AP研 (June 15, 2023)

仲上三分布（n･q･m分布）温故知新

Part 1 : n分布

唐沢　好男

太平洋戦争に翻弄された昭和の激動期（1930年代後半から1940年代）、国際電気通信株式会社（当時の国策会社）の技術職員の仲上稔氏は勤務地であった福岡受信所（埼玉県福岡村：現在のふじみ野市）内の実験室において、短波の受信技術の研究開発を行っていた。その執念ともいえる努力によって、現代のGHz帯移動伝搬（マルチパスフェージング）の基本モデルとして生き続けている三つの確率分布を編み出している。仲上のn分布（1940年）・q分布（1942）・m分布（1943）である。n分布は、後に同形の分布を独立に導いた米国Bell研究所のS. O. Riceを加えて、現在は仲上・ライス分布と呼ばれている。同様の事情により、q分布もBell研のR. S. Hoytを加えて、仲上・ホイト分布と呼ばれている。n分布とq分布は純粋な理論的考察から、m分布は短波のフェージングデータに見られる統計的な性質から経験的に見出されたものであるが、仲上自身の手によって、これら三つの分布には、理論的な意味で、深い関係があることが示されている。ちなみに、分布の呼び名、n, q, mについては、後の論文の中で、三つの分布の関係を述べる際の区別として仮につけたものであることが記されている。国際学会の世界では、仲上の知名度はm分布にあり、Nakagami distributionというとm分布を指す。

本稿及びその続編では、これら3つの分布を生み出した原著論文に立ち返り、その歴史を探訪したい。全体のテーマを温故知新としているのは、古きを訪ねる中に、これからの研究にも役立つであろうヒントを感じることができるからである。

初回の本発表ではn分布を取り上げる。仲上が確率分布解析の道具としたハンケル変換形特性関数は、今の時代におけるマルチパス環境のレイトレーシング後の合成信号振幅の解析に役立つものである。

発表の内容 （歴史の中継ぎ役としての）

１．仲上が編み出した三つの分布

２．時代背景

３．n分布解析の手段：ハンケル変換形特性関数

４．n分布の導出

５．ライスによる分布の導出

６．分布の呼び名

７．ハンケル変換形特性関数の活用

８．むすび

仲上稔氏が編み出した三つの確率分布
（わが国発、電波伝搬の記念碑的分布）

ｎ分布（電気通信学会雑誌；1940年） → 仲上-ライス分布
(S. O. Rice, BSTJ, 1945)

ｑ分布（電気通信学会雑誌；1942年） → 仲上-ホイト分布
(R. S. Hoyt, BSTJ, 1947）

ｍ分布（電気通信学会雑誌；1943年） → 仲上ｍ分布、仲上分布

・ｎ分布とｑ分布は純粋に理論的な考察から得られた分布
・ｍ分布は短波のフェージングデータ解析から発見的に見出された分布
　しかし、ｍ分布には理論的な意味でも重要な分布
・三つの分布には、近似の意味で、深い関係がある

