

仲上三分布($n \cdot q \cdot m$ 分布) 温故知新

Part 2 : q 分布

唐沢 好男

発表概要

太平洋戦争に翻弄された昭和の激動期(1930年代後半から1940年代)に、国際電気通信株式会社(当時の国策会社)の技術職員であった仲上稔(敬称略)は、短波の受信技術の研究開発の中で三つの確率分布(n , q , m 分布)を編み出した。前回は発表では、このうちの n 分布(現在の仲上-ライス分布)の解説を行った。本発表では、 q 分布の解説を行なう。 q 分布も n 分布と同様に、純粹に理論的な考察から生まれた分布であり、現在では仲上-ホイト分布と呼ばれている。マルチパスフェージング環境のモデリングにおいて、 q 分布(仲上-ホイト分布)が n 分布(仲上-ライス分布)や m 分布(仲上 m 分布)ほどには取り上げられないのは、その適用環境の特殊性にある。以下、その誕生の歴史を踏まえて、 q 分布の特徴を明らかにしてゆきたい。

発表の内容（歴史の中継ぎ役として）

1. 仲上が編み出した三つの分布
2. 時代背景
3. 前提条件と仲上による q 分布の導出
4. ホイトの研究とホイト分布
5. 仲上による q 分布の新解釈
6. q 分布に対する補足
7. むすび

仲上稔氏が編み出した三つの確率分布
(わが国発、電波伝搬の記念碑的分布)

n分布(電気通信学会雑誌; 1940年) → 仲上-ライス分布
(S. O. Rice, BSTJ, 1945)

q分布(電気通信学会雑誌; 1942年) → 仲上-ホイト分布
(R. S. Hoyt, BSTJ, 1947)

m分布(電気通信学会雑誌; 1943年) → 仲上m分布、仲上分布

- ・n分布とq分布は純粹に理論的な考察から得られた分布
- ・m分布は短波のフェージングデータ解析から発見的に見出された分布
しかし、m分布には理論的な意味でも重要な分布
- ・三つの分布には、近似の意味で、深い関係がある

仲上氏が研究開発に従事したころの時代背景

1930年代後半～1940年代

（昭和の激動期：太平洋戦争を挟んだその前後）

無線通信（国際通信）は短波通信の時代

（HF: 3～30MHz, 電離層伝搬）

所属： [国際電気通信株式会社](#)（当時の国策会社）

勤務地： 福岡受信所（現埼玉県ふじみ野市）内にある研究棟

伝搬データ： 記録紙やブラウン管の時代、データ処理も手作業
（現代は、デジタル機器による自動収録・自動処理の時代）

この詳細は、技術レポート TR-YK-076「[仲上三分布への歴史探訪](#)」にまとめている。
PDFの入手は、唐沢研究室ホームページより

対象とするフェージング環境： 不規則位相問題

多数の波の
合成信号

$$a = r_1 e^{j\theta_1} + r_2 e^{j\theta_2} + \dots + r_N e^{j\theta_N}$$

$$r = |a| = \sqrt{\sum_{i=1}^N r_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{i' \neq i \\ i'=1}}^N r_i r_{i'} \cos(\theta_{i'} - \theta_i)}$$

求めたいもの： 振幅(包絡線レベル) r の確率分布

前提条件(不規則位相問題)

素波の数 $N \rightarrow$ 十分多い

各素波の振幅 $r_i \rightarrow$ 一定(時間変化しない)

(1) 各素波の位相 θ_i : $0 \sim 2\pi$ で一様に分布

r_i の大きさ同程度 $\rightarrow$ レイリー分布
一つだけ大きい $\rightarrow$ n分布

(2) 各素波の位相 θ_i : 2π より小さい $\rightarrow$ q分布

仲上によるq分布の導出（仲上稔、佐々木哲夫、1942年）

$$r = |a| \quad a = r_1 e^{j\theta_1} + r_2 e^{j\theta_2} + \cdots + r_N e^{j\theta_N}$$

前提条件(不規則位相問題)

素波の数 $N \rightarrow$ 十分多い

各素波の振幅 $r_i \rightarrow$ 一定(時間変化しない)

