

移動伝搬モデルと確率分布

～その歴史と将来展望～

唐沢 好男

自己紹介; 信学会通ソマガジン B-plus

https://www.jstage.jst.go.jp/article/bplus/16/3/16_238/_pdf

このセミナーでは

多岐にわたる移動伝搬技術の中で、伝搬モデルを構成する確率分布について、その歴史を学ぶ。

セミナーの前半では、正規分布を基礎とする今日の移動伝搬モデル、そのモデルに現れる様々な確率分布を取り上げる。それぞれが、誰によって、いつ、どういう目的で生まれ、今どういうところに生きているかを述べる。個々の分布については物理が見える説明をしたい。特に、理論的解釈が難しい仲上 m 分布に比重を置く。

セミナーの後半では、ハンケル変換形特性関数を用いて、任意の数の波が合成された信号の振幅(=包絡線)の確率分布を求める手法を講義する。この手法は仲上稔氏が仲上・ライス分布を生み出したときに用いた手法であるが、現在、あまりこの手法を使う人を見ない。しかし、近年は、パソコンの演算能力も上がり、一重積分の数値計算くらいは隘路にならない。その視点で見ると、レイトラッキングで得られた結果の後処理などマルチパス環境解析に応用範囲が広く、便利かつ有用な手法である。この手法の概要、適用例、適用上の留意点などを述べる。

最後に、歴史を踏まえた移動伝搬の将来を展望する。

講義内容

はじめに

Part 1 移動伝搬と確率過程

(加法性確率過程と乗法性確率過程)

Part 2 移動伝搬モデルに現れる基本確率分布

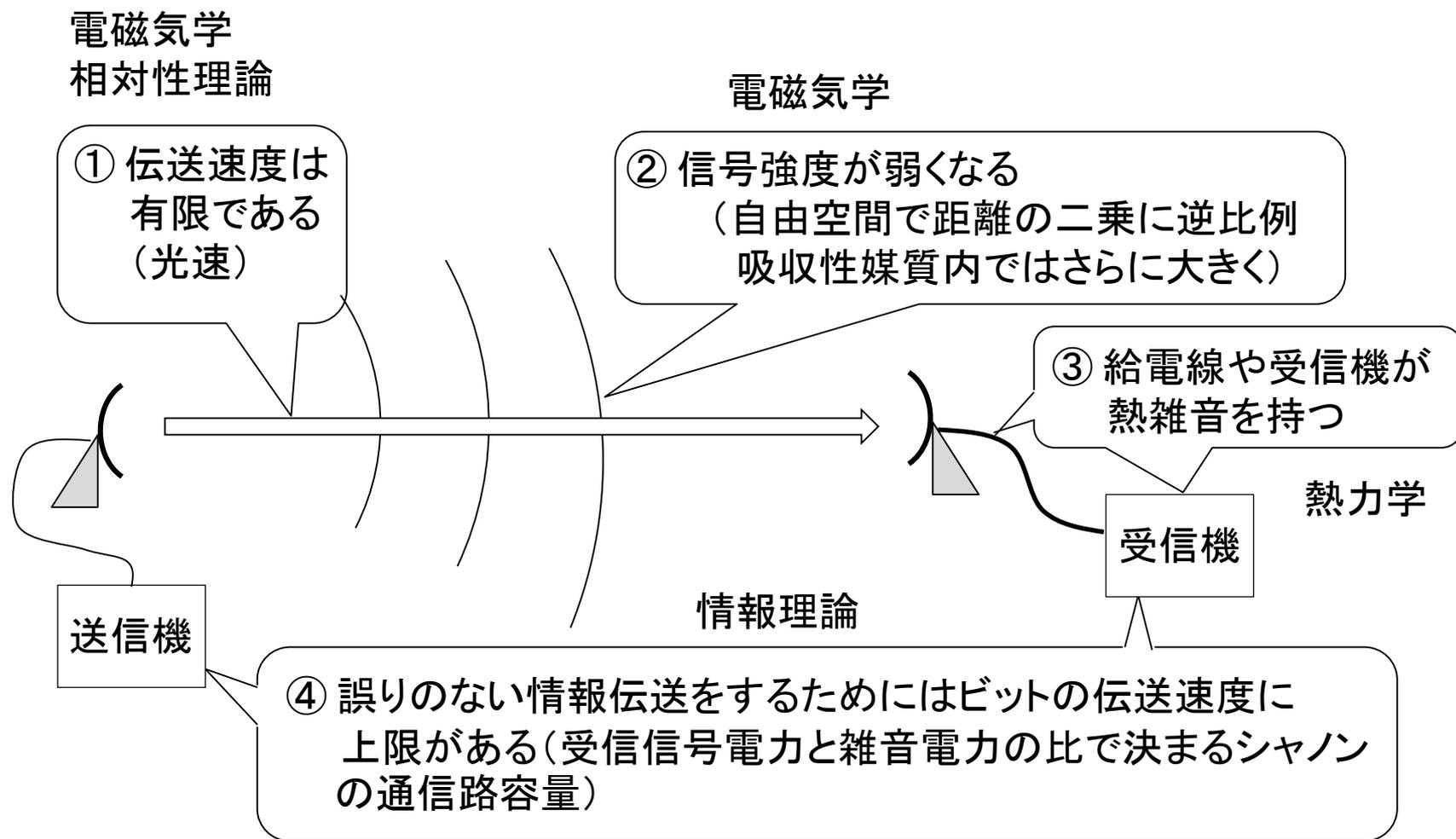
(各種分布の歴史的背景、物理的意味合い、仲上 m 分布に比重)

