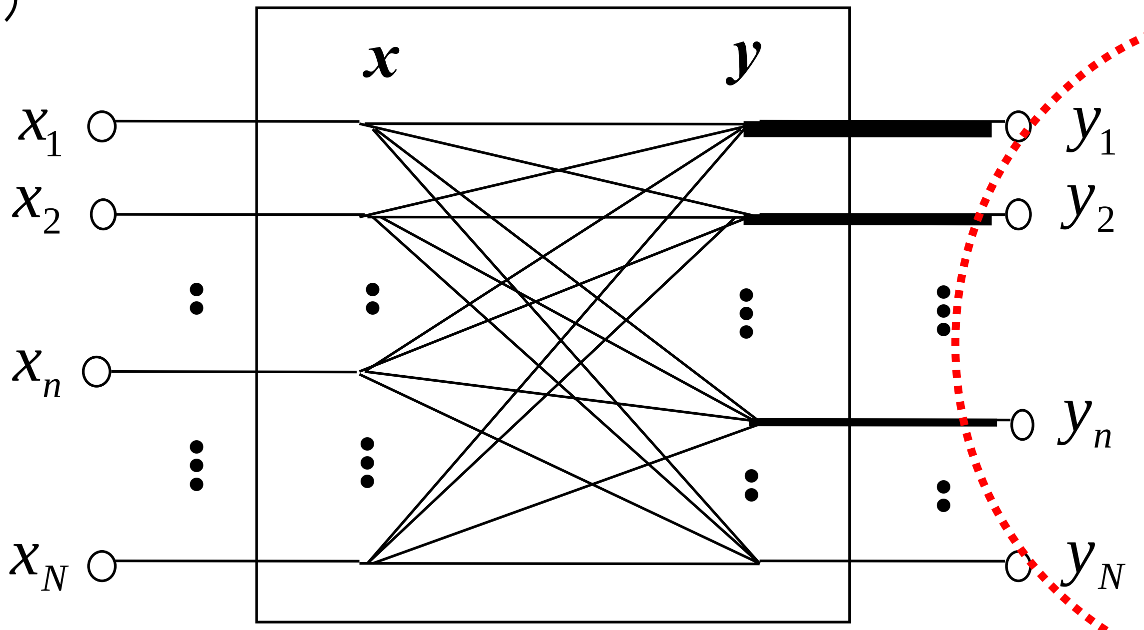
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{x}$$

このとき、変換後のブランチ信号は電力に差が生じるが、
無相関であることによって、簡単に分布の理論式が得られる。

相関を有する信号の直交化：固有ベクトル変換（再掲）

（アンテナ等からの
ブランチ出力）

$$y_n = \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{H}} \boldsymbol{x}$$ （固有ベクトル変換）



入力ポートの
平均電力が
等しい場合は
出力ポートの
平均電力は
固有値に比例

信号間に相関がある変動
（解析が一般に難しい）

信号間に相関がない変動
（解析が一般に容易）

本質的なことは、変換前後で何も変わってはいない

ブランチ間に相関がある場合の合成信号SNRの確率分布

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) + \gamma_3(t) + \cdots + \gamma_M(t)$$

（γ_m: ブランチmのSNR）
平均値が固有値に比例し、
独立な指数分布をする

特性関数

$$\varphi(t) = \prod_{m=1}^{M} \frac{1}{1 - j\Gamma_m t}$$

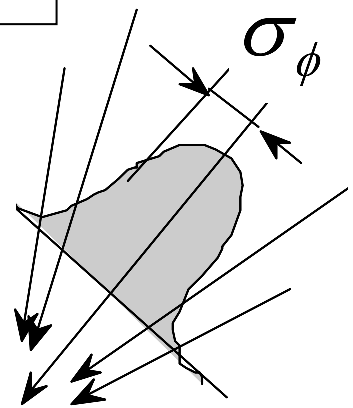
$$f(\gamma) = \frac{1}{\prod_{m=1}^{M} \Gamma_m} \sum_{m=1}^{M} \frac{\exp(-\gamma / \Gamma_m)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{M} \left(\frac{1}{\Gamma_k} - \frac{1}{\Gamma_m} \right)}$$

