AP研 (Sept. 01, 2023)

仲上三分布（n･q･m分布）温故知新

Part 3 : m分布

唐沢　好男

概要

仲上稔は、昭和の激動期（1930年代後半から1940年代）、短波のフェージングの研究の過程において、今も、マルチパスフェージングの基本モデルとして生き続ける三つの分布を編み出した。前々回及び前回で取り上げたn分布（仲上−ライス分布）とq分布（仲上−ホイト分布）、そして今回で述べるｍ分布（仲上ｍ分布）である。仲上を世界的に有名にしているのはこのｍ分布であり、Nakagami distribution と言えばこれを指す。

ｍ分布は生まれ方の経緯がn, q両分布とは違っている。n分布とq分布は純粋に理論的考察から導かれたものであるが、ｍ分布は短波のフェージングデータに現れた統計的な性質に仲上が気づいた結果として生まれた分布で、経験則に基づいている。しかし、そのようにして生まれた分布ではあるが、ある重要な理論分布としての位置づけを持つ。

本発表では、ｍ分布誕生の経緯、現在でもマルチパスフェージングの基本分布として活用されている理由、n分布、q分布との近似関係、さらには、レイリー分布から見たn、q、ｍ分布の理論的な関係をまとめている。

なお、本発表の中での分布の呼び方に関しては、n分布、q分布と比較するような際には「ｍ分布」で、今の時代に呼ばれている仲上−ライス分布、仲上−ホイト分布と比べる際には「仲上ｍ分布」と呼ぶ

発表の内容 （歴史の中継ぎ役としての）

１. 仲上稔氏が編み出した三つの分布

２. 時代背景

３. m分布の誕生

４. 近似分布としての性質

５. 理論分布としての位置づけ

６. むすび

仲上稔氏が編み出した三つの確率分布（わが国発、電波伝搬の記念碑的分布）

n分布（電気通信学会雑誌；1940年）　→　仲上-ライス分布
(S. O. Rice, BSTJ, 1945)

q分布（電気通信学会雑誌；1942年）　→　仲上-ホイト分布
(R. S. Hoyt, BSTJ, 1947）

m分布（電気通信学会雑誌；1943年）　→　仲上m分布、仲上分布

・n分布とq分布は純粋に理論的な考察から得られた分布
・m分布は短波のフェージングデータ解析から発見的に見出された分布
　しかし、m分布には理論的な意味でも重要な分布
・三つの分布には、近似の意味で、深い関係がある

仲上氏が研究開発に従事したころの時代背景

1930年代後半～1940年代
（昭和の激動期：太平洋戦争を挟んだその前後）

無線通信（国際通信）は短波通信の時代
（HF: 3～30MHz, 電離層伝搬）

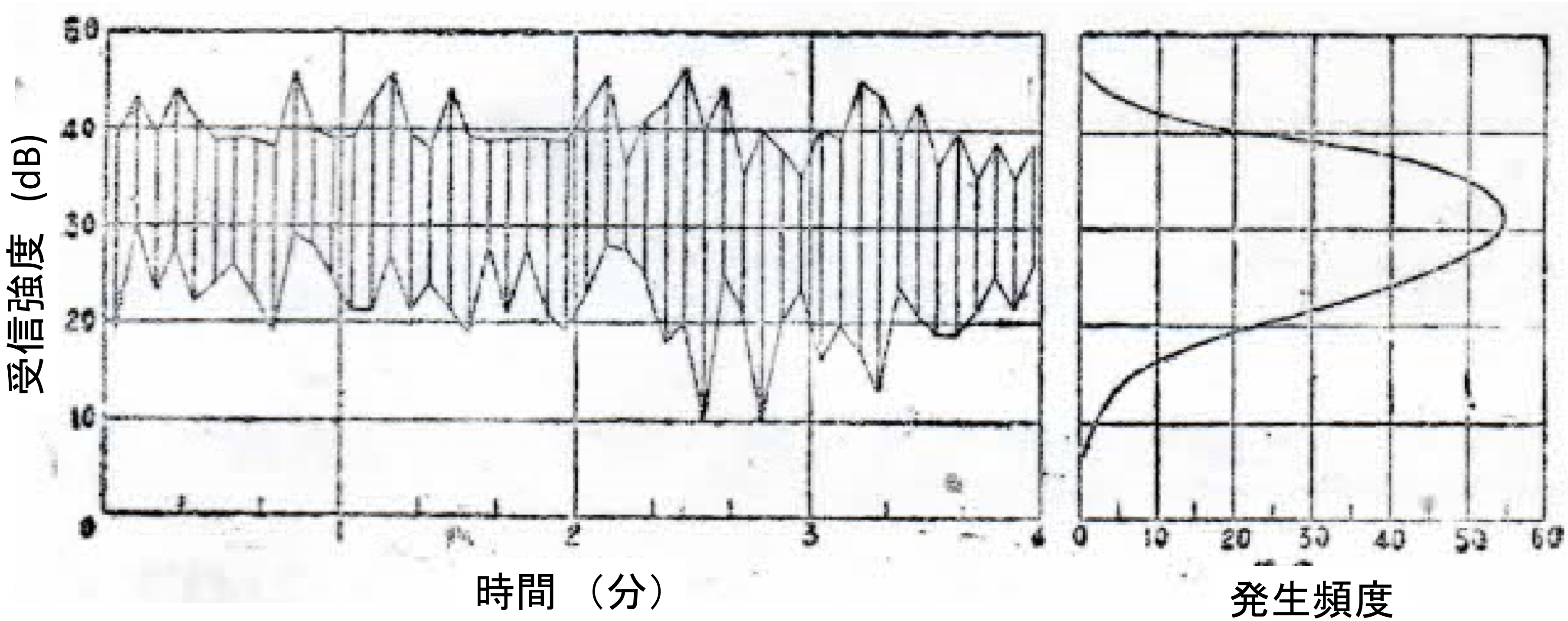
所属： 国際電気通信株式会社（当時の国策会社）

勤務地： 福岡受信所（現埼玉県ふじみ野市）

伝搬データ： 記録紙やブラウン管の時代、データ処理も手作業
（現代は、ディジタル機器による自動収録・自動処理の時代）

この詳細は、技術レポート TR-YK-076「仲上三分布への歴史探訪」にまとめている。
PDFの入手は、唐沢研究室ホームページより

短波フェージングデータと頻度分布特性（下記文献の図2．3より）



今のように自動記録したデータをパソコンが解析してくれる時代と違って、仲上が働いていた時代（1930～1940年代）には、測定データもブラウン管を見て写真を撮ったり自記記録計の紙データであったりで、解析もすべて手作業である。短波のフェージングの周期は数秒程度以下であるので、観測単位時間を３～５秒とし、その間における電界強度の変動の範囲（最大値と最小値）をもってその間の電界強度の変動を代表させ、これの数分間の連続記録（左）から頻度分布（右）を得ていたようである。

仲上稔, *短波の特性及び合成受信の研究*, 修教社, 1947.