仲上氏が研究開発に従事したころの時代背景

1930年代後半～1940年代
（昭和の激動期：太平洋戦争を挟んだその前後）

無線通信（国際通信）は短波通信の時代
（HF: 3～30MHz, 電離層伝搬）

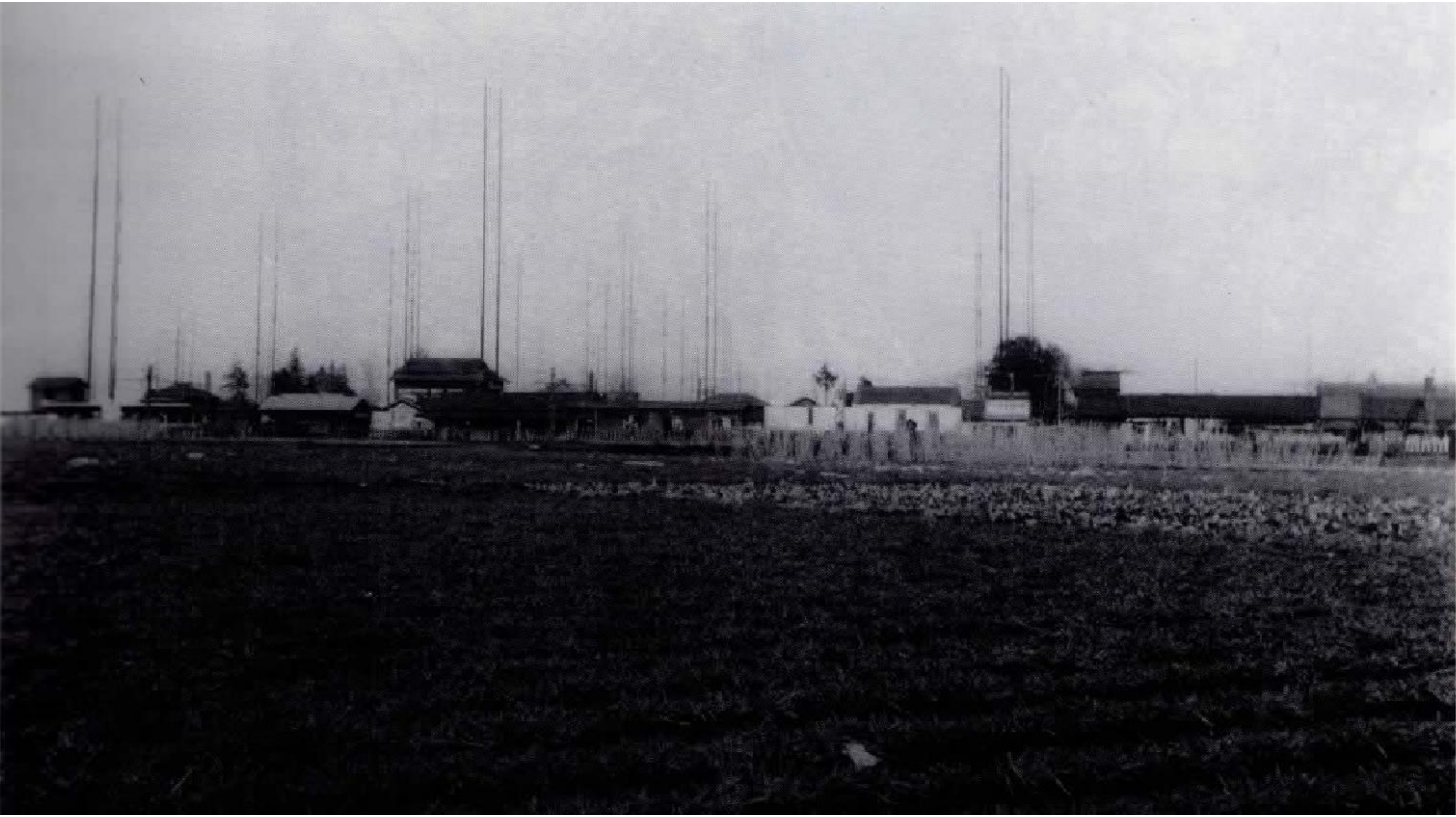
所属： 国際電気通信株式会社（当時の国策会社）

勤務地： 福岡受信所（現埼玉県ふじみ野市）内にある研究棟

伝搬データ： 記録紙やブラウン管の時代、データ処理も手作業
（現代は、ディジタル機器による自動収録・自動処理の時代）

この詳細は、技術レポート TR-YK-076「仲上三分布への歴史探訪」にまとめている。
PDFの入手は、唐沢研究室ホームページより

仲上氏の実験室があった福岡受信所周辺の風景



昭和28年ころの福岡受信所の無線塔（空中線支持柱）群
（東武東上線上福岡駅から北側の広大なエリアに短波のアンテナが張り巡らされていた）

（福岡受信所の歴史；上福岡市教育委員会より）

n分布解析の手段:ハンケル変換形特性関数

確率密度関数の積分変換:特性関数
（確率変数の和の分布を求めたいときに有効な手段）

$f(x)$:確率密度関数

① フーリエ変換形（特性関数）

$$\Phi(t) \equiv \left\langle e^{jtx} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} f(x) dx$$

② ラプラス変換形（積率母関数）

$$\Psi(s) \equiv \left\langle e^{sX} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f(x) dx$$

③ ハンケル変換形（ハンケル変換形特性関数）

$$g(k) \equiv \left\langle J_0(kr) \right\rangle = \int_0^{\infty} J_0(kr) f(r) dr$$