各素波の位相 θ_i の変化範囲: 2π より小さい

確率分布の導出

- ・理論的に非常に難しい問題
- ・解くためには多くの仮定を導入
- ・原著論文の書き方は非常に難解で、理解するのが大変

その後には出版された本(研究報告書)では、これが整理された書き方(導出過程の説明が分かりやすい)になっている

仲上による分布導出の概要

(導出過程の詳細は原著論文や報告書を見てほしい)

$$x = \sum_{i=1}^N r_i \cos \theta_i, \quad y = \sum_{i=1}^N r_i \sin \theta_i$$

素波の位相: θ_i
 θ_i を中心に比較的狭い範囲で動く

$$r \left(= \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

振幅 r の確率密度関数

$$f(r) = \frac{r}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J_0 \left(r \sqrt{\mu^2 + \nu^2} \right) \prod_{i=1}^N g_i(\mu, \nu) d\mu d\nu$$

ハンケル変換形特性関数(2変数型)

$$g_i(\mu, \nu) = \int_{\theta_{i,\min}}^{\theta_{i,\max}} f_{\theta,i}(\theta_i) \exp \left\{ -j(\mu \cos \theta_i + \nu \sin \theta_i) r_i \right\} d\theta_i$$

$$\prod_{i=1}^N g_i(\mu, \nu) \approx \exp(-jA_{10}\mu - jA_{01}\nu - 2A_{11}\mu\nu - A_{20}\mu^2 - A_{02}\nu^2)$$

$$A_{10} = \sum_{i=1}^N r_i \langle \cos \theta_i \rangle \cos \theta_i \approx 0$$

$$A_{01} = \sum_{i=1}^N r_i \langle \cos \theta_i \rangle \sin \theta_i \approx 0$$

$$A_{11} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N r_i^2 \langle \cos 2\theta_i \rangle \sin 2\theta_i \approx 0$$

$$A_{20} = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 + \sum_{i=1}^N r_i^2 \langle \cos 2\theta_i \rangle \cos 2\theta_i \right)$$

$$A_{02} = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 - \sum_{i=1}^N r_i^2 \langle \cos 2\theta_i \rangle \cos 2\theta_i \right)$$

変数 μ, ν の範囲が狭く、
 r_i に大きな差が無く
 N が十分大きい
 という近似の下で

求めるべき確率密度関数

$$f(r) \approx \frac{r}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-A_{20}\mu^2 - A_{02}\nu^2) J_0\left(r\sqrt{\nu^2 + \mu^2}\right) d\mu d\nu$$

$$= \frac{r}{2\sqrt{A_{02}A_{20}}} \exp\left\{-\frac{r^2}{8}\left(\frac{1}{A_{20}} + \frac{1}{A_{02}}\right)\right\} I_0\left\{\frac{r^2}{8}\left(\frac{1}{A_{20}} - \frac{1}{A_{02}}\right)\right\}$$

q分布

q分布の両端

$$A_{20} = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 + \sum_{i=1}^N r_i^2 \langle \cos 2\theta_i \rangle \cos 2_0 \theta_i \right)$$

$$A_{02} = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 - \sum_{i=1}^N r_i^2 \langle \cos 2\theta_i \rangle \cos 2_0 \theta_i \right)$$

$$A_{02} \approx A_{20}; \eta \rightarrow 1 \quad (\eta \equiv A_{02} / A_{20})$$

