

ランダムウォークと電波伝搬

唐沢 好男

ランダムウォークする過程で出会う伝搬モデル(確率分布)を取り上げる。ランダムウォークとは、一歩踏み出す毎に、その大きさや方向等がランダム(有相関を含む)である現象を言う。

ランダムウォークは、種々の物理現象(自然現象)や経済変動などの基本モデルに生きていて、その理論基盤は数理統計学で裏打ちされている。巷では、酔っ払いの千鳥足にも例えられる。我々分野の電波伝搬、特に、移動通信分野に現われるマルチパス伝搬現象も、加法性や乗法性のある定常不規則過程の現象であり、ランダムウォークと密接に関連している。本発表では、1次元空間・2次元空間から多次元空間に至るランダムウォークを通して、それぞれの場所に出会う伝搬モデル(非常に基本的な確率分布)を眺めてみたい。

ここでは、ランダムウォークとして最も初歩的な以下の前提で考える。

- 1) 一歩毎のステップ幅は一定とする(この長さを1とする)
- 2) 次のステップの方向はその次元において、完全にランダムとする

着目する物理量は多岐に亘るが、ランダムウォークと言う点において共通である。例えば、無線通信のフェージング対策としてスペースダイバーシチがあるが、これは、2次元空間のランダムウォークを多次元空間のランダムウォークに移し替えて超球面に貼り付け、二度と原点に戻れなくしてしまうというランダムウォークの特徴を活かしたものになっている。

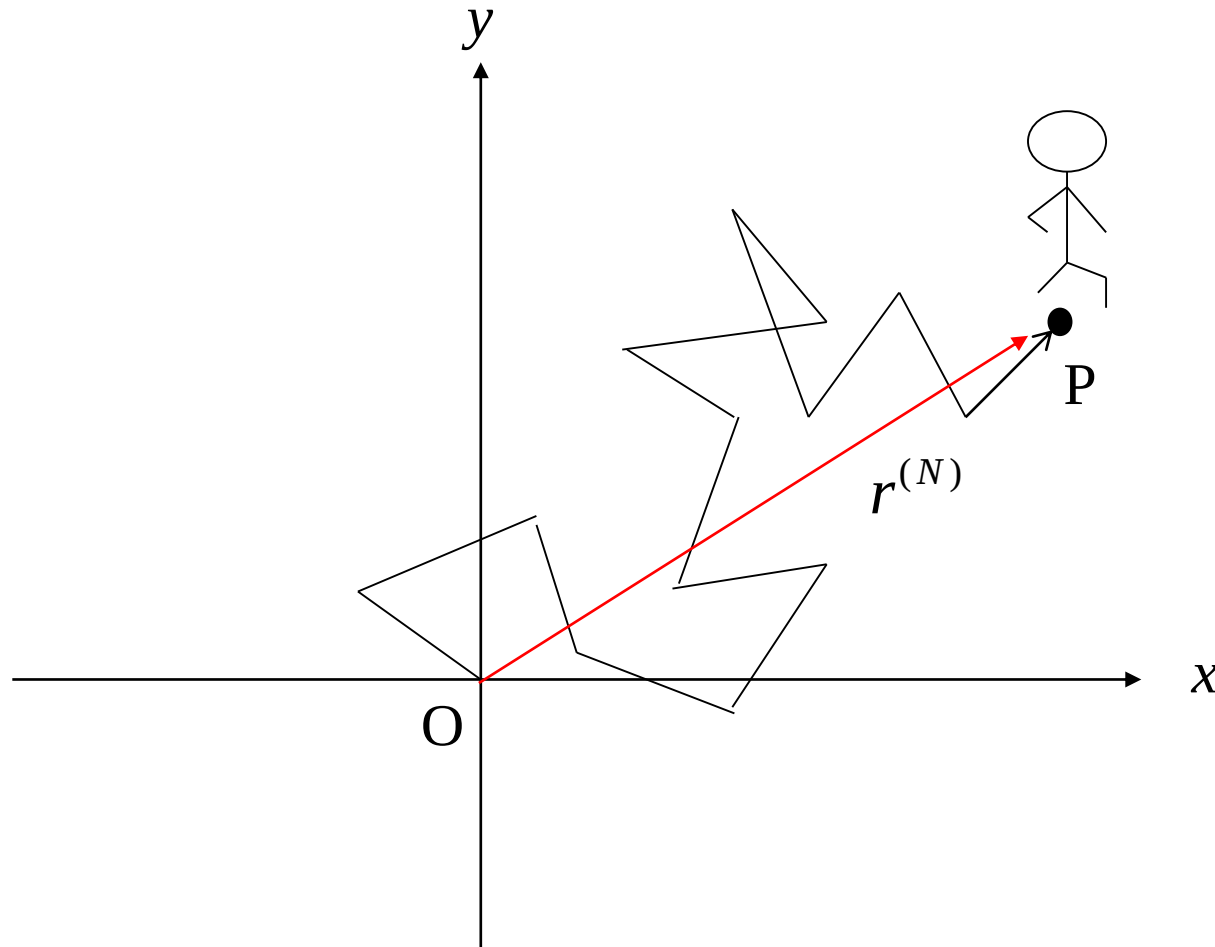
尚、ここでは、ランダムウォークから伝搬モデルへの道筋についてのみ述べ、お馴染みの式が現われたところで止めている。たどり着いた先のモデルの電波伝搬的視点からの式の導出や物理的意味については学術書を見て欲しい。