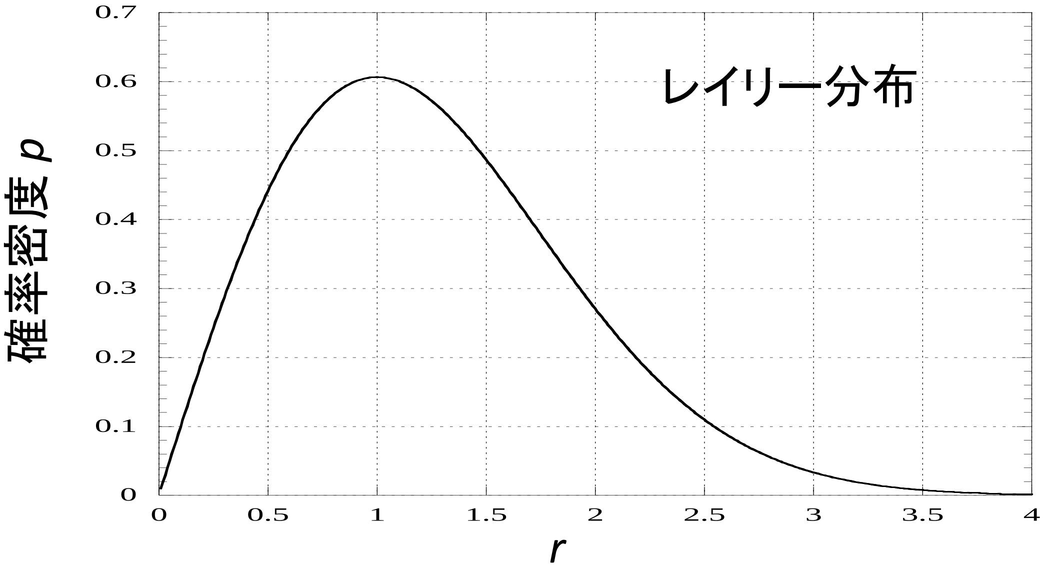
相対頻度グラフ（レイリー分布の確率密度関数（PDF）を直線で表す特殊方眼紙）

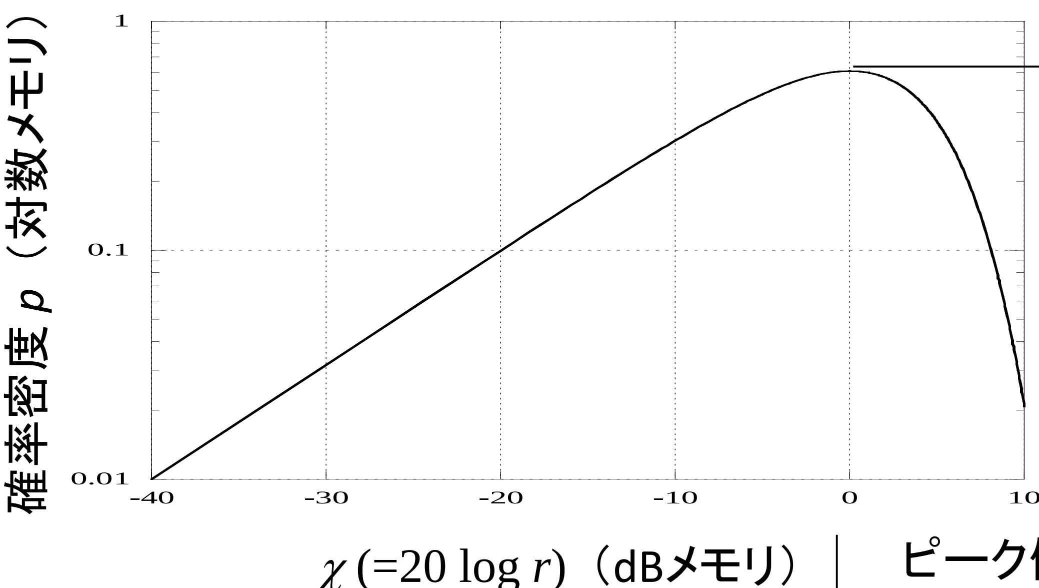
$$x = 1 + \frac{2}{M} - \exp\left(2\chi / M\right)$$