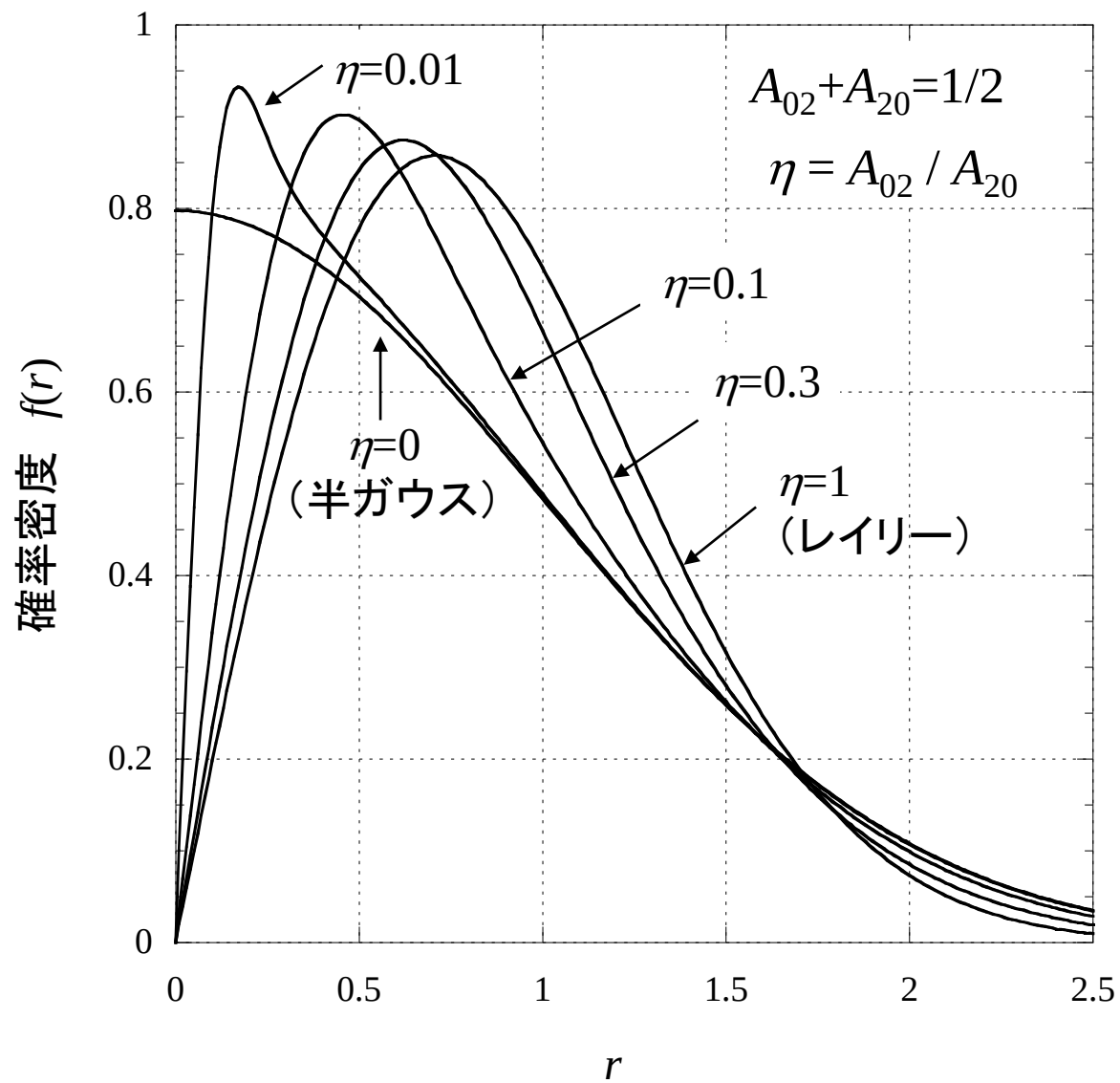
$$f(r) \rightarrow \frac{r}{2A_{20}} \exp\left(-\frac{r^2}{4A_{20}}\right) \quad (\text{レイリー分布})$$