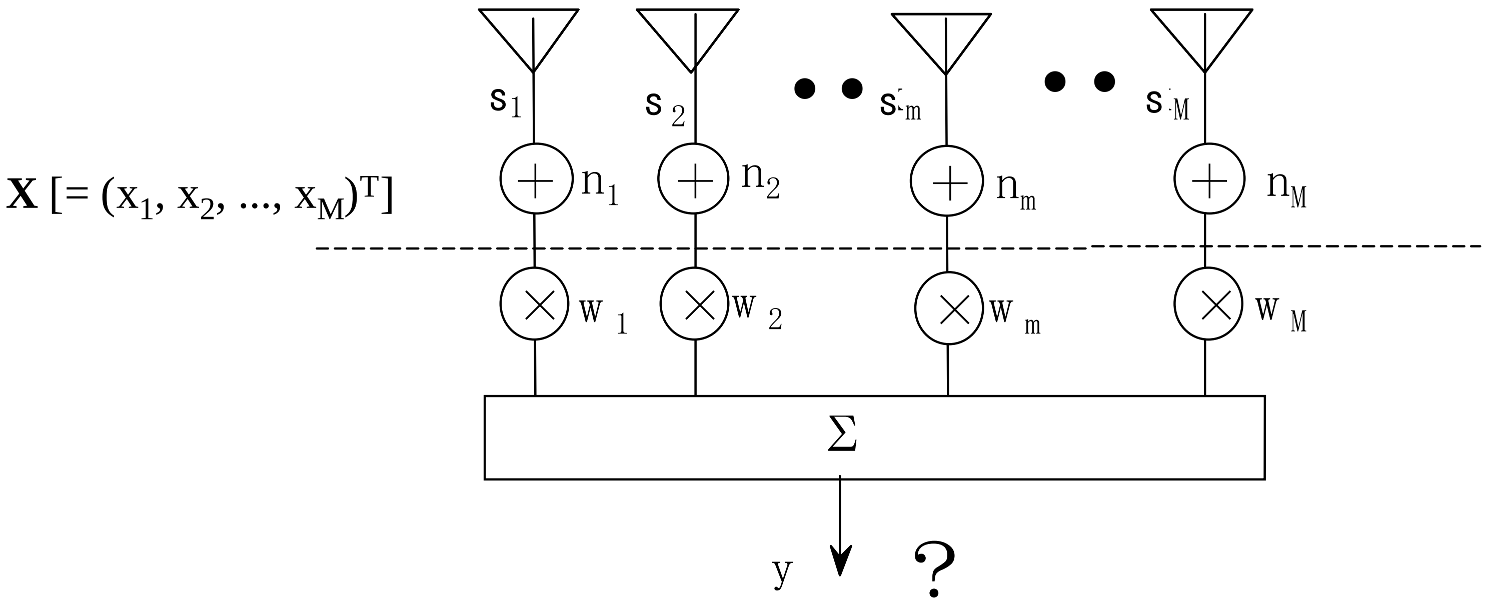
$$\Gamma_m = \langle \gamma_m \rangle$$

角度広がりのある到来波群は
アレーアンテナにはどう見えるか？

ブランチ間に相関がある場合とは？

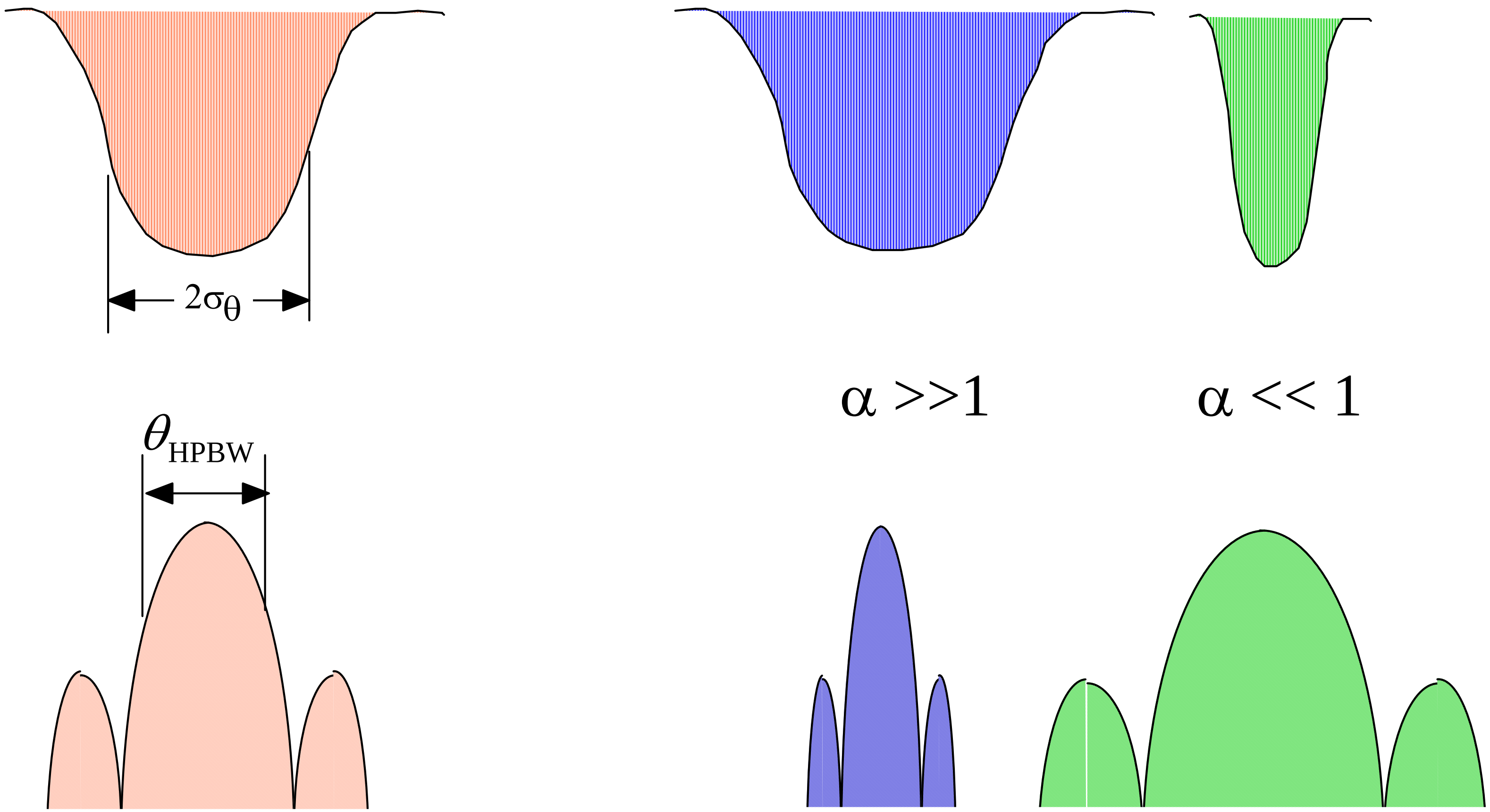
比較的狭い角度範囲に広がりを持って到来する多数の素波で構成されるマルチパス環境（遅延の広がりは無視できる程に小さい）





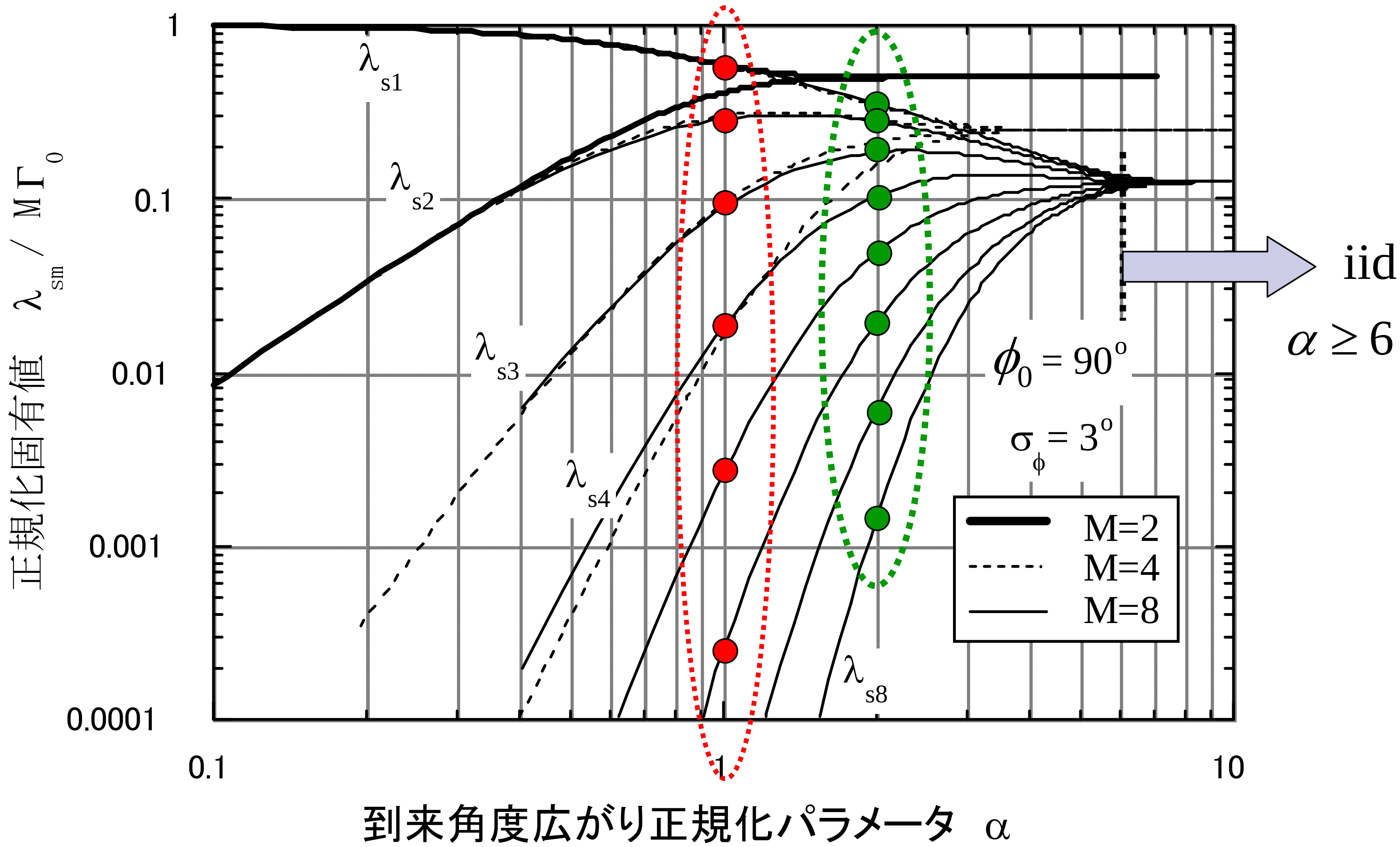
到来角度の広がりを表す正規化パラメータ $\alpha \equiv 2\sigma_\theta / \theta_{\mathrm{HPBW}}$