発表の内容

ランダムウォークによって電波伝搬でお馴染みの確率分布を訪ねる

- 1) ランダムウォークとは
- 2) 1次元空間をさまよう
- 3) 2次元空間をさまよう
- 4) 多次元空間をさまよう

ランダムウォークとは？（2次元空間の例）

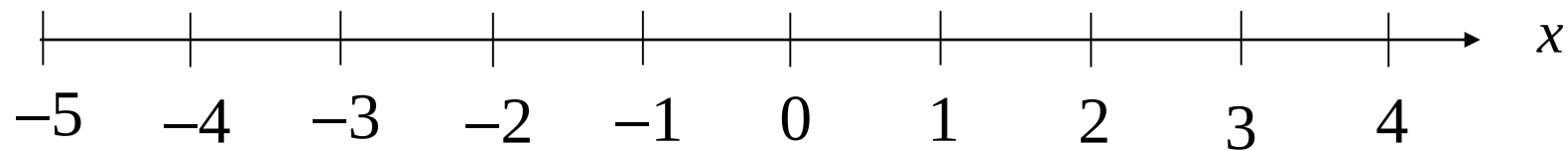
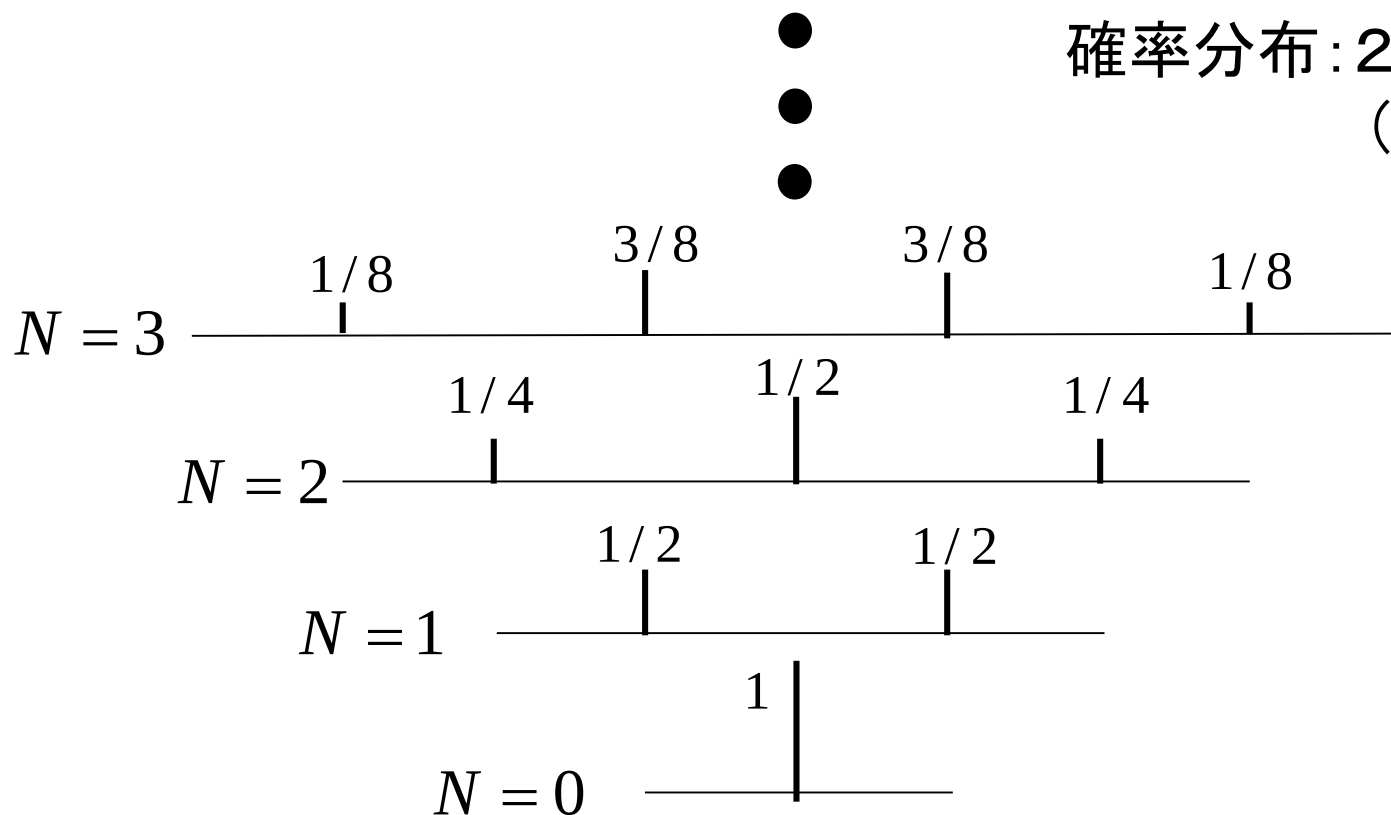


検討の前提

- 1) 一歩毎のステップ幅：一定（この長さを1）
- 2) 次のステップの方向：完全にランダム（その次元において）

1次元空間をさまよう(一直線上を行きつ戻りつ)

確率分布: 2項分布
(離散分布)



1次元空間のランダムウォークで出会う確率分布

N 歩目の位置 $x_1^{(N)} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \quad (\alpha_i = 1 \text{ or } -1)$

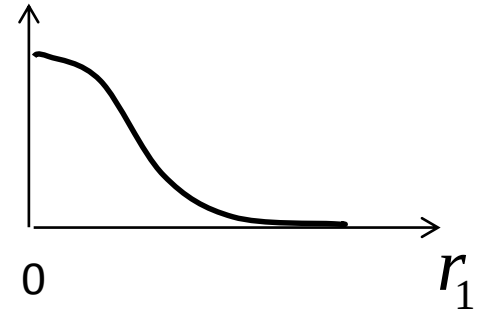
位置 x_1 の確率分布: 2項分布

$$p_{x_1}(x_1, N) = \frac{N!}{\left(\frac{N+x_1}{2}\right)! \left(\frac{N-x_1}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

歩数 N が十分大きくなると正規分布に近似 (中心極限定理)