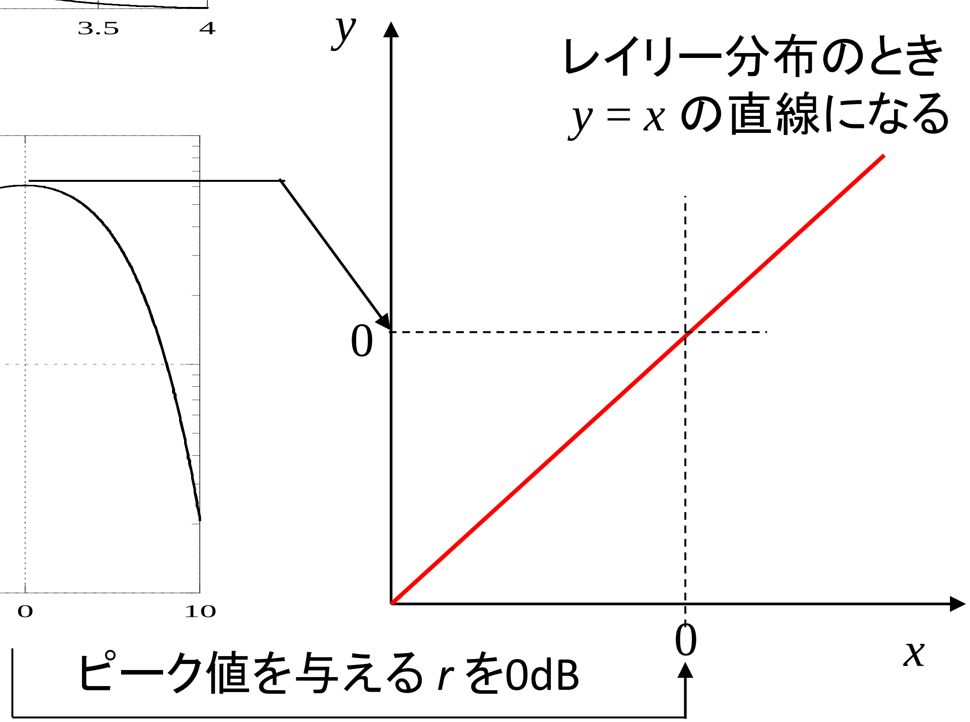
$$\left(M = 20\log_{10} e\right)$$

（χ<0のとき。$\chi\geq$0では-xに）

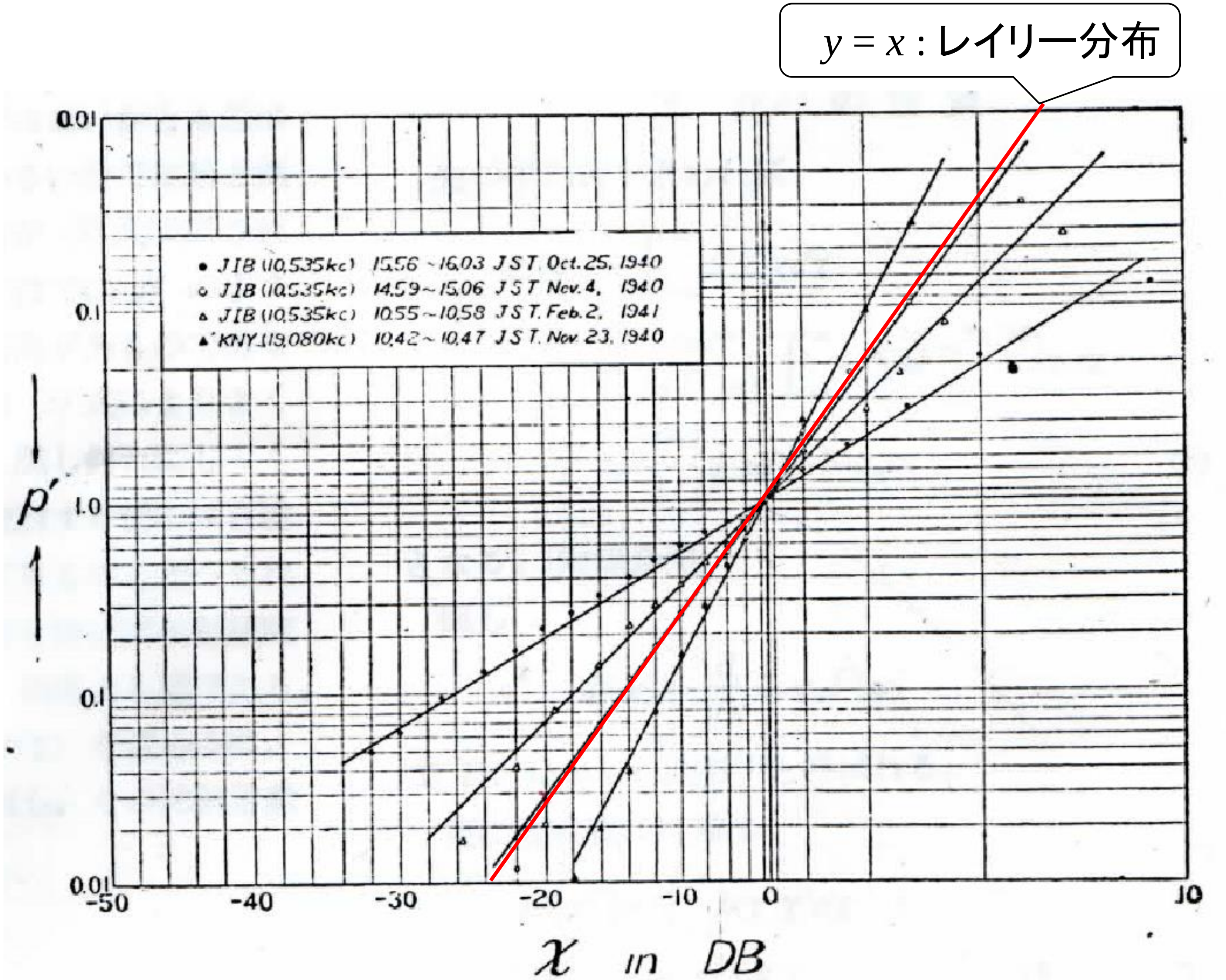
$$y = \begin{cases} \log_e p' & (\text{for } \chi \leq 0) \\ -\log_e p' & (\text{for } \chi > 0) \end{cases}$$







短波フェージングの相対頻度特性（その1：下記文献の図1より）



測定データから
どれも、直線に近い

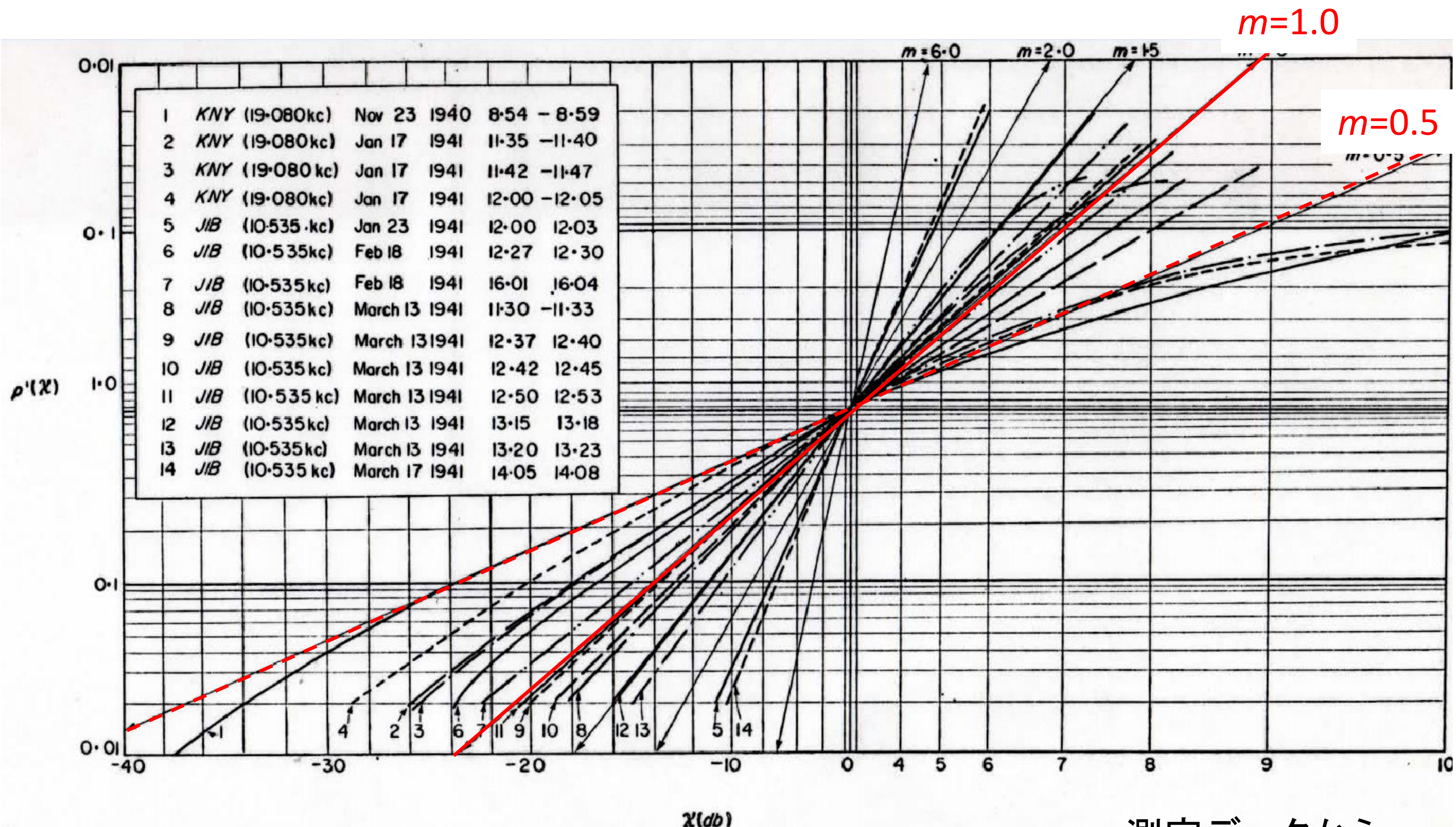
⇩

$y = mx$

の性質を発見
（パラメータ： m）

仲上稔, "短波によるフェージングの統計的性質," 電気通信学会誌, no. 239, pp. 145-150, 1943.