到来角度プロファイル



アンテナパターン
（N素子アレーアンテナ）

固有値と正規化到来角度広がりの関係



Inoue et al., IEICE Trans. Commun., vol. E83-B, no.7, 2000.07

ブランチ間に相関がある場合（＝到来波の角度広がりが十分大きくない場合）の合成信号SNRの確率分布

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) + \gamma_3(t) + \cdots + \gamma_M(t)$$

（γ_m: ブランチmのSNR）
平均値が固有値に比例し、
独立な指数分布をする

特性関数

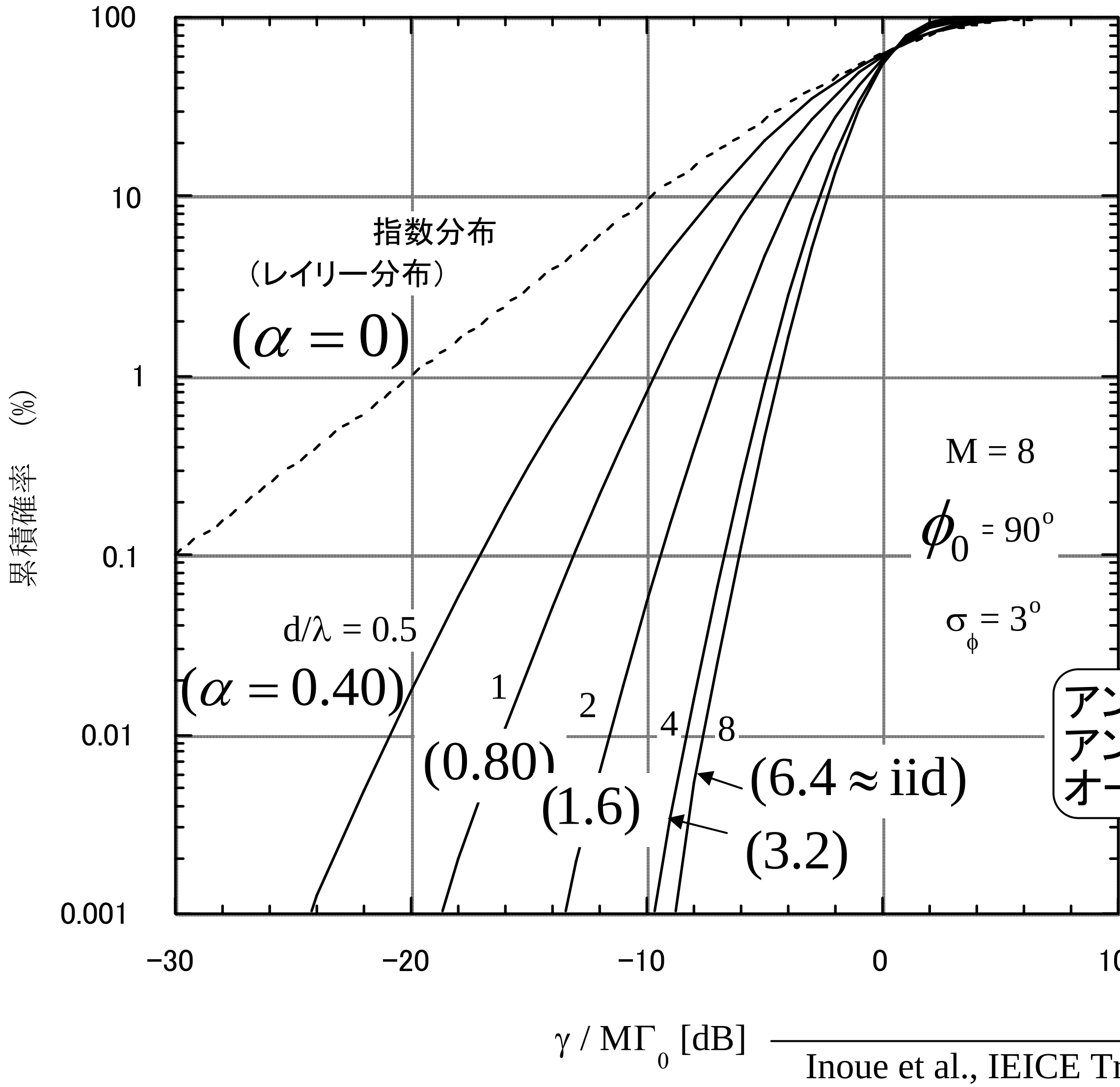
$$\varphi(t) = \prod_{m=1}^{M} \frac{1}{1 - j\Gamma_m t}$$

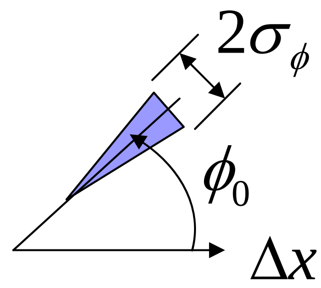
結局、この式に帰着できる

$$\boxed{f(\gamma) = \frac{1}{\prod_{m=1}^{M} \Gamma_m} \sum_{m=1}^{M} \frac{\exp(-\gamma / \Gamma_m)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{M} \left(\frac{1}{\Gamma_k} - \frac{1}{\Gamma_m} \right)}}$$

$$\Gamma_m = \langle \gamma_m \rangle$$

角度的広がりのある到来波に対するダイバーシチ効果





アンテナ素子数：8
角度広がり：3°

パラメータ：
アンテナ間隔
(0.5 λ – 8 λ)

アンテナ間隔を大きくしてゆくと
アンテナ素子数に等しいダイバーシチ
オーダに近づいてくる

αを求める近似式

$$\alpha \approx 2\sigma_\phi \left(\frac{d}{\lambda}\right) \sin\phi_0 \,(M - 0.3)$$