→ 距離 r_1 は半ガウス分布

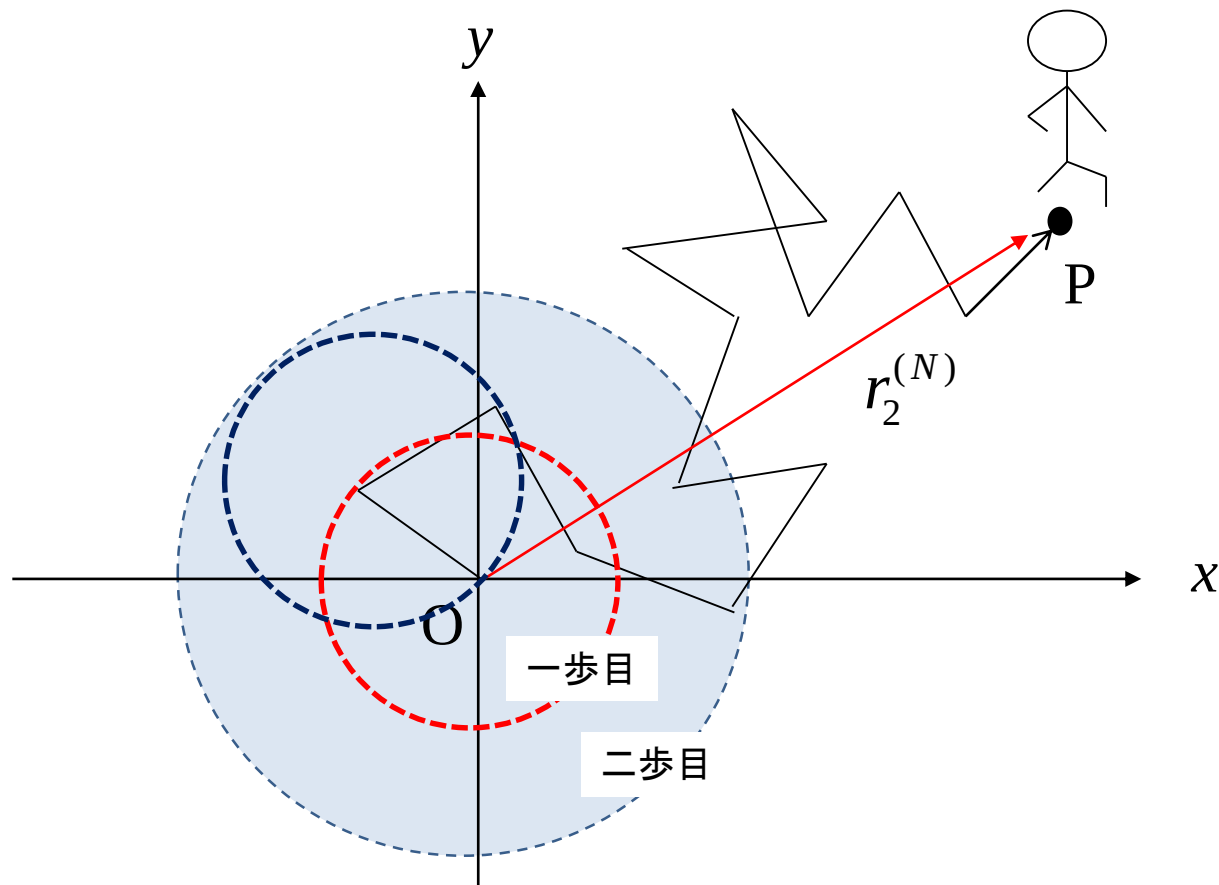
$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_{r_1}(r_1; N) = \sqrt{\frac{2}{\pi \sigma^2}} \exp\left(-\frac{r_1^2}{2\sigma^2}\right) \quad (r_1 \geq 0; \sigma^2 = N)$$



二乗値 $R_1 (\equiv r_1^2)$ の確率分布: 自由度1のガンマ分布

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_{R_1}(R_1; N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 R_1}} \exp\left(-\frac{R_1}{2\sigma^2}\right)$$

2次元空間をさまよう(千鳥足)



一歩目の距離 $r_2^{(1)}$ 確率分布

$$p_{r_2}(r_2;1) = \delta(r_2 - 1)$$

二歩目の距離 $r_2^{(2)}$

$$p_{r_2}(r_2;2) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - r_2^2/4}}$$

N 歩目の距離 $r_2^{(N)}$ は？

2次元空間のランダムウォークで出会う確率分布

N 歩目での出発点からの距離 $r_2^{(N)}$

$$r_2^{(N)} = \left| \exp(j\phi_1) + \exp(j\phi_2) + \cdots + \exp(j\phi_N) \right| = \left| \sum_{i=1}^N e^{j\phi_i} \right| \quad (1)$$

$(\phi_i : 0 \sim 2\pi \text{ の一様分布})$

このような複素量の和(*)の確率分布を求めるのに有用な特性関数
ハンケル変換形の特性関数(フーリエ・ベッセル変換)

$$F(\lambda) = \int_0^\infty J_0(\lambda r) p(r) dr$$

$$p(r) = r \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r) F(\lambda) d\lambda$$

*) 通信応用

振幅と周波数の異なる多数の
正弦波の合成信号の包絡線の
確率分布を求めるときに有用

振幅が $a_1 \sim a_N$ の任意位相の合成信号包絡線 r のハンケル変換形の特性関数

$$F(\lambda) = \prod_{i=1}^N J_0(a_i \lambda) \rightarrow (1) \text{式では } F(\lambda) = \{J_0(\lambda)\}^N$$

2次元空間のランダムウォークで出会う確率分布

N が十分大きいときの特性関数は

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{J_0(\lambda)\}^N \approx \exp\left(-\frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}\right) \quad (\sigma = \sqrt{N/2})$$