短波フェージングの相対頻度特性（その２：下記文献のFig. 2.1より）



測定データから

1） $y = mx$の直線に近い

2） $m \geq 0.5$

M. Nakagami, “The m-distribution; A general formula of intensity distribution of rapid fading,” in W. C. Hoffman, *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, Pergamon Press, pp. 3-36, 1960.

仲上m分布

Nakagami-m distribution / Nakagami distribution / The m distribution

（仲上稔、電気通信学会誌、1943）

仲上分布、m分布と呼ばれる場合もある。短波のフェージングデータの特性から見出された分布であるが、移動通信のモデルにも役立つ非常に汎用的な分布

相対頻度グラフから $y = mx$ を発見

確率分布の式の導出は研究会資料中に

$$f(r) = \frac{2m^m}{\Omega^m \Gamma(m)} r^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} r^2\right)$$

$$m \geq 0.5, \quad \Omega = \left\langle r^2 \right\rangle$$

式の形（見かけの複雑さに騙されないように）

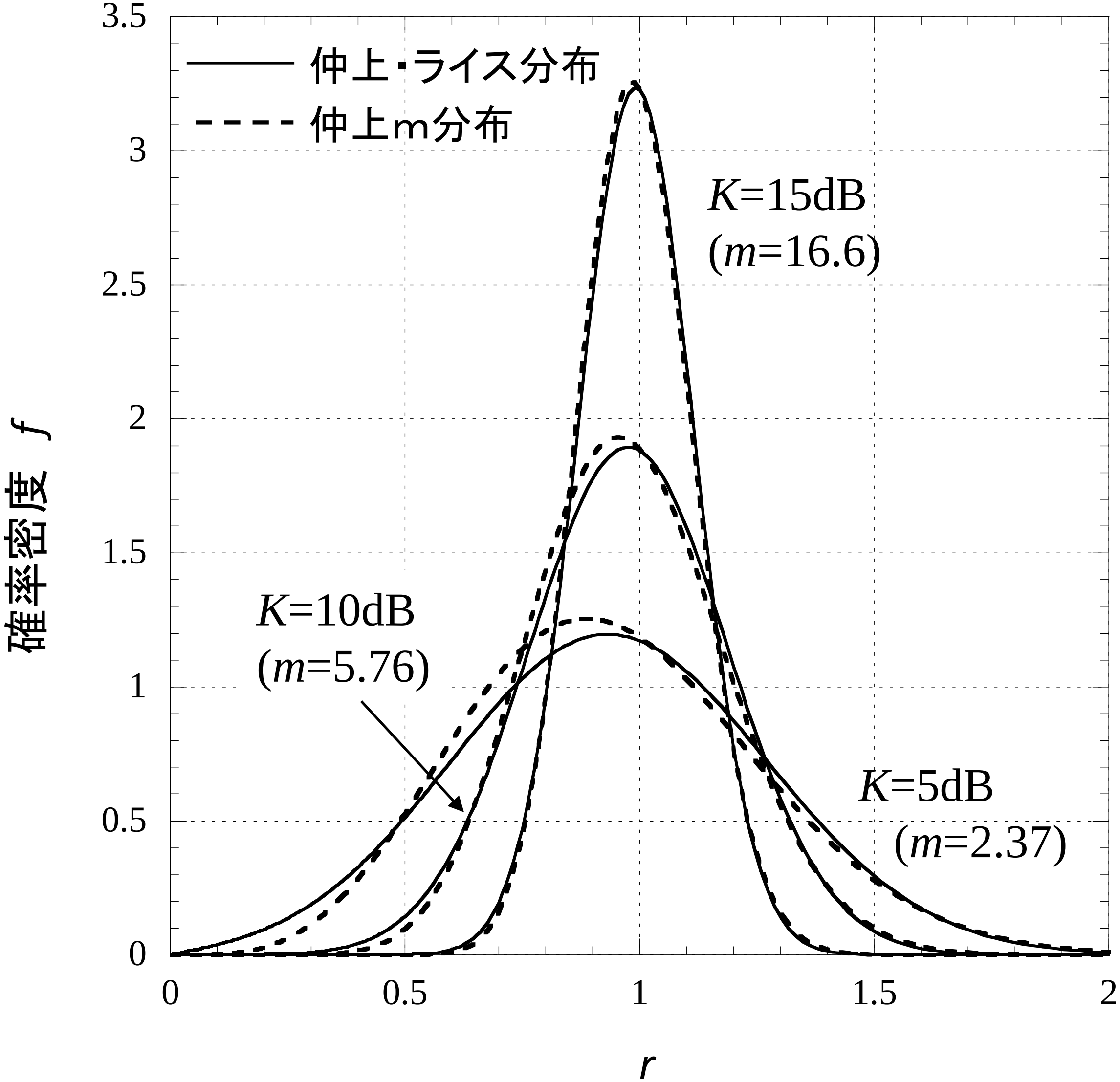
$$f(r) \propto r^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} r^2\right)$$