Inoue et al., IEICE Trans. Commun., vol. E83-B, no.7, 2000.07

講演内容

1. 広帯域ディジタル移動通信と電波伝搬
(通信の高速化に立ちはだかる電波伝搬の壁)

2. マルチパス伝搬モデルに現れる確率分布
(正規分布から仲上m分布まで，その関連と物理的意味)

3. 相関行列と固有値
(相関行列は伝搬情報の宝庫：その固有値が意味するものとは)

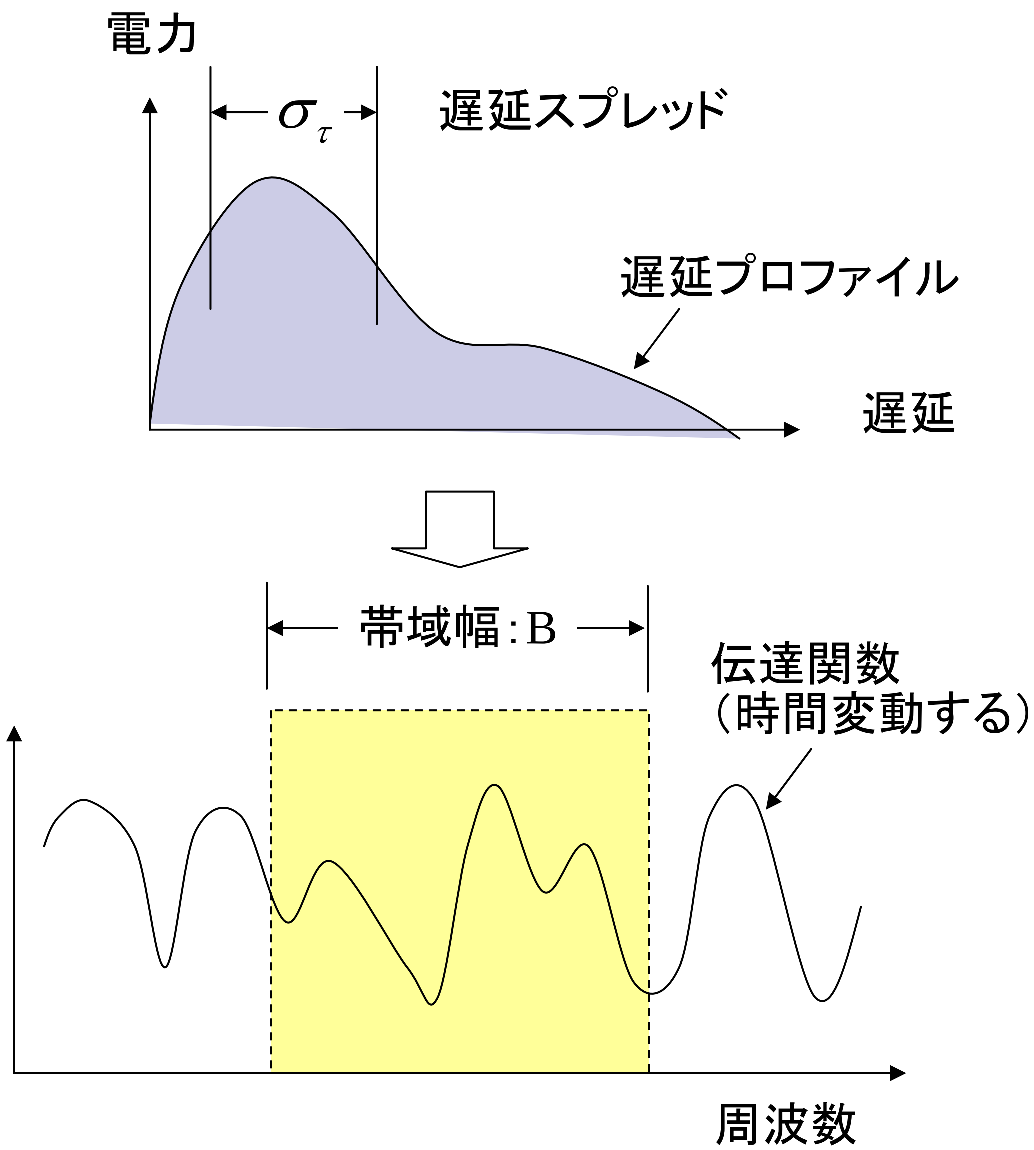
4. スペースダイバーシチにおける固有値問題
(アレーアンテナから見える伝搬環境に対する景色)

5. 空間相関と周波数相関のアナロジー
(広帯域信号の電力変動特性を，固有値問題として解く)