ハンケル変換形特性関数は不規則位相問題の解析に有効な手段

不規則位相問題

多数の波の
合成信号

$$a = r_1 e^{j\theta_1} + r_2 e^{j\theta_2} + \cdots + r_N e^{j\theta_N}$$

$$r = |a| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} r_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{i'\neq i\\ i'=1}}^{N} r_i r_{i'} \cos\left(\theta_{i'} - \theta_i\right)}$$

前提条件

$$\left.\begin{array}{l}\text{各素波の振幅 } r_i \rightarrow \text{ 一定（時間変化しない）} \\ \text{各素波の位相 } \theta_i \rightarrow 0 \sim 2\pi\text{ で一様に分布}\end{array}\right\}$$

⇒ 振幅（包絡線レベル）r の確率分布は？

いくつかのケースにおけるハンケル変換形特性関数

N=1 と N=2

$$g\left(k\right)=\begin{cases} J_0(kr_1) & \left(N=1\right) \\ J_0(kr_1)J_0(kr_2) & \left(N=2\right) \end{cases}$$

N が任意の数　（Kluyver, 1906）

$$g(k)=\prod_{i=1}^{N}J_0(kr_i)$$

このように表されることが
ハンケル変換形特性関数
の最大のメリット

同程度の強さの波が、十分大きい数だけ存在

$$g(k)=\prod_{i=1}^{N}J_0(kr_i)\approx\exp\left(-\frac{\sigma^2k^2}{2}\right)$$

$$2\sigma^2\equiv\sum_{i=1}^{N}r_i^2$$

レイリー分布の
ハンケル変換形
特性関数

ハンケル変換形特性関数の逆変換

確率密度関数 $$f\left(r\right)=r\int_0^\infty kJ_0(rk)g(k)dk$$

累積分布関数 $$F(r)\left(=\int_0^r f(r)dr\right)=r\int_0^\infty J_1(kr)g(k)\,dk$$

<u>N波の不規則位相問題では</u>

$$f(r)=r\int_0^\infty kJ_0(kr)\prod_{i=1}^{N}J_0(kr_i)\,dk$$

N=3までは、積分が解けて閉形式で表される
$N\geq 4$ では数値積分

<u>同程度の強さの波が十分多数ある場合</u>

$$f(r)=r\int_0^\infty kJ_0(kr)\exp\left(-\frac{\sigma^2k^2}{2}\right)\,dk$$

$$=\frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

レイリー分布

n分布の誕生

発想

多数の同程度の強さの波がたくさんある中に、
特別に強度の大きい波（著しい不同の波）が加わった場合は？

その一波の大きさを r_0 とすると

$$g(k) = J_0(kr_0)\exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right)$$

$$f(r) = r\int_0^\infty kJ_0(kr)J_0(kr_0)\exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right)\,dk$$

$$= \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r_0^2 + r^2}{2\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{r_0 r}{\sigma^2}\right)$$

（積分解法の公式は、WatsonのBessel Functionの本（仲上氏が利用）や
岩波の数学公式IIIなど）

分布導出に至る道のりについて

このように大筋の流れでまとめてしまうと、仲上がいともたやすくｎ分布の式にたどり着いたように感じると思うが、けっしてそうではない。

原著論文とその前篇である２編の論文（すなわち３編の論文）からは、フェージングの特性解明を目指して、その方法が雲をつかむような段階であったところから、困難な道を自ら切り開いて行った苦闘の跡を読み取ることができる。

ｎ分布誕生の歴史に興味を持たれた読者は、是非、これら原著論文にも目を通し、その雰囲気を味わってほしい（大学の図書館などには古い学会誌も保管されている）。どの論文も数式が多く、かなり難解なので、覚悟して読んでほしい。

電磁気学を完成させたマクスウェルの論文（1864）がそうであったと聞くが、開拓者の論文は野戦病院さながらで、必ずしも目的に向かって一直線でないところに、その意を受け止めることの難しさを感じる。仲上のｎ分布やｑ分布の導出にもそれが感じられ、荒野開拓の苦悩が滲み出る論文になっている。