（m=1でレイリー分布
m=0.5で半ガウス分布）

仲上・ライス分布と分布の形が近い（近似関係にある）。
他と組み合わせての利用する場合に、仲上・ライス分布よりは、解析性に優れている。

仲上･ライス分布と仲上m分布の近似関係：PDFで見る

$\langle r^2 \rangle = a^2 + 2\sigma^2 = \Omega = 1$ （電力正規化）



パラメータ：m とK の換算

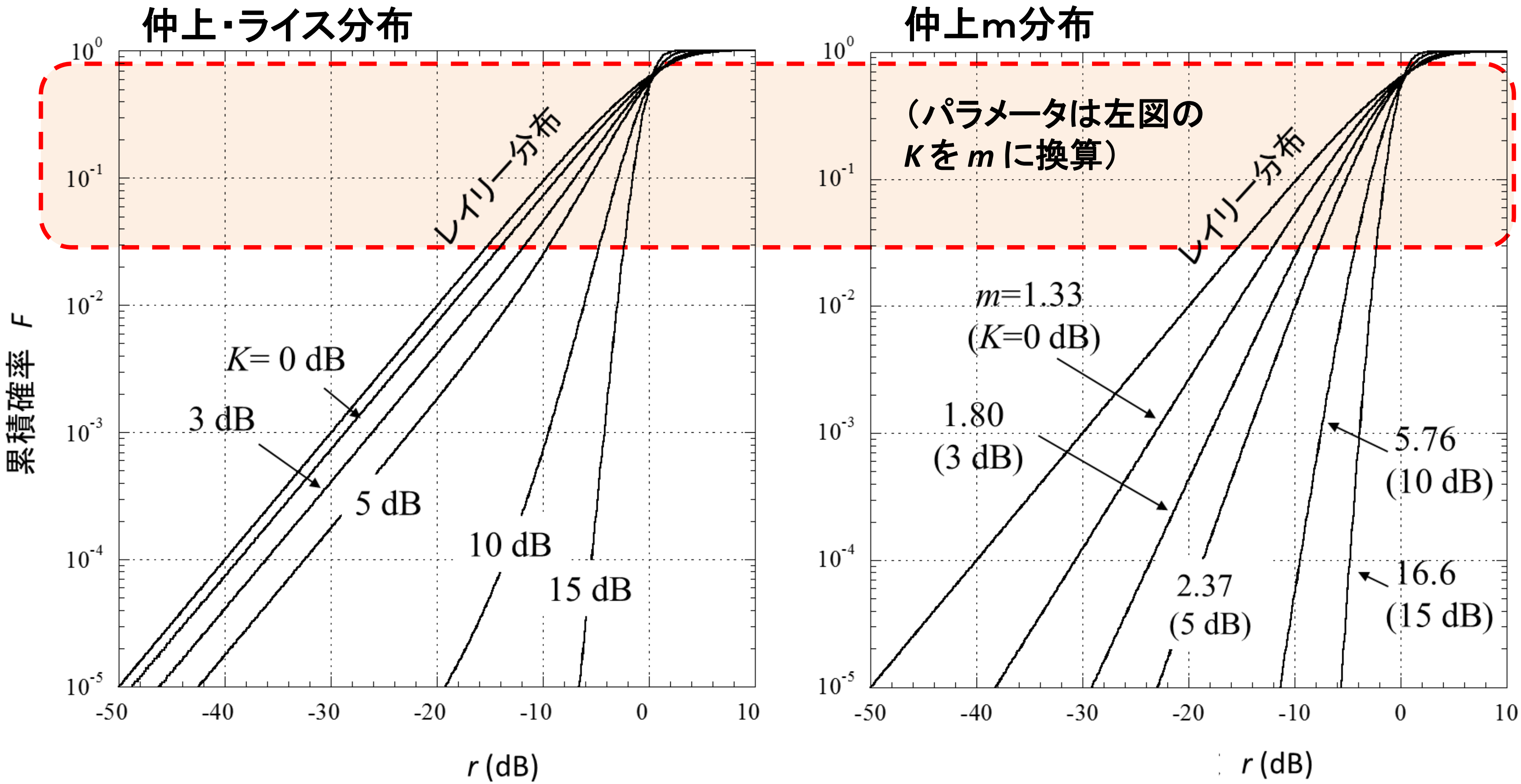
$$m(\geq 1) = \frac{(K+1)^2}{2K+1}$$

$$K = \sqrt{m^2 - m} + m - 1$$

全体的に見ると
良い近似関係

他の関数と組み合わせて使うとき、解析性が良いので、仲上･ライス分布の代わりにm分布が使われることもある

仲上・ライス分布と仲上m分布の近似関係：CDFで見る



良い近似関係にあるのは図の赤点線枠内あたり
分布の裾の方では、大きな違いが出ている

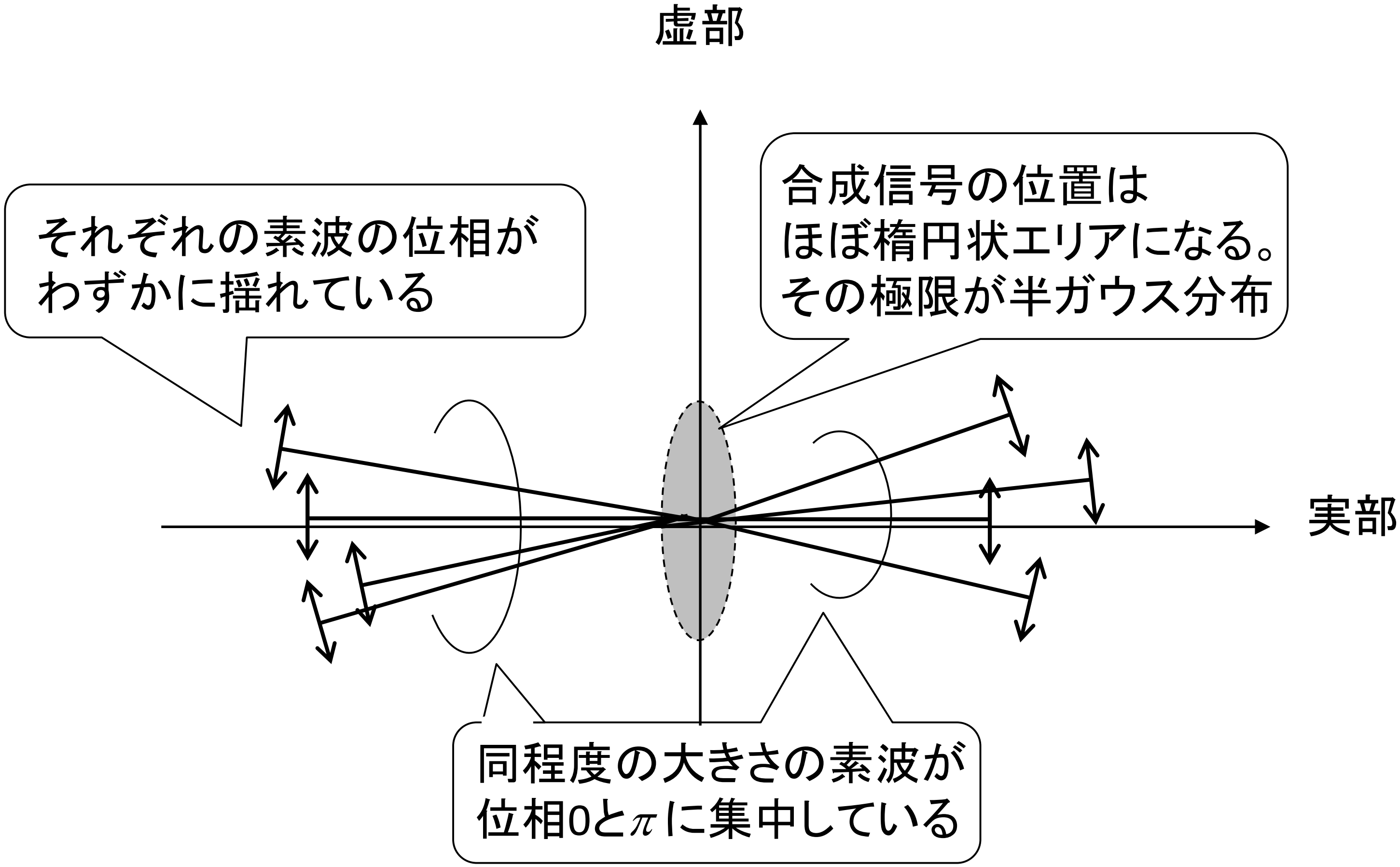
BER計算などの演算には、代用が大きな誤差を生むので注意

$0.5 \leq m < 1$ ではレイリー分布より深い落ち込み:どんな環境?

$$m = 0.5 \;\; \rightarrow \;\; f(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\Omega}\right)$$

半ガウス分布
(ガウス分布の正側のみの分布)