6. MIMOチャネル表現
(次節の議論のための必要最小限のまとめ)

7. MIMO-OTA測定環境構築への考察
(環境構築に具備すべき本質的なことは何か)

広帯域信号の電力変動特性を，固有値問題として解く

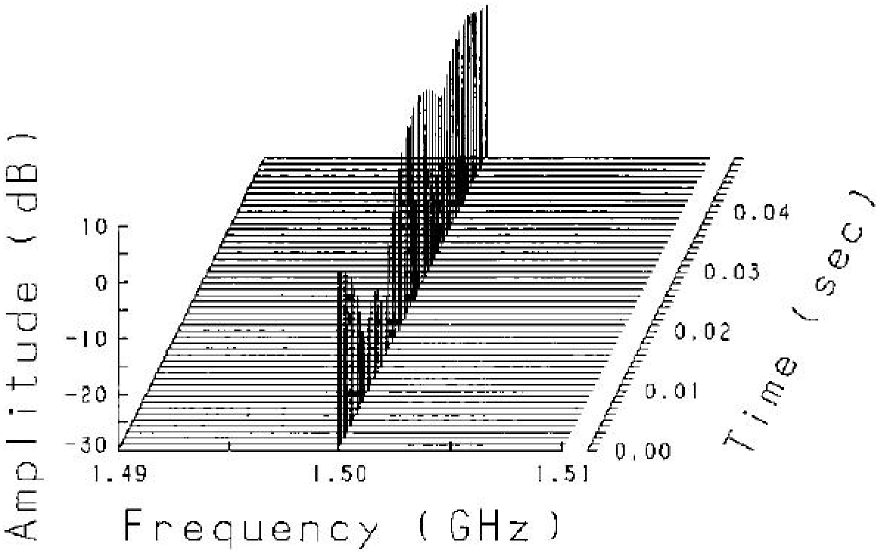


広帯域信号の電力変動は
帯域幅が広くなるほど
変動幅が少なくなる？

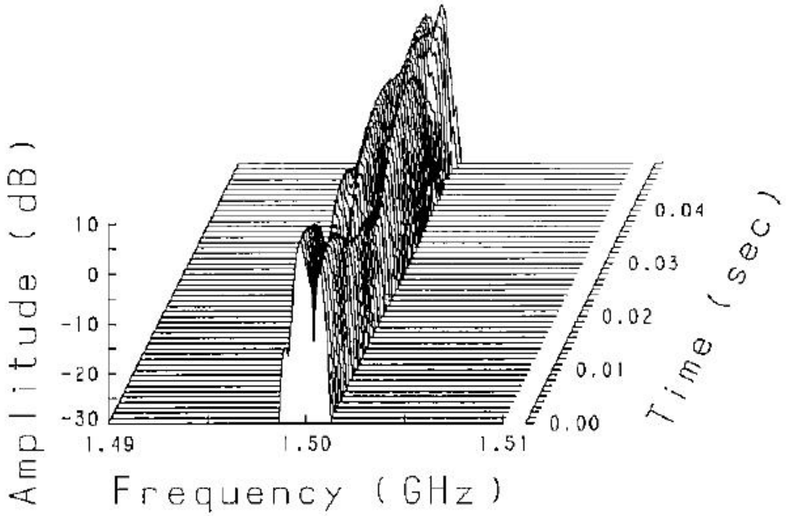
帯域幅Bの信号電力変動と
遅延スプレッドの関係は？

これを固有値問題で
解いてみる

解説：　唐沢、コロナ社本　（§4.6）