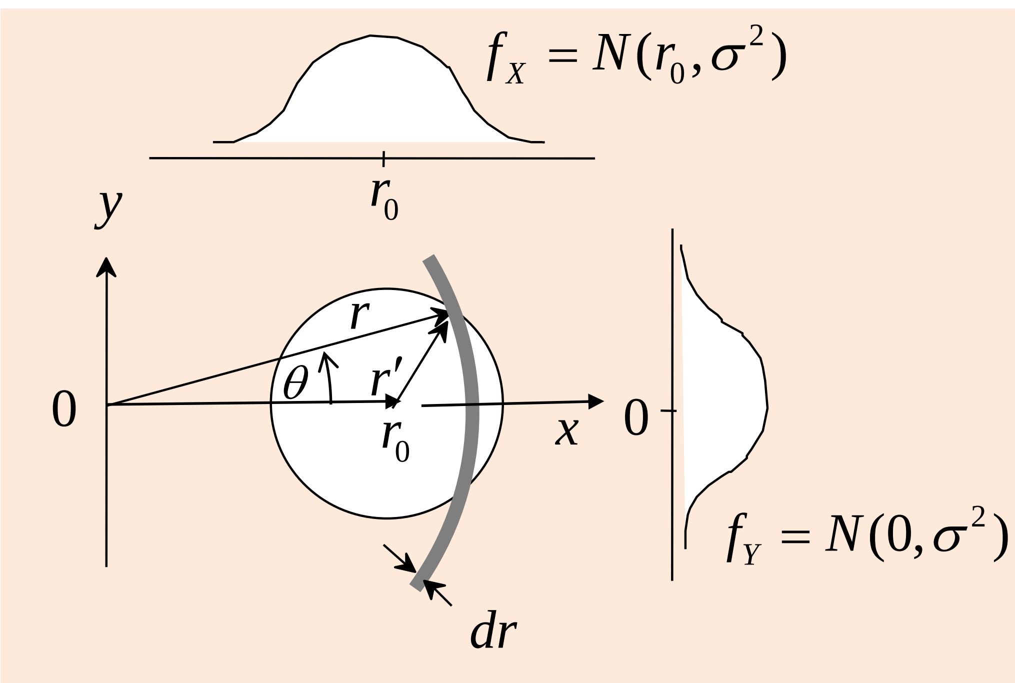
ライスによる分布の導出（S. O. Rice, BSTJ, 1945）

（定常成分と不規則成分の合成信号振幅の確率分布）

変数 x が$N(r_0,\sigma^2)$, y が$N(0,\sigma^2)$であるときのx+jy の振幅 r の分布

$$r = |x + jy| \left(= \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

$$f_{r\phi}(r,\phi) = f_x(x) f_y(y) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$



$$= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 - 2r_0 r \cos\phi + r^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$f_r(r) = \int_0^{2\pi} f_{r\phi}(r,\phi)\, d\phi$$

$$= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 + r^2}{2\sigma^2} \right) I_0\left(\frac{r_0 r}{\sigma^2} \right)$$

（変形ベッセル関数 I_0 の積分表示公式より）

分布名の変遷

仲上の発表の方がライスより5年早いのであるが、満州事変から太平洋戦争へと進む昭和の動乱期、日本語で書かれた論文が世界に知られることは無かった。

一方、ライス論文が掲載されたBSTJはこの分野の世界最先端の技術論文誌であり、論文誌の国際性や認知度の違いから、欧米では、ライス論文が仲上論文より先に知られ、ライス分布（Rice/Rician/Ricean distribution）の名で世に広まっていった。

その後、我が国の先人たちは、特に、国際無線通信の標準化会合（当時のCCIR）の場などにおいて、仲上の先着権を折々に主張し、現在では仲上-ライス分布の名前が定着しつつある。現行のITU-R勧告（Rec. ITU-R. P. 1057）では、分布の名前がNakagami-Rice distributionで定義されている。

しかし、国際学会の発表や論文誌（特にIEEE関係）、あるいは英語版Wikipediaなどでは、今なお、ライス分布で呼ばれることが多く楽観できる状況でもない。上記の経緯を踏まえれば、仲上-ライス分布と呼ぶのに正統的な意味での根拠があり、是非、皆さんも、「仲上-ライス分布」を積極的に使ってほしい。