$$A_{02} \ll A_{20}; \eta \rightarrow 0$$

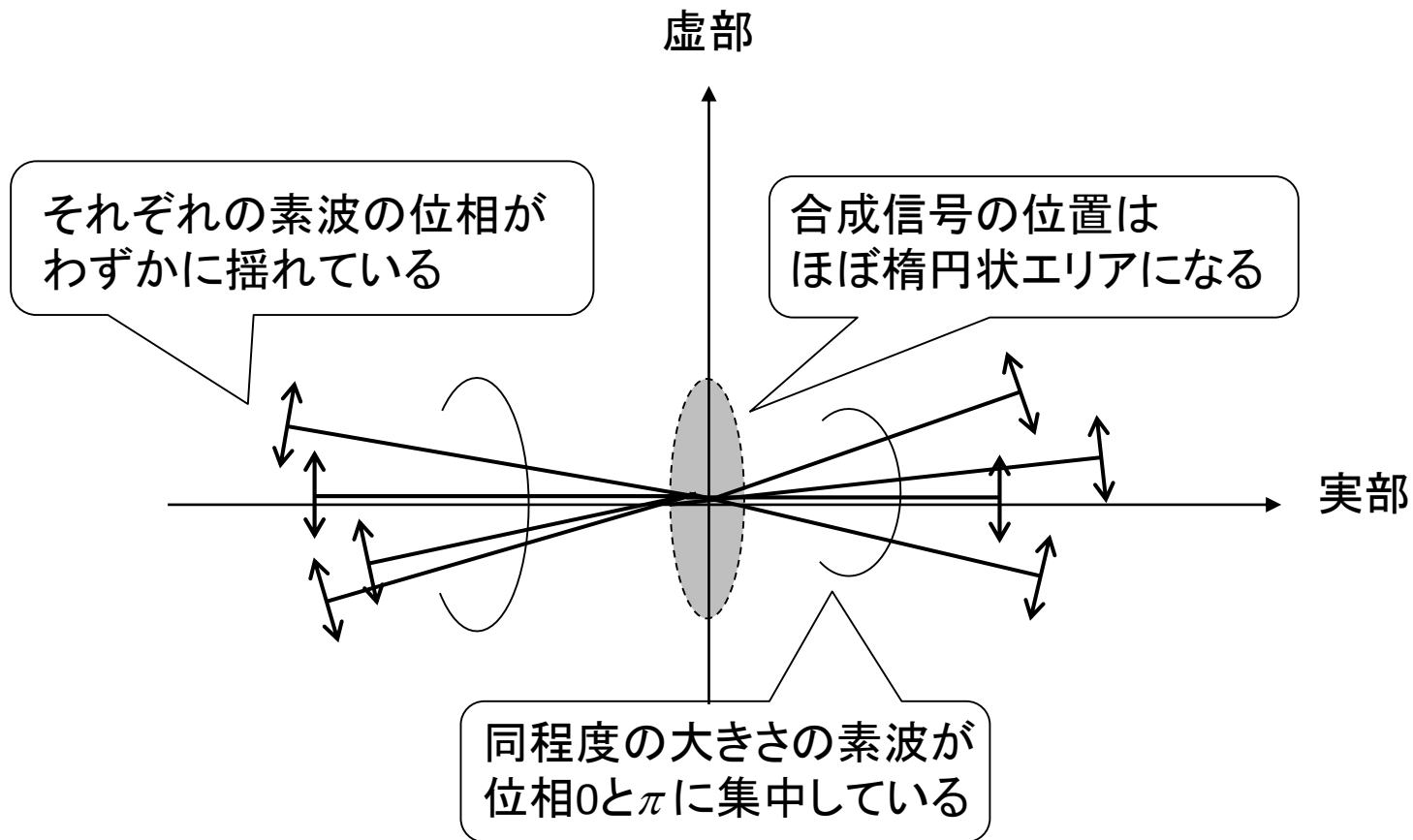
$$f(r) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi A_{02}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4A_{20}}\right) \quad (\text{半ガウス分布})$$

$$\left(\because I_0(x) \approx \frac{e^{|x|}}{\sqrt{2\pi|x|}} \quad (|x| \gg 1) \right)$$