論文：井上他、信学論(B), vol.J88-B, no.9, pp.1641-1649, 2005.09

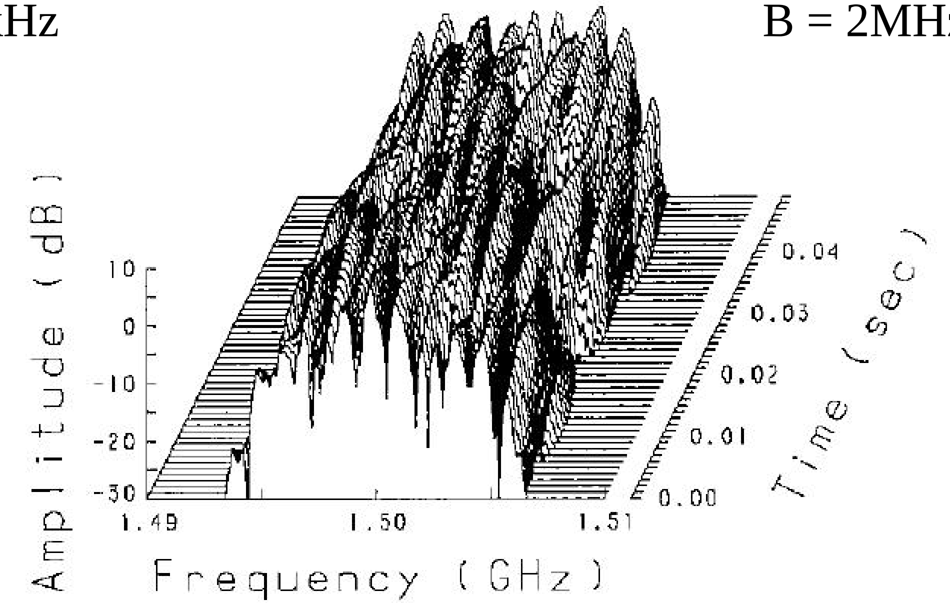


B = 10kHz



B = 2MHz

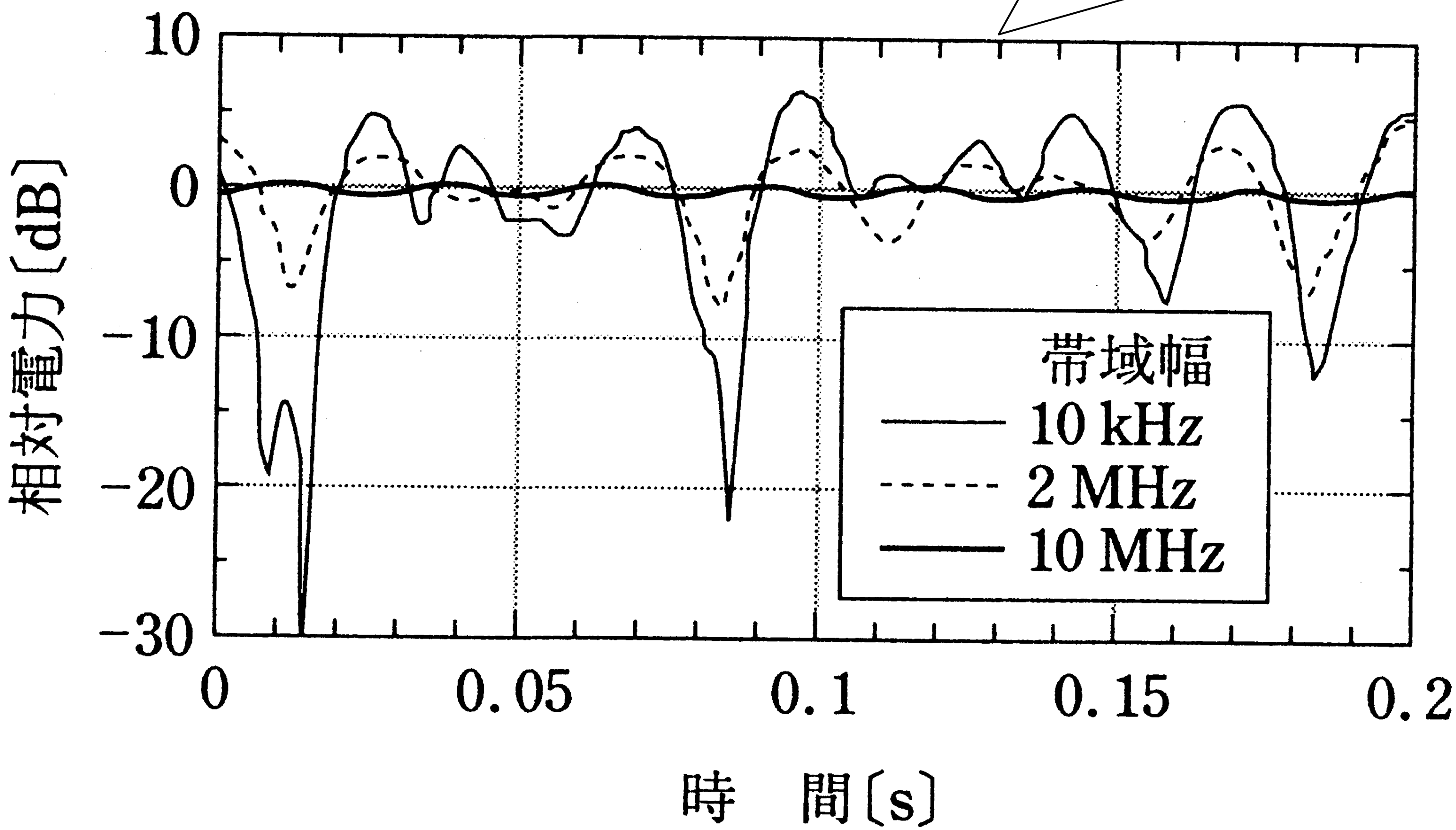
広帯域信号の
帯域内変動の
様子



B = 10MHz

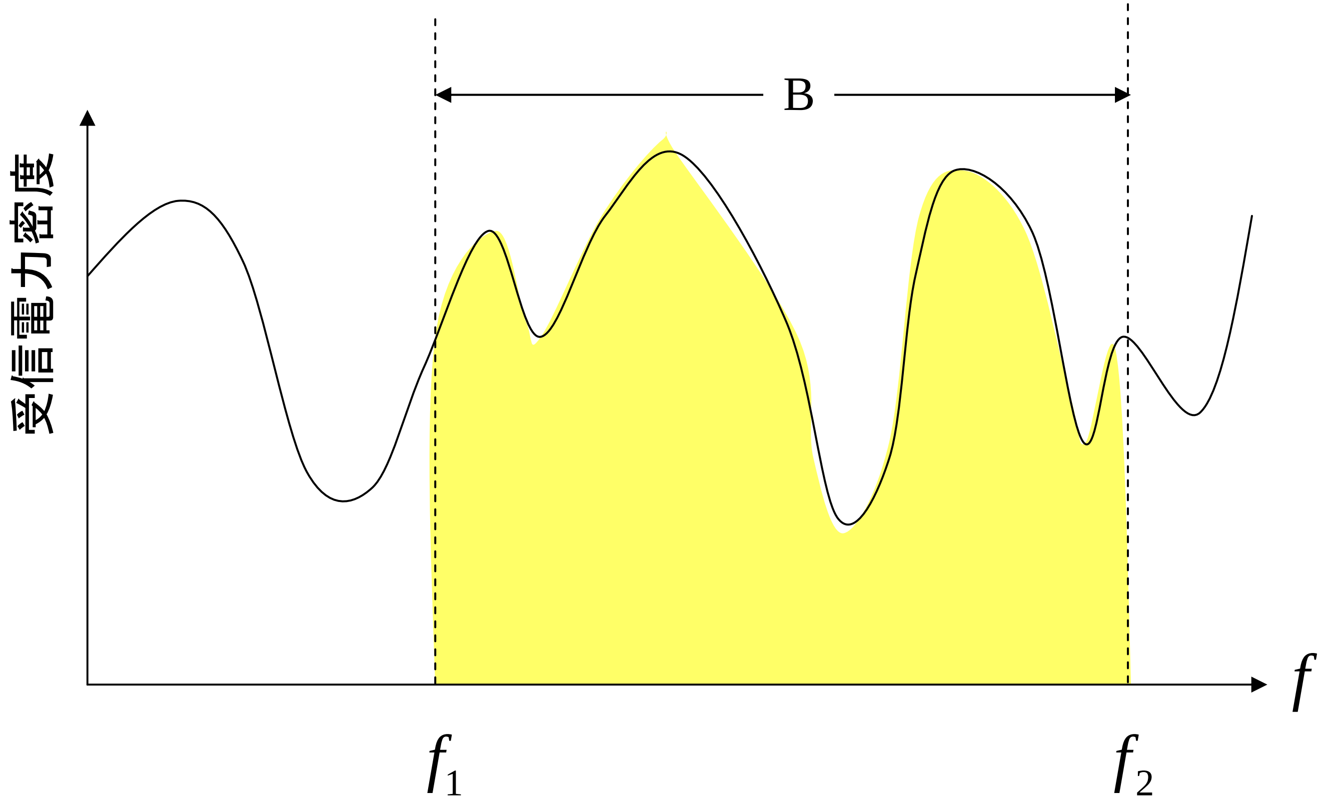
$$f_c = 1.5GHz$$
$$\sigma_\tau = 1\mu s$$
$$f_D = 50Hz$$