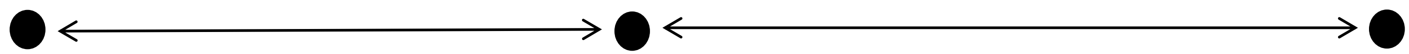
仲上q分布のときの説明図



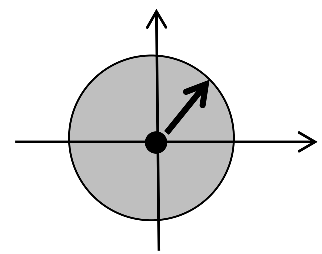
仲上m分布と近似関係にある分布

仲上m分布の世界

m = 1/2 1 ∞

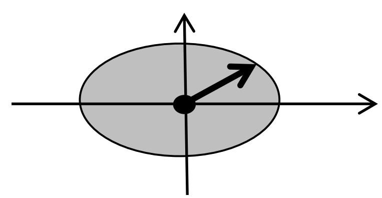


半ガウス分布

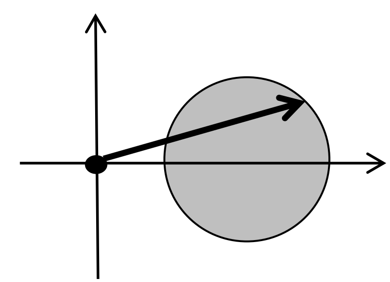


レイリー分布

近似関係にある分布



仲上・ホイト分布
$(0.5 \le m \le 1)$



仲上・ライス分布
$(m \ge 1)$

近似関係の理論的根拠：仲上稔他、"不規則位相問題について," 電学誌, 1953.11

仲上m分布の特徴は

・短波のフェージングで生まれた分布であるが、
　移動伝搬環境のフェージングの特性もよく表す（実用的分布）

・レイリー分布より深い変動をするフェージングもカバーしている

・様々な分布の近似分布として有用（数式処理に便利）

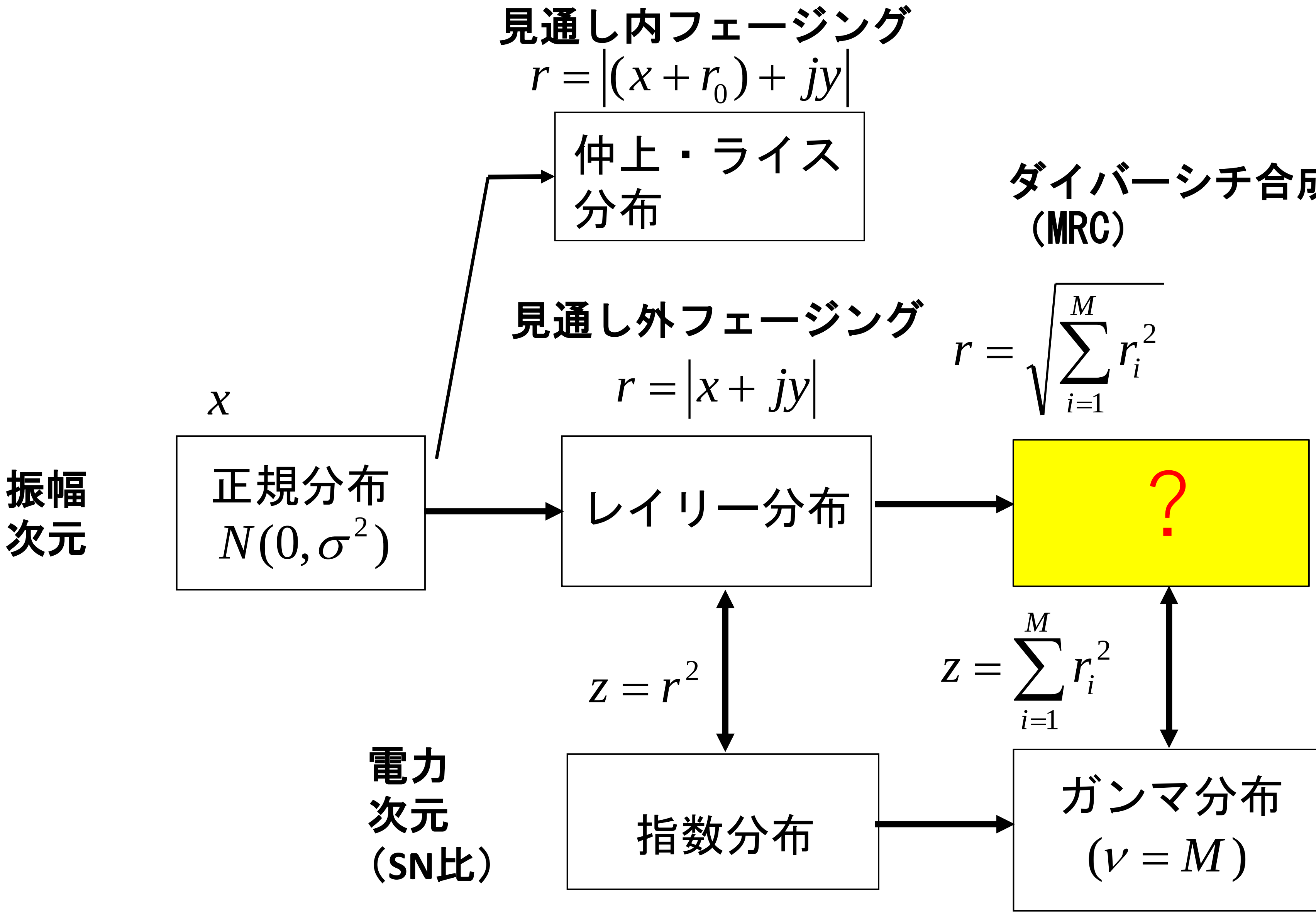
・その分布を生み出す物理環境をうまく描けない

→　仲上mフェージング環境を計算機シミュレーションで作りたい
　と言うときに悩む（例えば、位相分布は？）

（仲上自身、その意味付けへの苦闘が論文から読み取れる）

果たして、仲上m分布の実態（物理イメージ）は？

伝搬モデルに現われる正規分布とその仲間たち
（仲上m分布の位置付け）



前スライドの「？」部分には「仲上m分布」が入る

正規分布（ガウス分布）、レイリー分布、指数分布、ガンマ分布（カイ二乗分布）は、数学・物理分野で、20世紀初頭には既に知られていた分布

そのころ、誰かが、ガンマ分布を電力変動を表す分布と捉え、「その実効値（電圧次元）の分布は？」という思いに至れば、一つの理論分布として仲上m分布は、変数変換によってたちどころに得られていたであろう。

しかし、歴史はそうではなく、1940年代、電波工学者の仲上稔氏が短波のフェージングの性質として、実験データから経験的に導いたものであり、その誕生はドラマティックある（必要は発明の母）

（メモ：m分布では、パラメータmの範囲を0.5以上としているが、対応するガンマ分布のパラメータνの範囲は0以上である。伝搬モデルへの応用と言う意味で、仲上がmに加えた制約である）