中心からの距離 $r_2^{(N)}$ の確率分布は

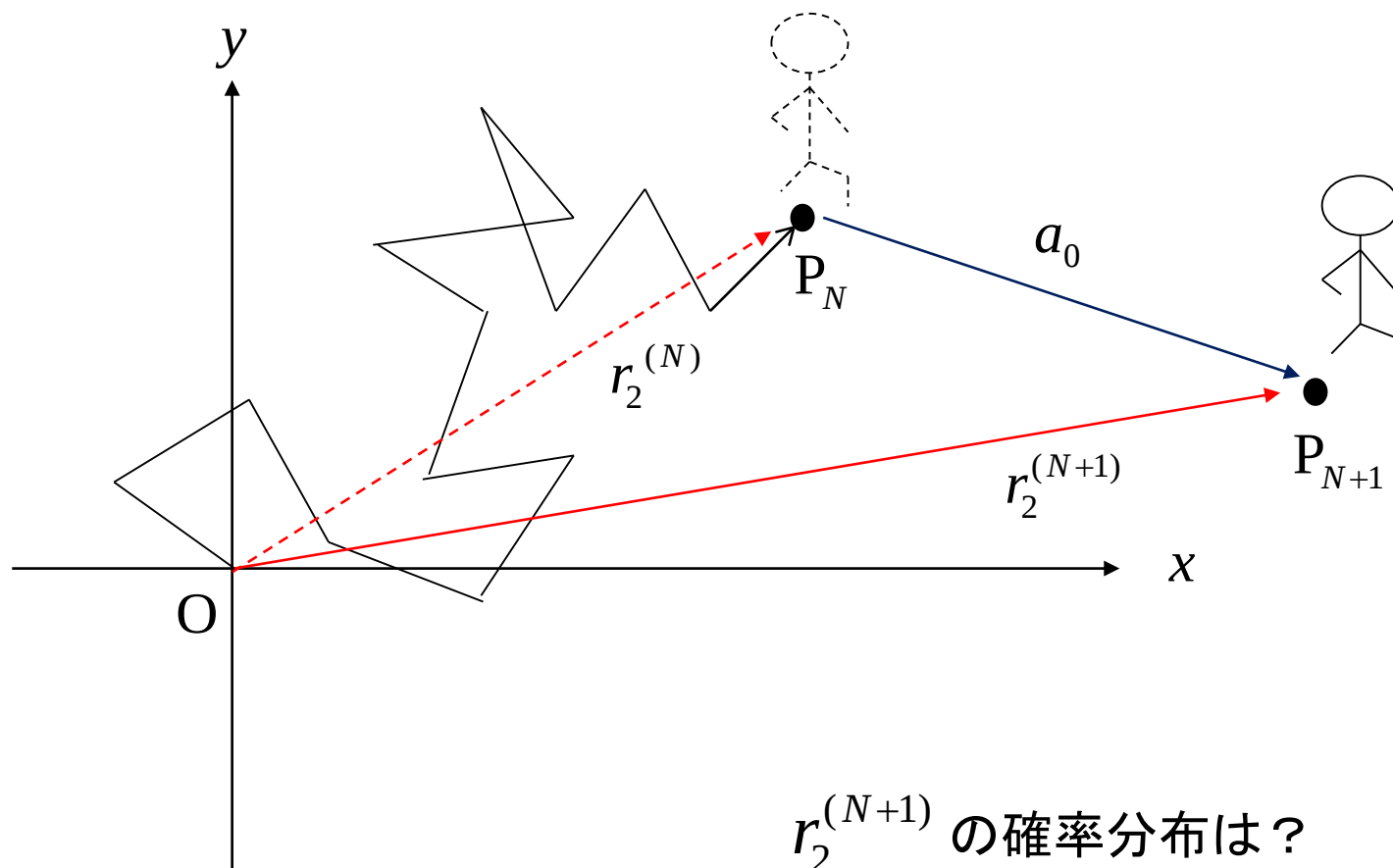
$$\begin{aligned} p_{r_2}(r) &= r \int_0^\infty \lambda J_0(r\lambda) \exp\left(-\frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}\right) d\lambda \\ &= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad \leftarrow \text{レイリー分布} \end{aligned}$$

二乗値 $R_2 (\equiv r_2^2)$ の確率分布は

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_{R_2}(R_2; N) = \lambda \exp(-\lambda R_2) \quad \leftarrow \text{指数分布}$$

$$(R_2 \equiv r_2^2, \quad \lambda = 1/\langle R_2 \rangle = 1/N)$$

2次元空間のランダムウォーク:最後の一步を大股で



2次元空間のランダムウォーク:最後の一步を大股で

N 歩目までの距離の確率の特性関数

$$F(\lambda) = \{J_0(\lambda)\}^N$$

N+1 歩目までの距離の確率の特性関数

$$F(\lambda) = J_0(a_0\lambda) \{J_0(\lambda)\}^N$$

Nが十分大きいときは

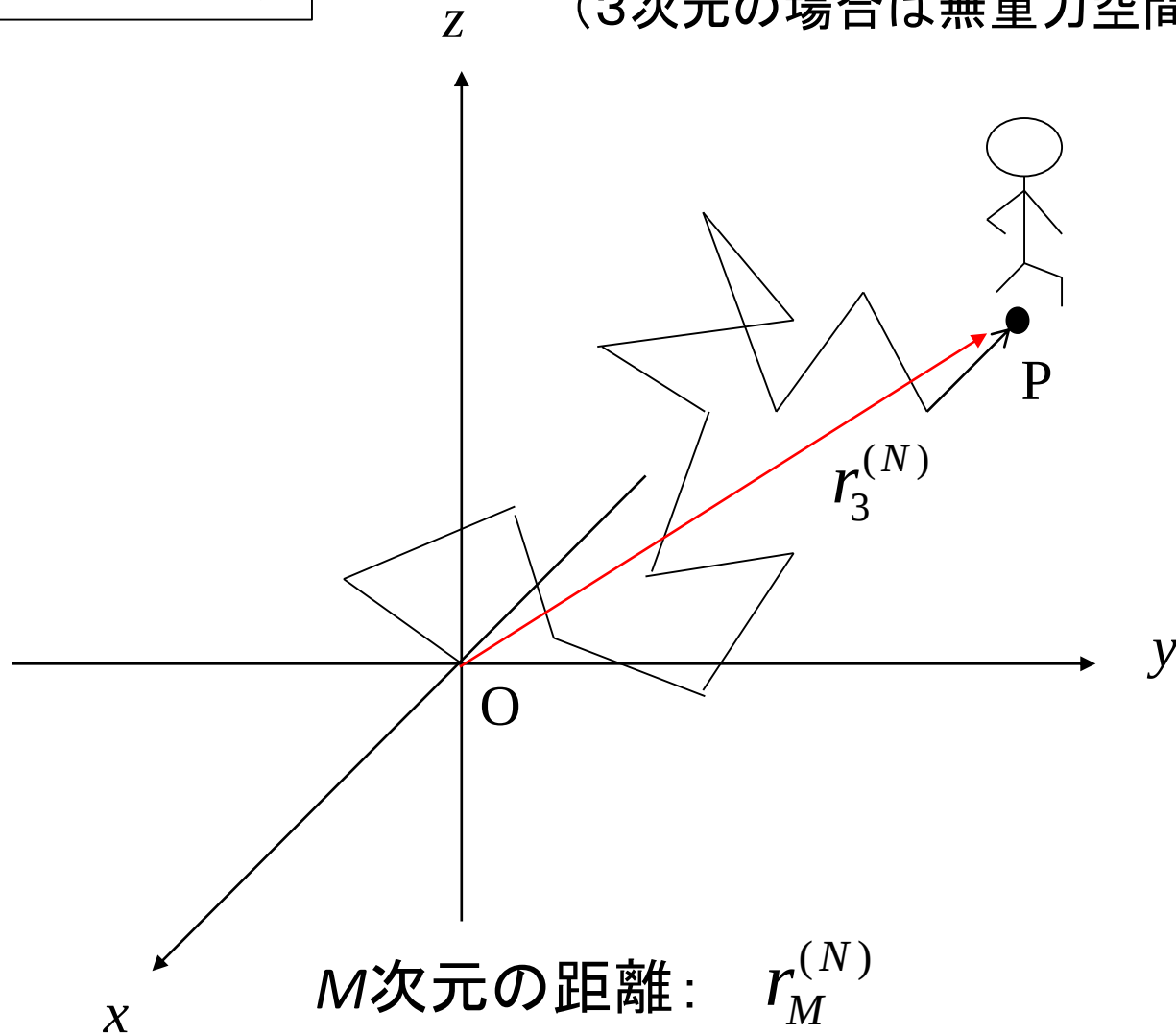
$$F(\lambda) = J_0(a_0\lambda) \exp\left(-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\right)$$