信号の帯域幅が大きくなるほど受信電力の変動幅が小さくなる



この現象を理論的に解析してみよう

問題点の整理



帯域Bの受信信号の電力変動

⇩

黄色の部分の面積の変動

⇩

受信電力密度は送信信号スペクトルが周波数に対してフラットであれば

$$\left|T(f,t)\right|^2$$

（Tは伝送路の周波数伝達関数）

に比例

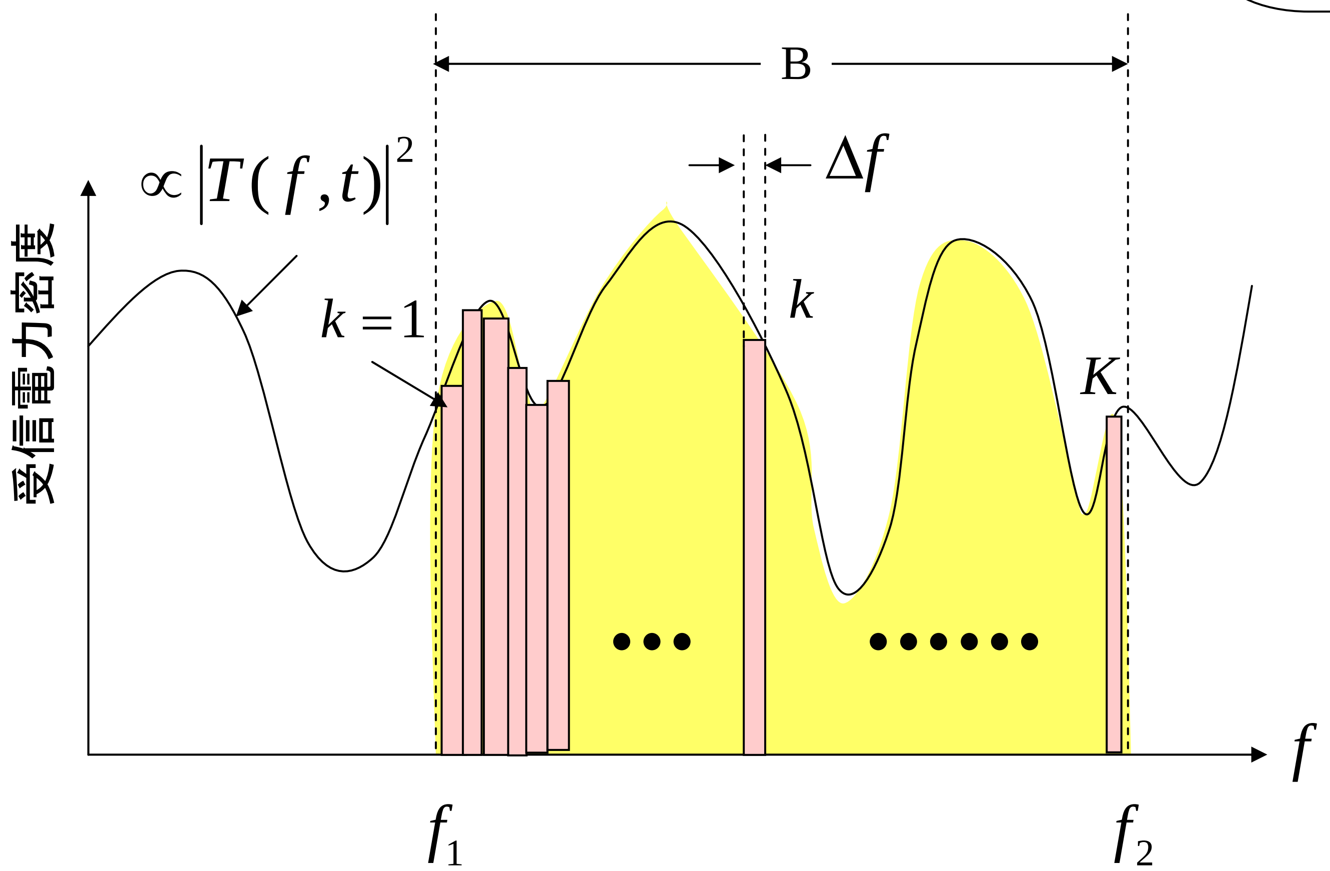
⇩

$$P_R(t) \propto \text{黄色の部分の面積} = \int_{f_1}^{f_2} \left|T(f,t)\right|^2 df$$

$$P_R(t) \propto \int_{f_1}^{f_2} \left|T(f,t)\right|^2 dt$$

$$\approx \sum_{k=1}^{K} \left|T(f_1 + k\Delta f, t)\right|^2 \Delta f$$

周波数特性がフラット
とみなせる微小周波数
セグメントに分割して
その総和をとる



$$B = K\,\Delta f$$

分割数Kは
十分大きくとる

$$K >> B\sigma_\tau$$

B=10MHz
σ_τ=10μs

→ K ≥100

$$P_R(t) \propto \int_{f_1}^{f_2} \left|T(f,t)\right|^2 dt$$

$$\approx \sum_{k=1}^{K} \left|T(f_1 + k\Delta f, t)\right|^2 \Delta f$$

$$\approx p_1(t) + p_2(t) + \cdots + p_k(t) + p_{k+1}(t) + \cdots + p_K(t)$$

レイリーフェージング環境では
一つ一つは指数分布をする
（振幅次元でレイリー分布）

$p_k(t)$ と $p_{k+1}(t)$ には変動に強い相関がある（この場合は**周波数相関**）

⇩

相関がある信号の和の確率分布を求めるには、
固有ベクトル変換をして、無相関に変動する信号に変換した後、
和を求めるのが、常套手段。（**スペースダイバーシチの解析と同じ**発想）

⇩

結局は、これも**固有値問題**に置き換えて、解ける

遅延プロファイルから周波数相関特性を求める

遅延プロファイル

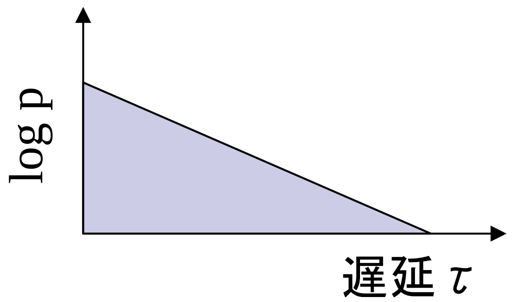
$$p(\tau)$$

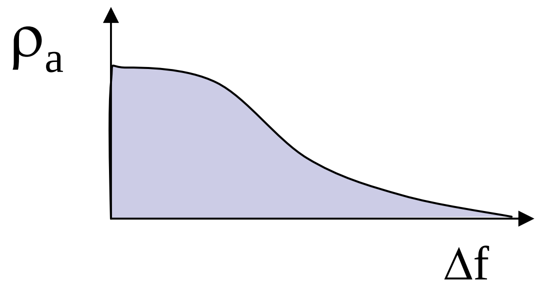
周波数相関特性

$$\rho_a(\Delta f) = \int_0^\infty p(\tau)\exp\left(-j2\pi\Delta f\,\tau\right)d\tau$$

指数関数型遅延プロファイル

$$p(\tau) = \frac{P_0}{\sigma_\tau}\exp\left(-\frac{\tau}{\sigma_\tau}\right) \quad \Rightarrow \quad \rho_a(\Delta f) = \frac{1 - j2\pi\Delta f\sigma_\tau}{1 + \left(2\pi\Delta f\sigma_\tau\right)^2}P_0$$





サブ周波数kとk'信号間の周波数相関

$$\rho_a(k,k') = \frac{P_R}{K}\left(\frac{1 - j2\pi(k-k')\Delta f\sigma_\tau}{1+\{2\pi(k-k')\Delta f\sigma_\tau\}^2}\right)P_0$$

周波数領域相関行列

$$S = \begin{bmatrix} \rho_a(1,1) & \rho_a(1,2) & \cdots & \rho_a(1,K) \\ \rho_a(2,1) & \rho_a(2,2) & \cdots & \rho_a(2,K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_a(K,1) & \rho_a(K,2) & \cdots & \rho_a(K,K) \end{bmatrix}$$

相関行列の固有値

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_K$$

相関のある等電力変動(指数分布)の和

$$P_R(t) \approx p_1(t) + p_2(t) + \cdots + p_k(t) + p_{k+1}(t) + \cdots + p_K(t)$$