q分布の確率密度関数の計算例

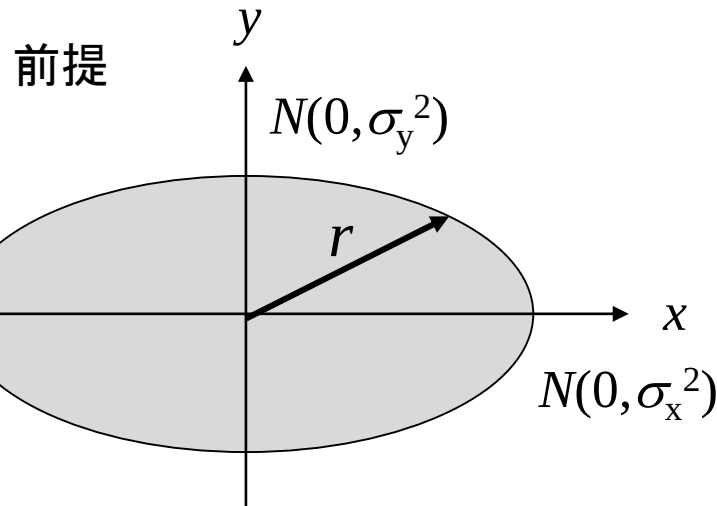


レイリー分布より深いフェージングが生まれる環境 (半ガウス分布に近い環境)の例



ホイトによる分布の導出 (R. S. Hoyt, BSTJ, 1947)

$$r (= \sqrt{x^2 + y^2})$$



$$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right) \right\}$$

$$f_{r\theta}(r, \theta) = \frac{r}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp \left(-\frac{r^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sigma_x^2} + \frac{\sin^2 \theta}{\sigma_y^2} \right) \right)$$

$$f_r(r) = \int_0^{2\pi} f_{r\theta}(r, \theta) d\theta = \frac{r}{\sigma_x\sigma_y} \exp \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2} \right) r^2 \right) I_0 \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_x^2} - \frac{1}{\sigma_y^2} \right) r^2 \right)$$

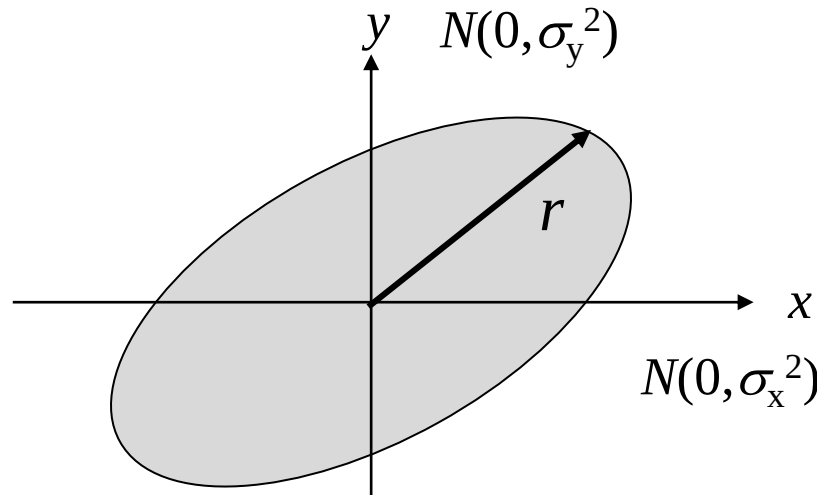
ホイト分布 (q分布と同じ形)
 → 伸上-ホイト分布

$$\left(\because I_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{t \cos \phi} d\phi \right)$$

仲上による q 分布の補足

(M. Nakagami, Radio Sci. Jour. of Research, 1964)

(1) ホイトが導いた方法の一般化



x方向とy方向の
変化が正規分布し、かつ、
有相関

(楕円形状になることには
変わりがないので
q分布になることは自明)

(2) 振幅変動に相関を有する2波レイリー波の合成信号の振幅の確率分布

二つのレイリー波の合成信号の振幅の確率分布

前提条件： 二つのレイリー波の合成において

- (1) 振幅変動に相関がある： 電力変動の相関係数 ρ_P
- (2) 位相に相関がない

結合確率分布

$$f(r_1, r_2) = \frac{4r_1 r_2}{(1 - \rho_P) \Omega_1 \Omega_2} \exp \left\{ -\frac{1}{1 - \rho_P} \left(\frac{r_1^2}{\Omega_1} + \frac{r_2^2}{\Omega_2} \right) \right\} I_0 \left(\frac{2\sqrt{\rho_P} r_1 r_2}{(1 - \rho_P) \sqrt{\Omega_1 \Omega_2}} \right)$$