距離の確率分布(確率密度関数)は

$$\begin{aligned} p_{Nn}(r) &= r \int_0^\infty \lambda J_0(r\lambda) J_0(a_0\lambda) \exp\left(-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\right) d\lambda \\ &= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a_0^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{a_0 r}{\sigma^2}\right) \leftarrow \text{仲上・ライス分布} \end{aligned}$$

多次元空間をさまよう

(3次元の場合は無重力空間)



M 次元の距離: $r_M^{(N)}$

$N \gg 1$ での正規化距離: $\hat{r}_M = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r_M^{(N)}}{\sqrt{N}}$

正規化距離の確率分布は？

多(M)次元空間のランダムウォークで出会う確率分布

M 歩目までの距離

$$r_M^{(N)} = \sqrt{\sum_{k=1}^M \left| \sum_{i=1}^N \Delta x_{ik} \right|^2} \quad \left(\sqrt{\sum_{k=1}^M (\Delta x_{ik})^2} = 1 \right)$$

距離の確率分布

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_{r_M}(r_M; N) = \frac{2(M/2)^{M/2}}{N^{M/2} \Gamma(M/2)} r_M^{M-1} \exp\left(-\frac{M}{2N} r_M^2\right)$$

正規化距離の確率分布 (左辺 $\rightarrow p_{Nm}, r_M \rightarrow r, M \rightarrow 2m, N \rightarrow \Omega$)

$$p_{Nm}(r; m, \Omega) = \frac{2m^m}{\Omega^m \Gamma(m)} r^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} r^2\right) \leftarrow \text{仲上m分布}$$