独立な不等電力(指数分布)の和

$$= p_{e1}(t) + p_{e2}(t) + p_{e3}(t) + \cdots + p_{eK}(t)$$

無視できるほどに小さい値になる

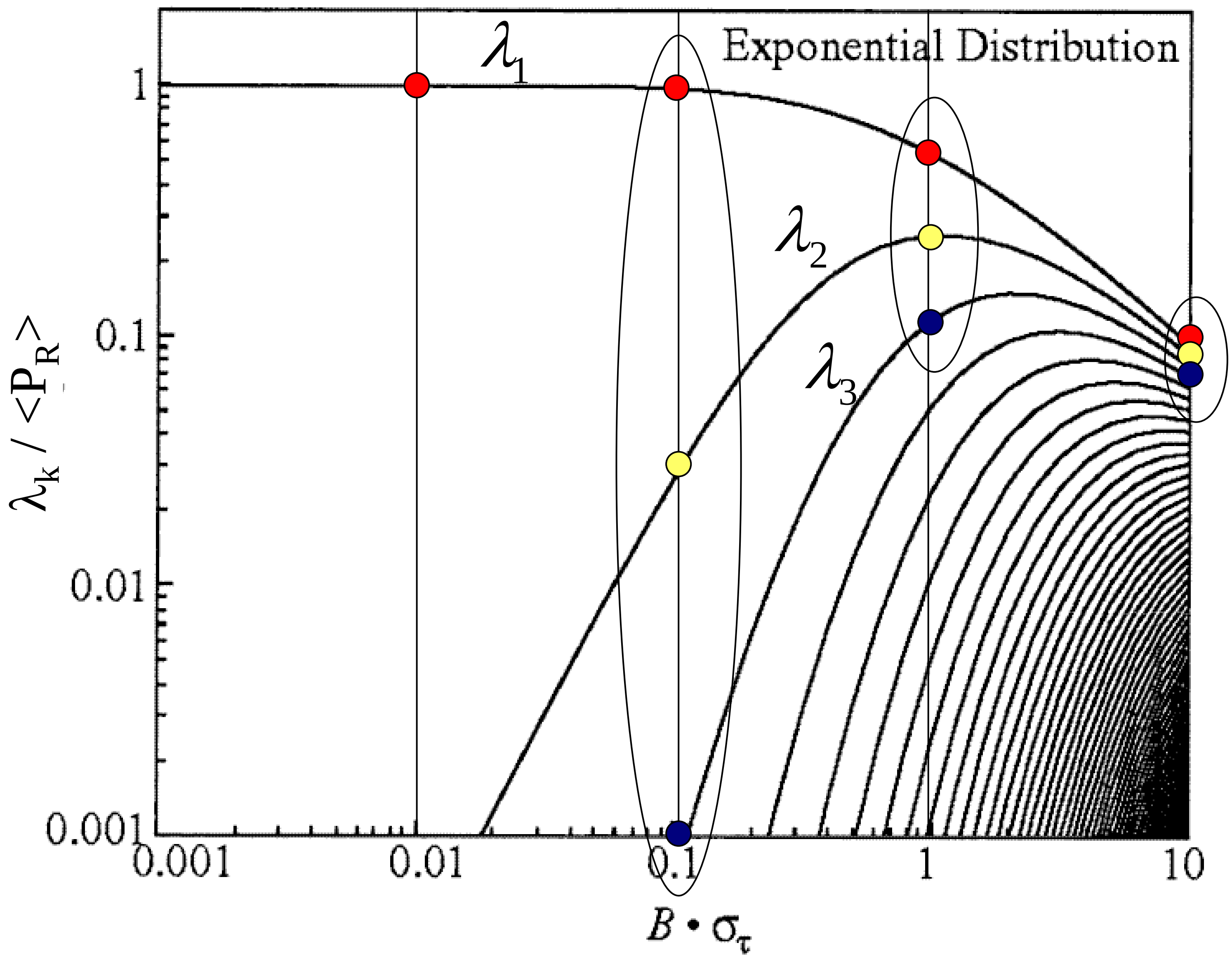
$$\left\langle p_{ei}(t) \right\rangle = \lambda_i$$

受信電力変動の確率分布(PDF)

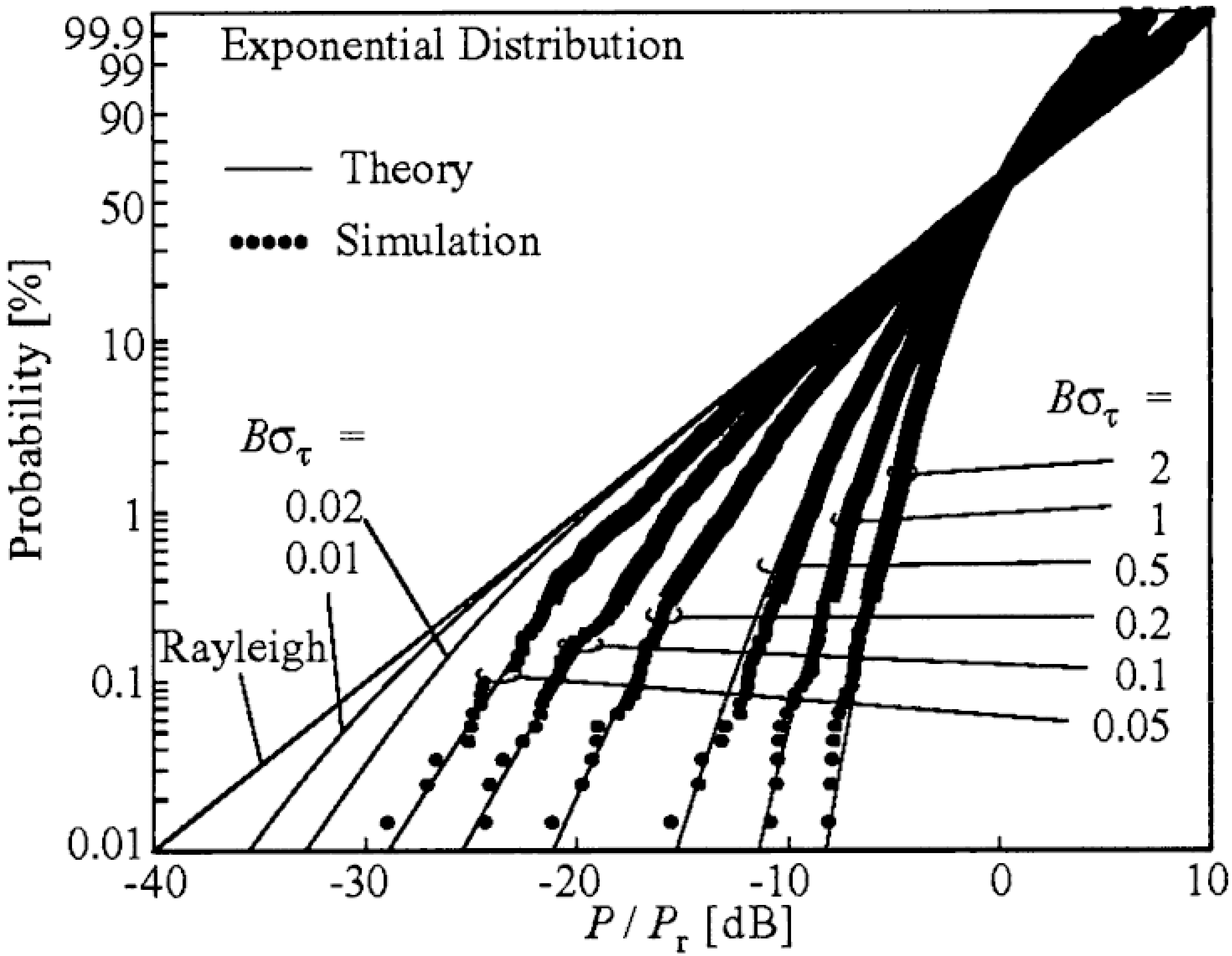
$$f(P_R) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{K} \lambda_k} \sum_{k=1}^{K} \frac{\exp(-P_R/\lambda_k)}{\prod_{\substack{k'=1 \\ k' \neq k}}^{K} \left(\frac{1}{\lambda_{k'}} - \frac{1}{\lambda_k} \right)}$$

相関のあるブランチ信号のスペースダイバーシチ合成SNRで出てきた式に同じ

固有値を求めてみると(遅延プロファイル：指数関数型)



計算機シミュレーション値と理論値を比較してみると？



空間領域相関解析と周波数領域相関解析のアナロジー

空間領域信号処理

スペースダイバーシチ解析

周波数領域信号処理

広帯域信号の電力変動解析

空間相関行列

周波数相関行列

固有値解析

ダイバーシチ合成の式で計算