温故知新

<u>ハンケル変換形特性関数を積極的に使ってみよう</u>

仲上氏の時代には、不規則位相問題について、
閉形式で表される分布の導出に利用した

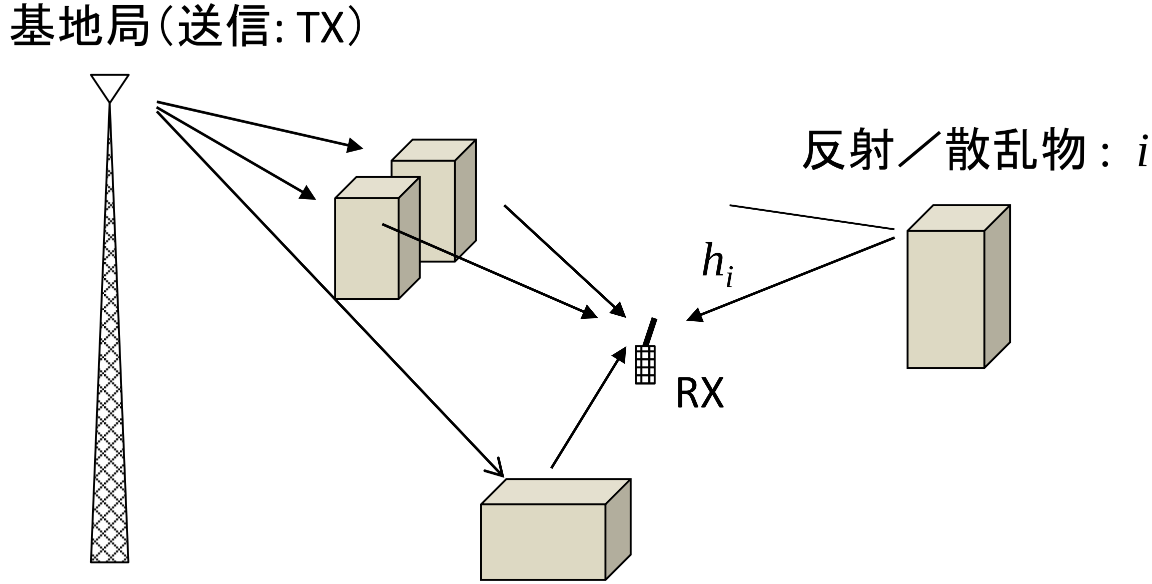
それが目的だと、閉形式に解けるケースが限られており、
応用に広がりがない
（ゆえに、この手法を解析に用いている例を最近見ない）