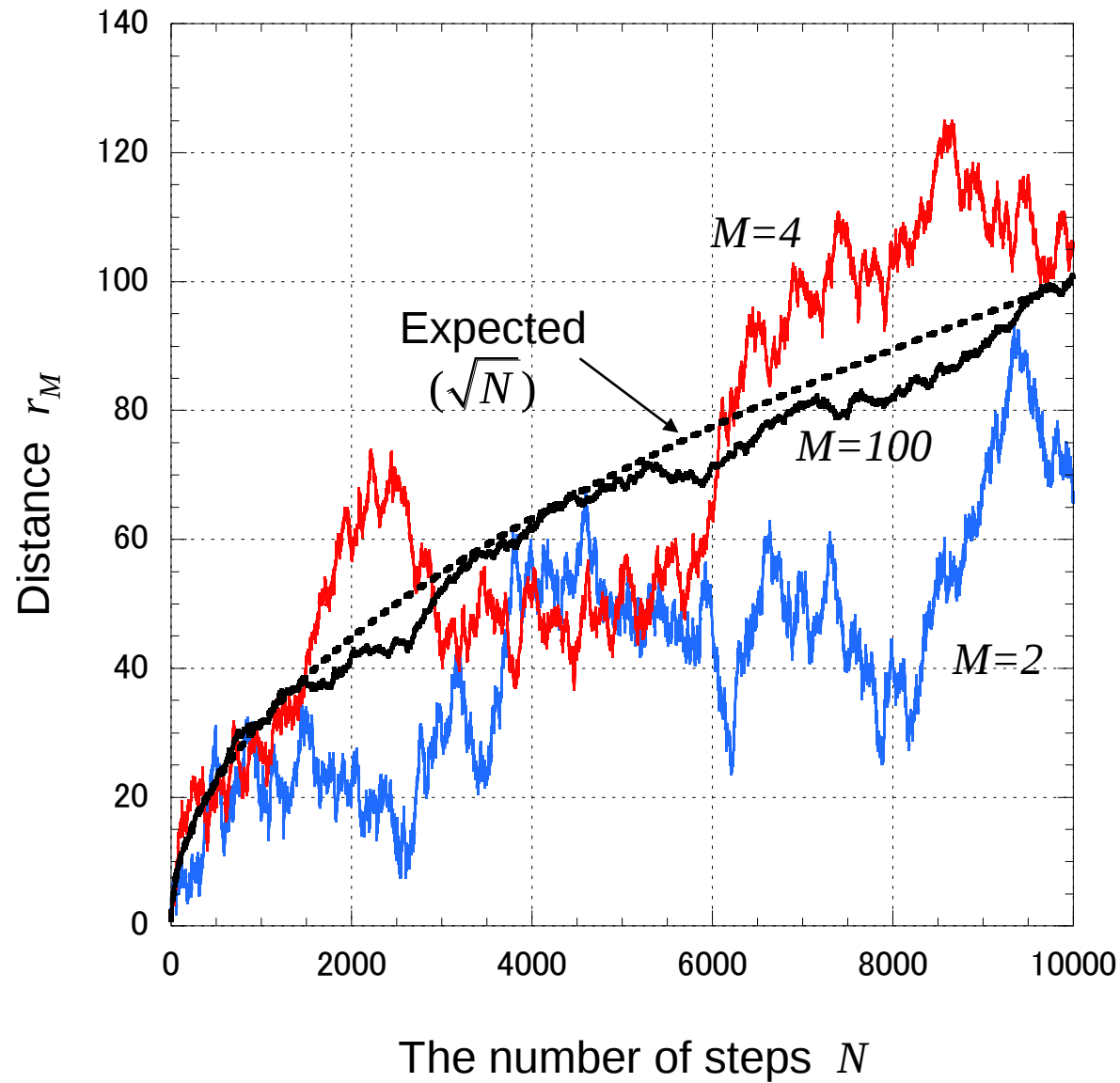
二乗距離の確率分布

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_{R_M}(R_M; N) = \frac{1}{\Gamma(M/2)} \left(\frac{M}{2N}\right)^{M/2} R_M^{M/2-1} \exp\left(-\frac{M}{2N} R_M\right)$$

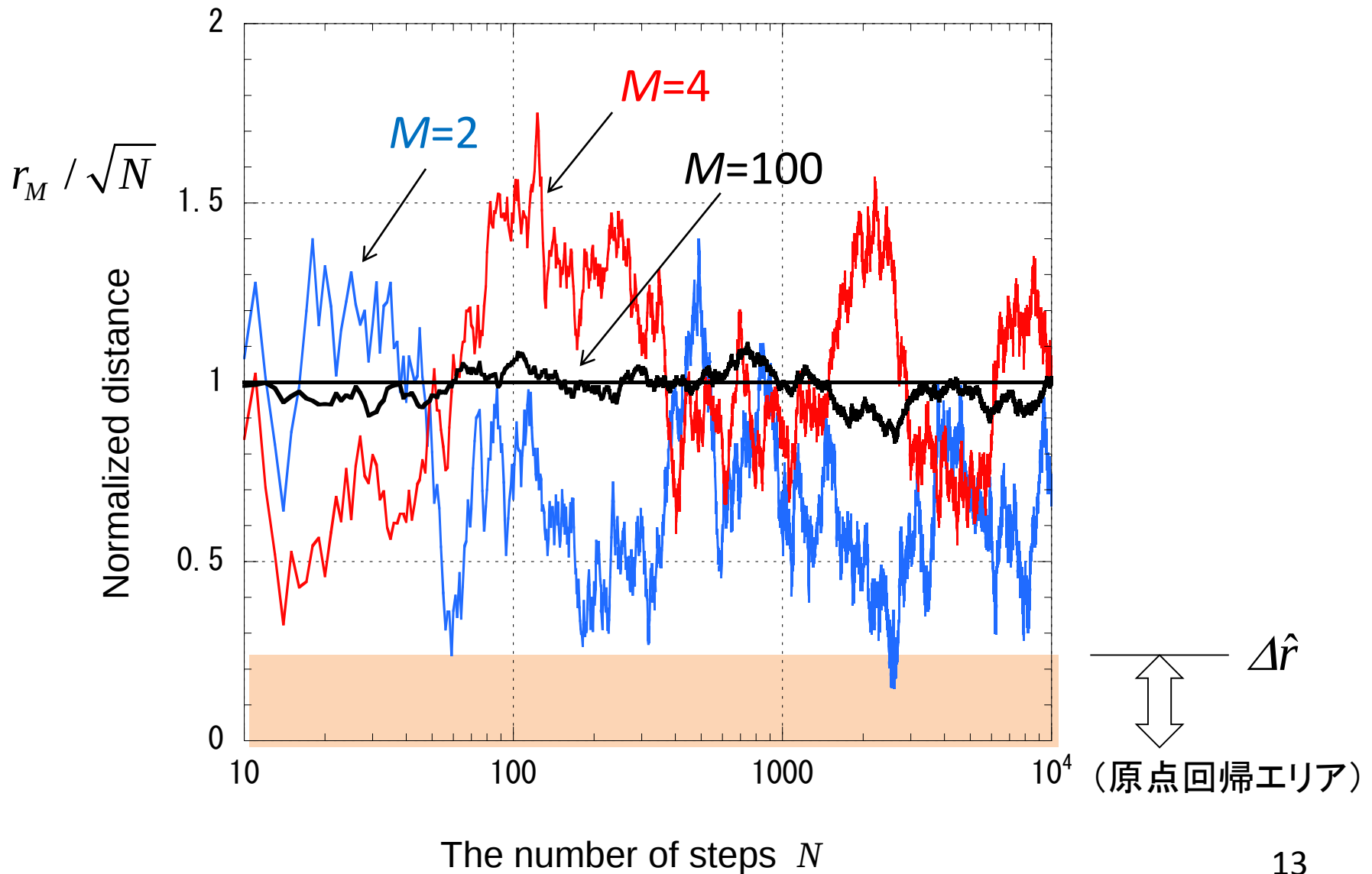
正規化二乗距離の確率分布 (左辺 $\rightarrow p_G, R_M \rightarrow R, M \rightarrow 2\nu, N \rightarrow \nu/\beta$)

$$p_G(R; \nu, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \beta^\nu R^{\nu-1} \exp(-\beta R) \leftarrow \text{ガンマ分布}$$