仲上m分布は時代が変わっても、現在の移動通信の伝搬モデル（マルチパス伝搬モデル）の中に生き続けている。

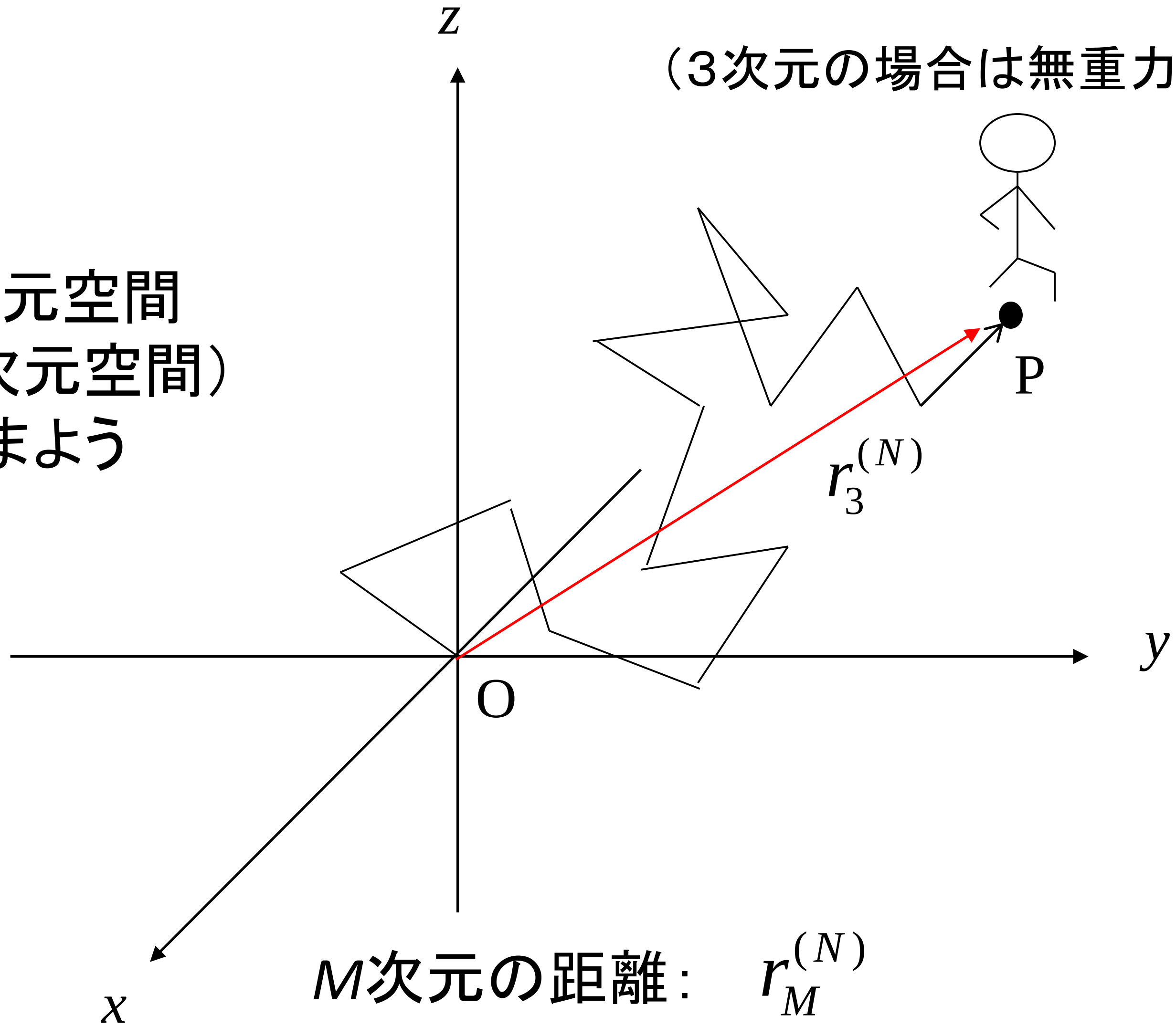
（メモ：仲上・ライス分布やLoo分布は理論に裏打ちされた環境を表すが、理論どおりに現れる電波環境は、実はどこにもないという意味において）