しかし、ハンケル変換形の特性関数さえ求められれば、
確率密度関数も、累積分布関数も一回の数値積分で求められる

いまは、パソコン性能も上がり、一回の数値積分くらいは、
演算実行状の隘路にはならない

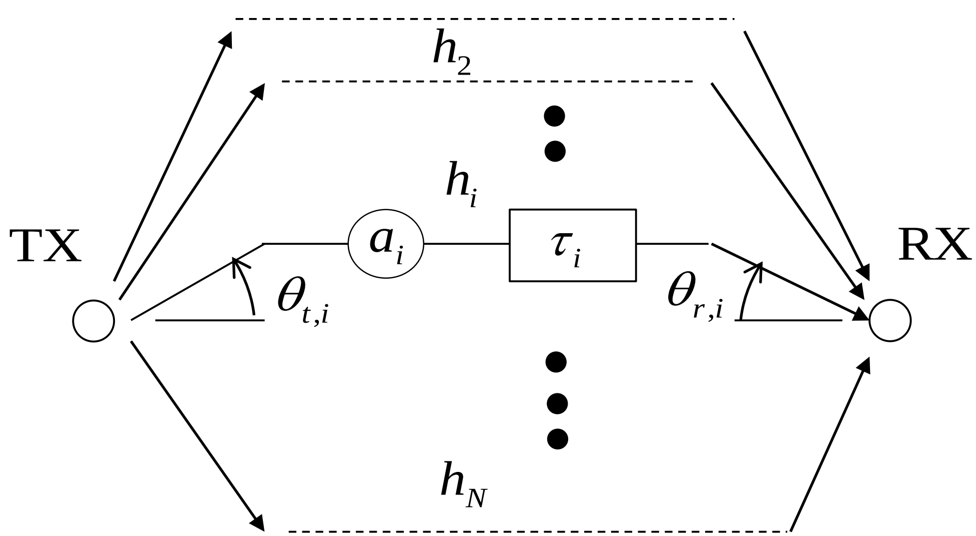
電波環境のレイトレーシング

レイトレーシング



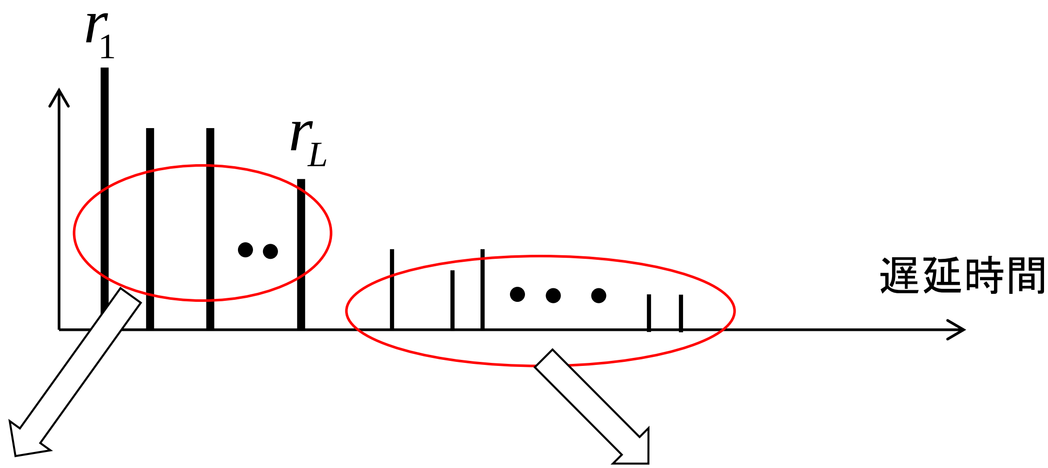
得られる情報
（各パス i に対して）

h_i ：インパルス応答
a_i ：複素振幅
τ_i ：遅延時間
$\theta_{t,I}$ ：放射角度
$\theta_{r,I}$ ：入射角度



主要 L 波と、残りをまとめた不規則変動の和の分布

インパルス応答



合成信号

$$a = r_1 e^{j\phi_1} + r_2 e^{j\phi_2} + \cdots + r_L e^{j\phi_L} \quad + \quad r_{L+1} e^{j\phi_{L+1}} + \cdots + r_N e^{j\phi_N}$$

主要な L 波

まとめて一つの不規則波
（振幅:レイリー分布）

$$g_{1\sim L}(k) = \prod_{i=1}^{L} J_0(kr_i)$$

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2} \right) \quad \left(\sum_{i=L+1}^{N} r_i^2 \equiv 2\sigma^2 \right)$$