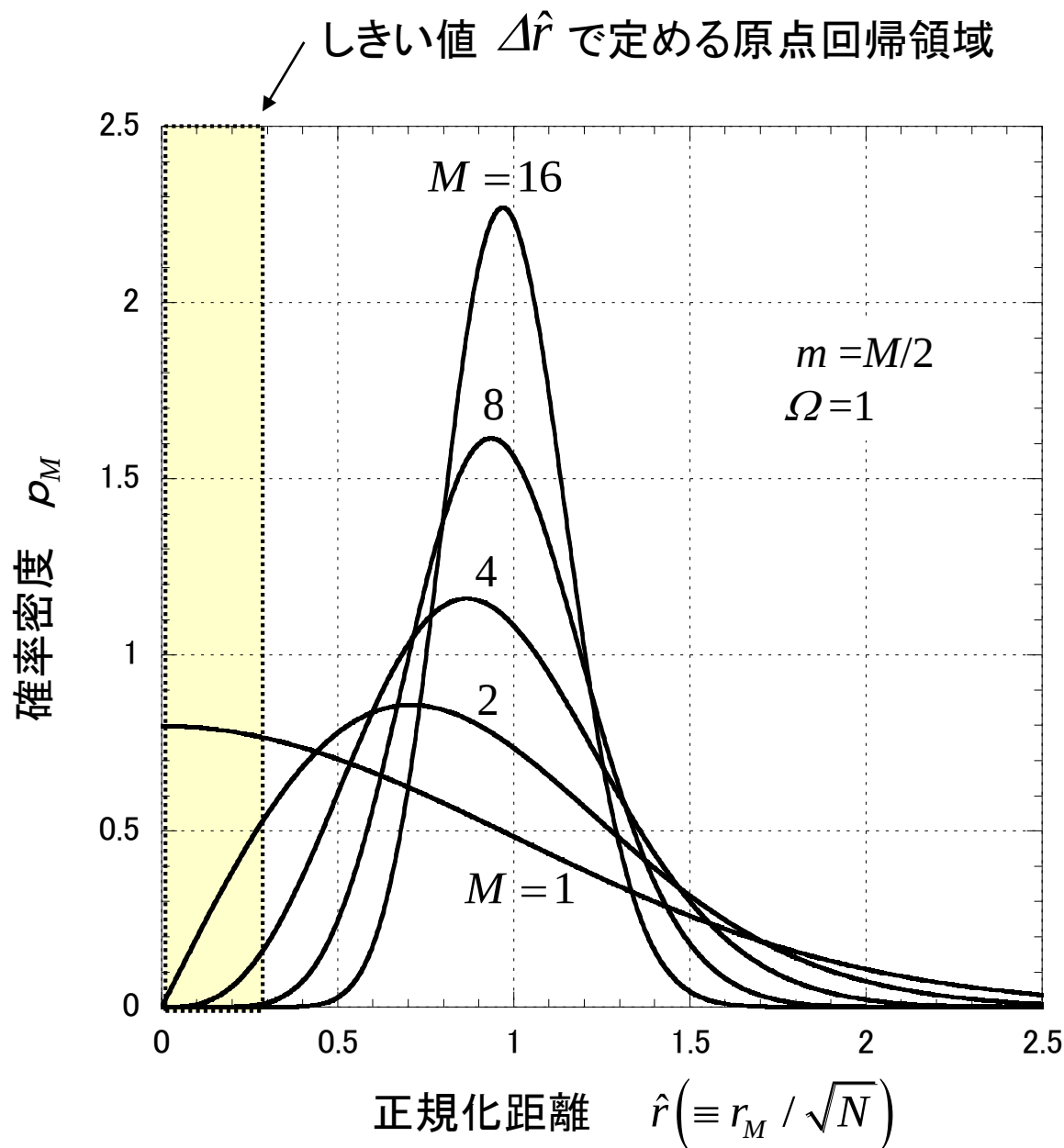
多次元空間のランダムウォークのシミュレーション例



多次元空間のランダムウォークのシミュレーション例 (同じデータを正規化距離で見ると)



ランダムウォーカーが出发点付近に戻ってくる確率は



次元が大きくなるほど、原点に戻ってくる確率は小さくなる

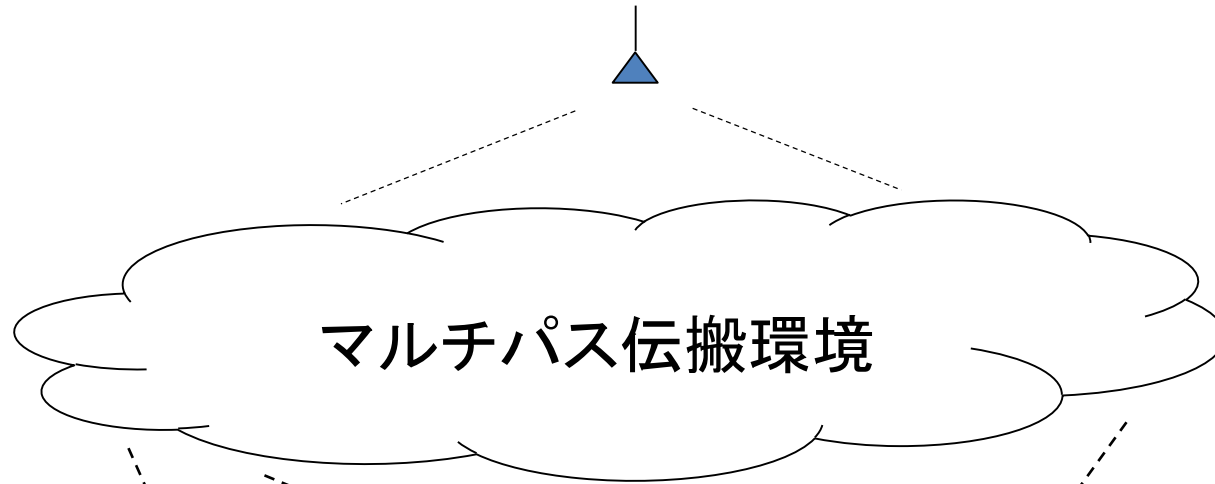


原点回帰を無くしたいなら次元を上げる

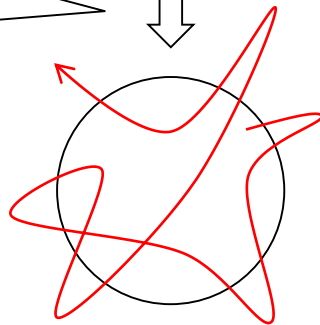


スペースダイバーシティ(MRC)はこの特徴を利用している

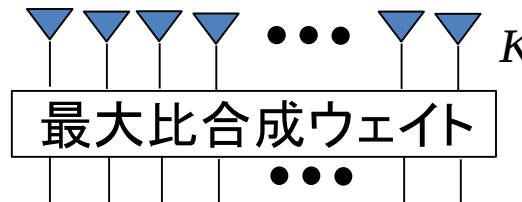
多次元ランダムウォークとスペースダイバーシティ(MRC)