多次元空間のランダムウォークと仲上m分布

多次元空間のランダムウォークと仲上m分布

（3次元の場合は無重力空間）

多次元空間
（M次元空間）
をさまよう

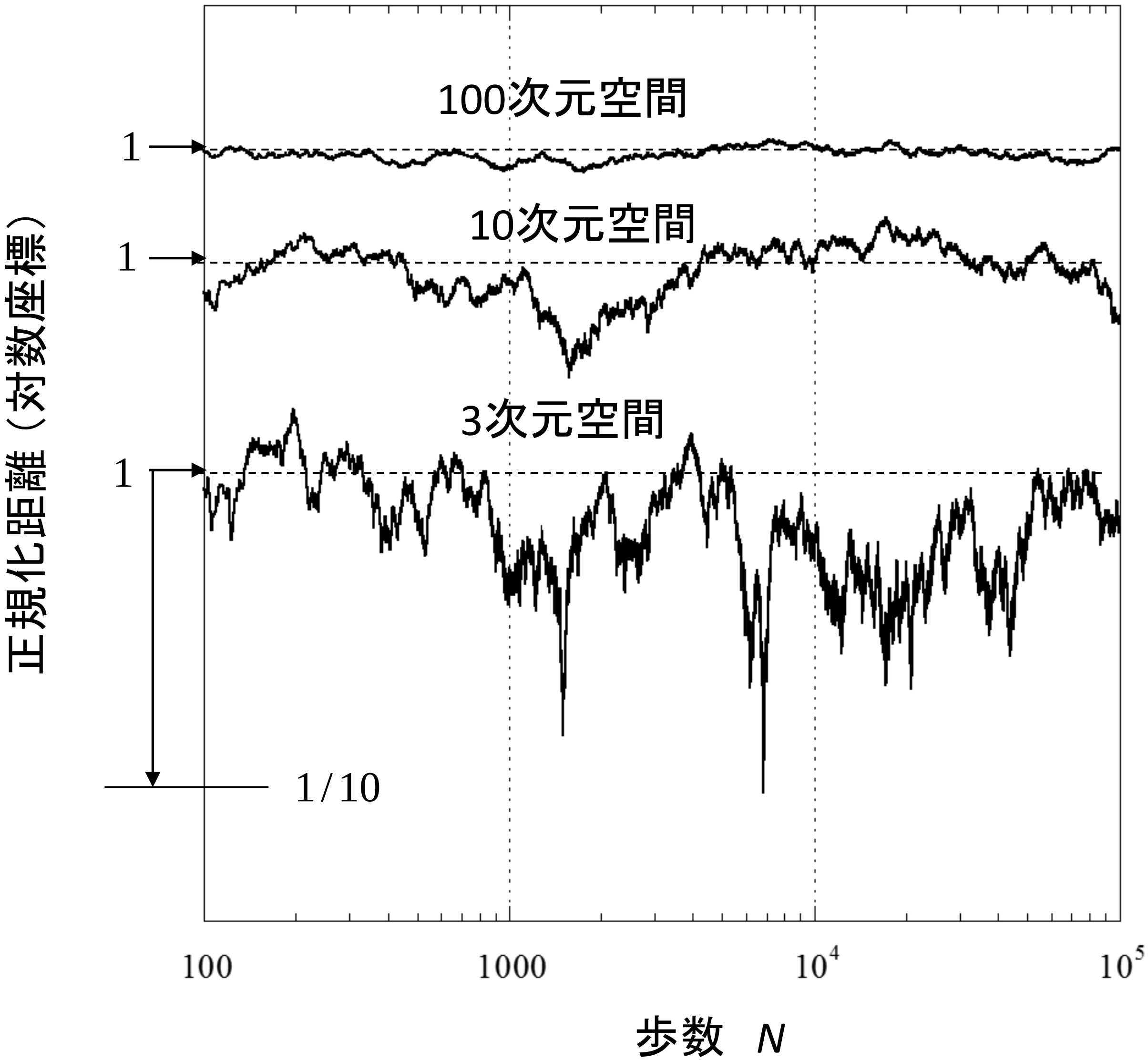


M次元の距離：　$r_M^{(N)}$

N>>1での正規化距離：　$\hat{r}_M = \lim_{N\to\infty} \dfrac{r_M^{(N)}}{\sqrt{N}}$

正規化距離の確率分布は？

多次元空間ランダムウォークの正規化距離



M次元空間のランダムウォークでの出発点からの距離は$m=M/2$, $\Omega=N$の仲上m分布になる

次元が高いほど出発点に近づかなくなる

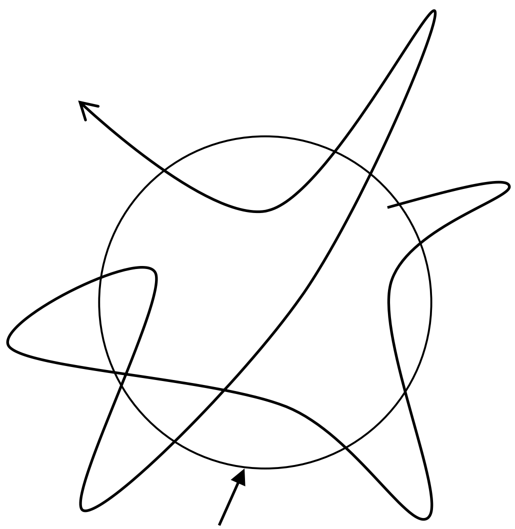
出て行ったきり、帰ってこなくなる

（1の値付近に張り付く）

（注：3つの線が重なって見にくくならないよう縦方向はずらしているが、1/10低下の幅は同じ）

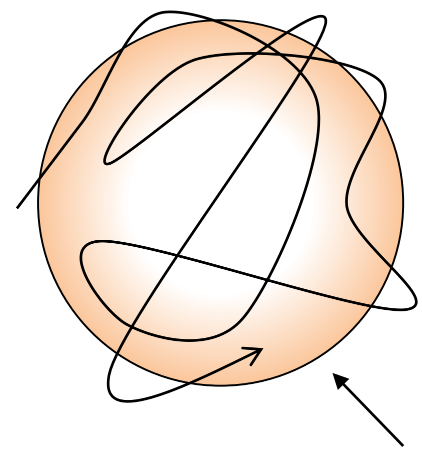
超球面とランダムウォークの軌跡

２次元空間



半径 $1/\sqrt{N}$ の円

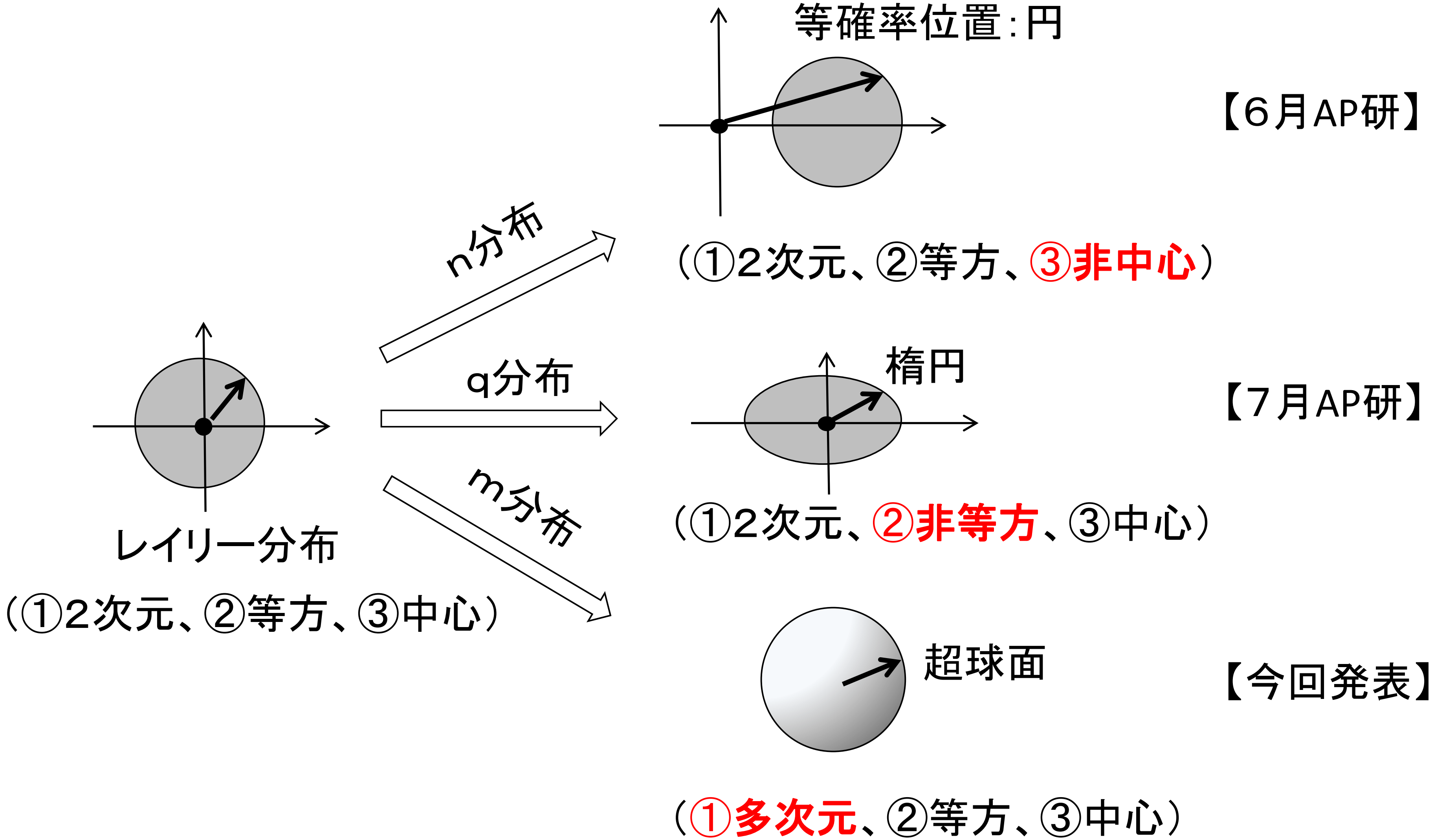
多次元空間
（十分高い次元）



半径 $1/\sqrt{N}$ の超球面

次元が高くなると
超球面に張り付く動きになる

まとめ： レイリー分布と仲上の三つの分布との関係



セレンディピティ
幸運は待ち受ける心構えのある人に訪れる（パスツール）

相対頻度図（特殊方眼紙）　相対頻度図の上に現れた直線群