ハンケル変換形特性関数

$$g(k) = \int_0^\infty \int_0^\infty J_0(kr_1) J_0(kr_2) f(r_1, r_2) dr_1 dr_2$$

振幅変動の確率密度関数

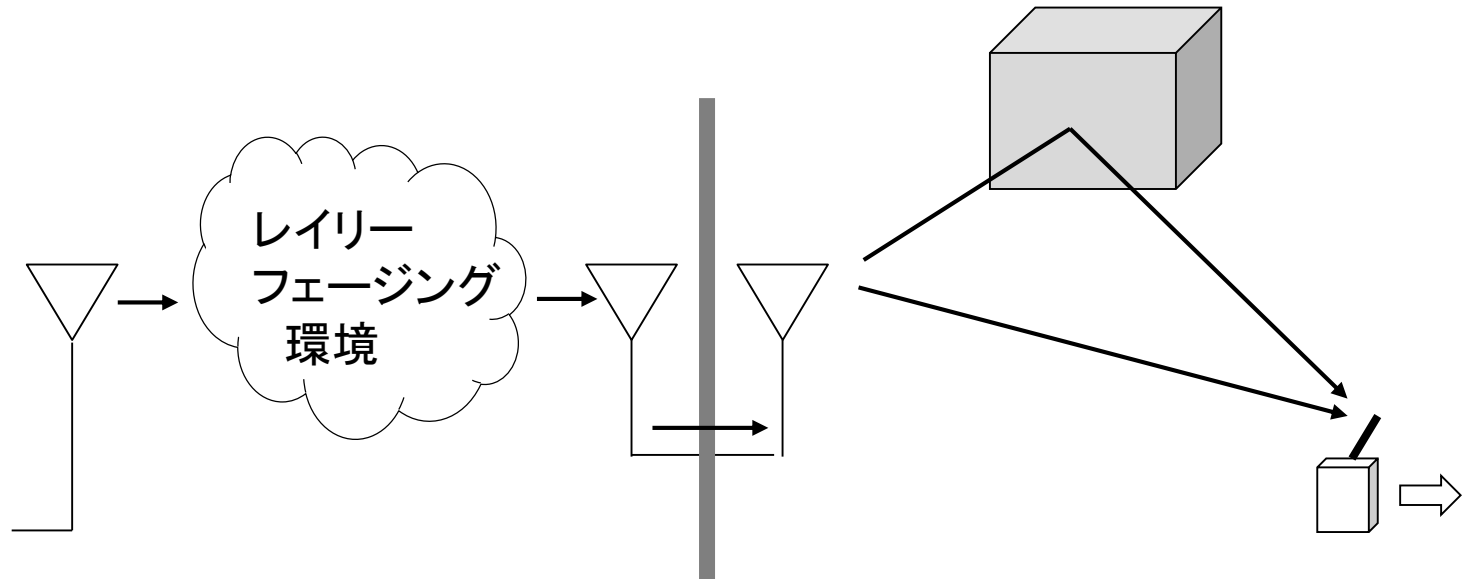
$$f(r) = r \int_0^\infty g(k) k J_0(rk) dk = \exp \left(-\frac{(\Omega_1 + \Omega_2) k^2}{4} \right) I_0 \left(\frac{\sqrt{\rho_P \Omega_1 \Omega_2} k^2}{2} \right)$$

$$= \frac{2r}{\sqrt{\alpha\beta}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) r^2 \right) I_0 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right) r^2 \right)$$

$\Omega_1 = \Omega_2, \rho_P = 1$ で
半ガウス分布

$$\alpha = \Omega_1 + \Omega_2 + 2\sqrt{\rho_P \Omega_1 \Omega_2} \quad \beta = \Omega_1 + \Omega_2 - 2\sqrt{\rho_P \Omega_1 \Omega_2}$$

レイリー分布の合成によってq分布が現れるフェージング環境の例 (レイリー分布より深い変動が生じる環境)