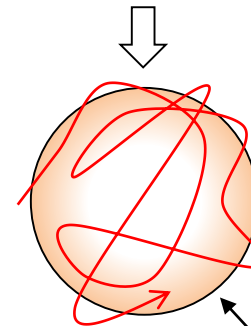
信号振幅は
レイリー分布



正規化半径1の円周を中心に平面
状をダイナミックに動き回る
(受信強度が時々大きく落ち込む)



合成信号振幅は
伸上m分布



正規化半径 $\sqrt{K}$ の超球
面付近を動き回る
(受信強度は常時安定)

多次元空間の超球面

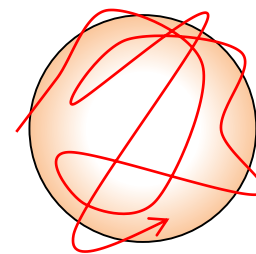
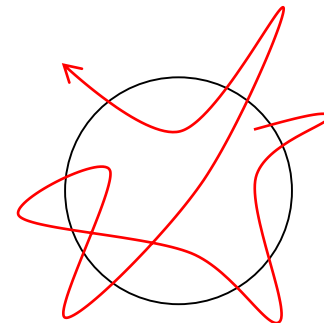
ランダムウォーカーの人生論

ここで議論してきた空間次元は「自由の広さ (DoF)」と読み替えることもできる。

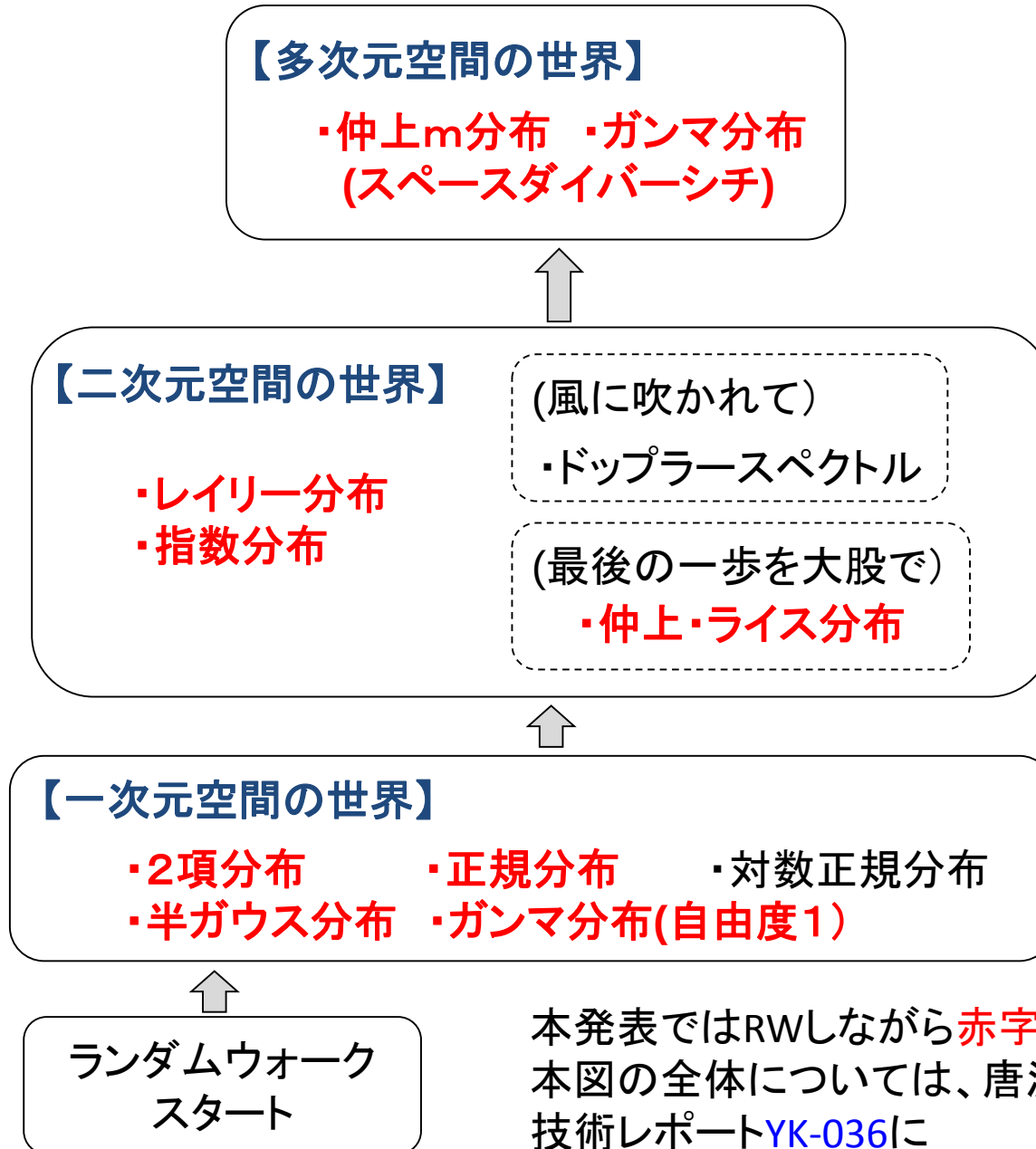
与えられた自由が少ないと、その範囲の中でダイナミックに動き回ることができる。

自由が与えられすぎると、本人はそれを謳歌しているつもりでも、周りから見れば、超球面の表面付近をうろうろしているだけになり、結果的にはお釈迦様の手のひらの上を歩いているだけということになる。

人生、どちらが幸せだろうか。



まとめ



本発表ではRWしながら赤字の部分を訪ねた。
本図の全体については、唐沢研HPから公開の
技術レポート[YK-036](#)に