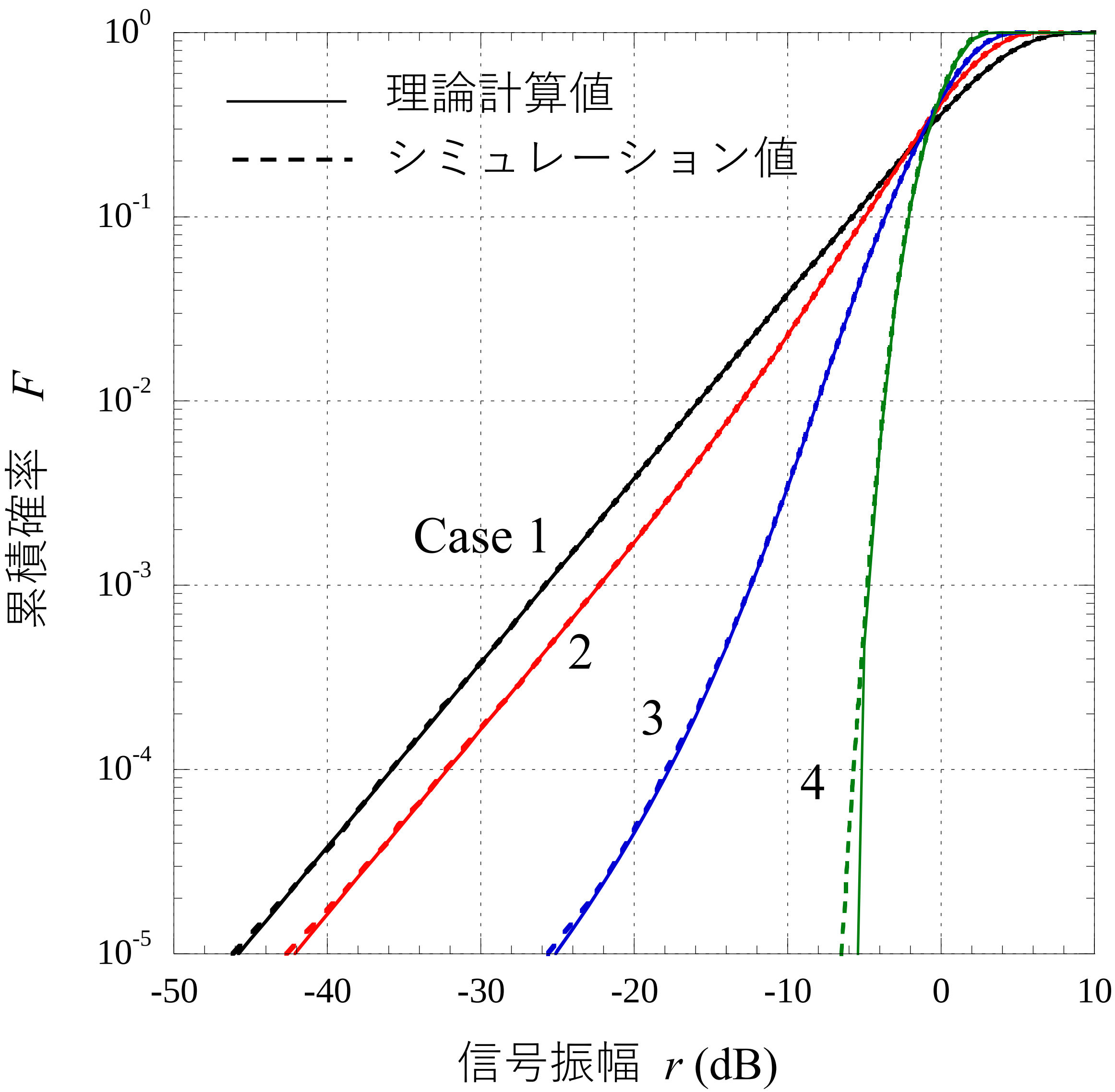
$$\downarrow$$

$$g_{L+1\sim N}(k) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2} \right)$$

$$\leftarrow$$

$$g(k) = \boxed{\exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2} \right) \prod_{i=1}^{L} J_0(kr_i)}$$

３定常波＋１不規則波の分布の例



設定環境

Case	r_1	r_2	r_3	ΔP
1	1	0.5	0.3	0.5
2	1	0.4	0.3	0.1
3	1	0.3	0.2	0.05
4	1	0.2	0.1	0.01

$\left(\Delta P \equiv 2\sigma^2\right)$

スライド 21 で説明した③の分布（２定常成分＋不規則変動成分の合成振幅の分布）もこの計算手法で求められる

まとめ

短波通信の時代に仲上稔が編み出した三つの確率分布を後世につないでゆきたいため、歴史の中継ぎ役として、第一回の本発表では、n 分布を取り上げた。

① 仲上は、多数の同程度の強さの波の集まりに一つだけ強い波が加わった環境での合成信号の振幅の確率分布を、ハンケル変換形特性関数を用いて理論的に解析し、新しい分布（(10)式：n 分布）を見出した。電気通信学会雑誌、1940年。

② Riceは、無変調信号に雑音が加わった場合の信号強度の確率分布を、非心２次元正規分布の振幅の分布として(13)式を導いた。BSTJ, 1945年.

③ 時代背景や論文誌の国際性の違いから、世界（主に欧米）では、ライス分布と呼ばれて世に広まった。その後、我が国の先達の努力によって、仲上-ライス分布と呼ばれるようになり、これが定着しつつあるが、楽観できる状況ではない。仲上-ライス分布の名前が、しっかり定着するよう、引き続きサポートしてほしい。

④ 仲上が確率分布の解析に用いたハンケル変換形特性関数は、不規則位相問題への応用に適している。いったん特性関数が得られてしまえば、確率密度関数や累積分布関数に戻すには一回の積分ですみ、パソコン性能の向上が著しい今日においては、そのような数値積分が計算の隘路になることはない。そこで、この応用として、マルチパス環境レイトレーシングの後処理として、素波の合成信号の振幅の確率分布を求めたい場合に有効であることを示した。

レイリー分布と仲上の三つの分布との関係