無線中継回線への応用

振幅変動に相関があり、
位相変動に相関のない
二つのレイリー波の合成

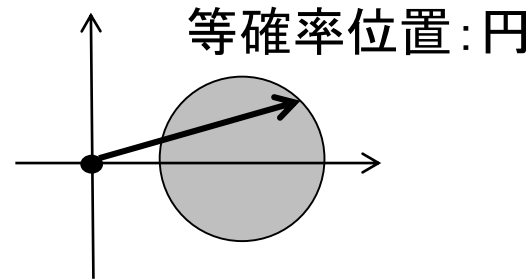
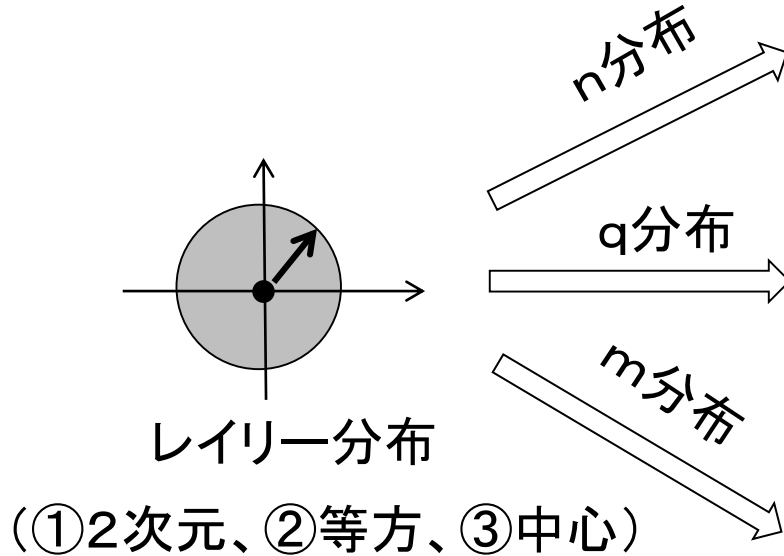
一般化
→ {
 ダブルレイリー分布
 ガンマ-ガンマ分布

まとめ

短波通信の時代に仲上稔が編み出した三つの確率分布のうち、本発表では、q分布を取り上げた。

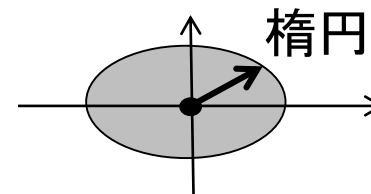
- ① 仲上と佐々木は多数の素波の集まりにおいて、それぞれの位相の変化幅が 2π より小さい場合の合成信号の振幅の確率分布を、種々の仮定のもと理論的に解析し、新しい分布(q分布)を見出した。電気通信学会雑誌、1942年。
- ② Bell研のホイトは、数学問題として(＝応用を述べない形で)、標準偏差が異なる2次元正規分布の振幅の分布として同じ式を導いた。BSTJ, 1947年。
- ③ 仲上等の発表のほうが5年早いのであるが、時代背景や論文誌の国際性の違いから、世界(主に欧米)では、ホイト分布と呼ばれることが多い。ただ、今日では、IEEE論文でも、Nakagami-Hoyt distribution、あるいはNakagami-q distributionで通用している。
- ④ q分布(仲上-ホイト分布)はレイリー分布より深い変動を表し、上記①の環境とは別に、2波レイリー波の干渉問題にも現れる。この場合は、2波のレイリー波の振幅 r には相関があって、位相には相関がないことが前提になるので、レイリー変動波の中継回線など、適用環境は少し特殊である。
- ⑤ ②で述べたホイトの定式化から明らかなように、伝搬モデルへの応用から離れて見れば、この確率分布が現れそうな土俵は他にもありそうで、波及性が期待できる。

レイリー分布と仲上の三つの分布との関係



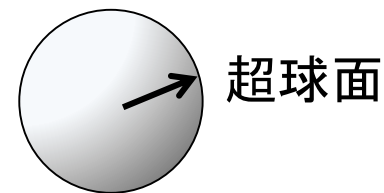
【6月AP研発表】

(①2次元、②等方、③非中心)



【今回発表】

(①2次元、②非等方、③中心)



【8月AP研】

(①多次元、②等方、③中心)