Part 3 任意マルチパス環境の受信信号振幅の確率分布

(ハンケル変換形特性関数を用いて受信振幅の確率分布を
求める手法:これからの時代に生きる古典的手法)

今後の展望

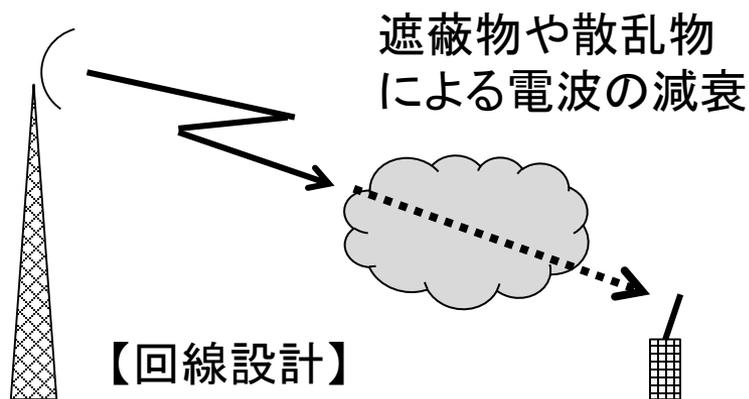
無線伝送の越えられない壁



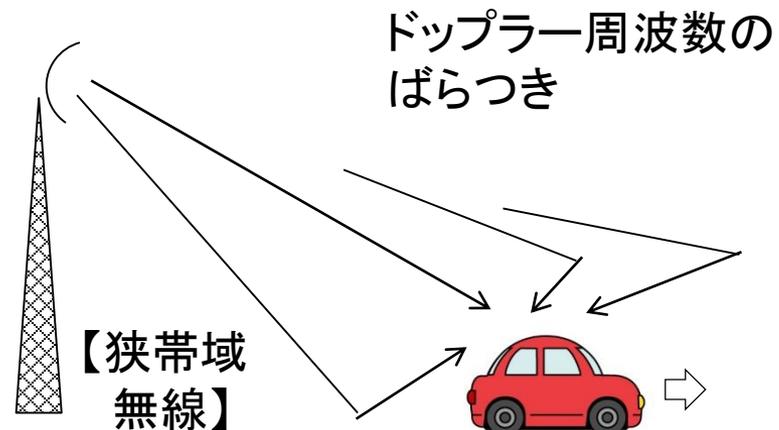
②によって弱くなる信号電力は、③による雑音の働きを受け、④のSN比で定まる限界を超えることができない。また、伝搬路が複数になると、①により、信号の到着時間がばらつき、波形ひずみが生じる。無線通信では、この壁を知り、これらを受け入れた上でのシステム設計がなされる。

移動伝搬における様々な側面

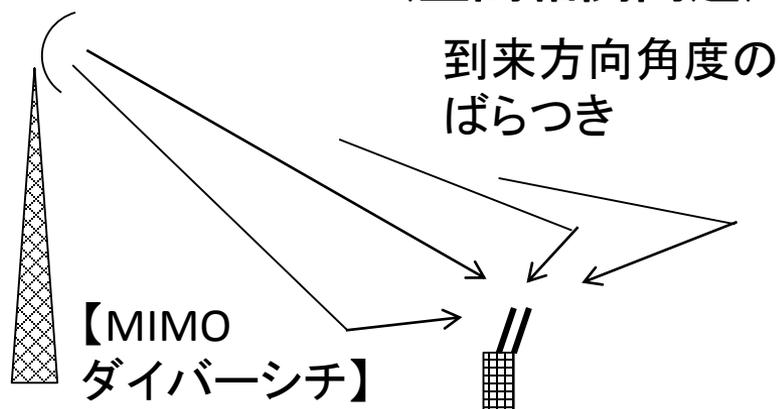
① 電波が弱くなる(雑音問題)



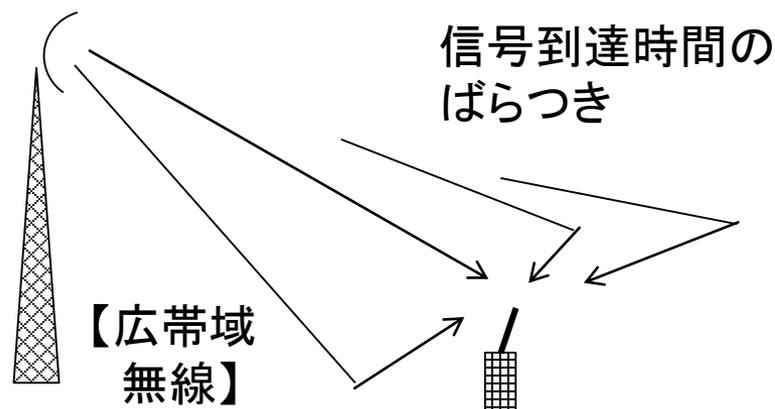
② 信号が変動する(ドップラー問題)



③ 空間に信号の強弱ができる (空間相関問題)



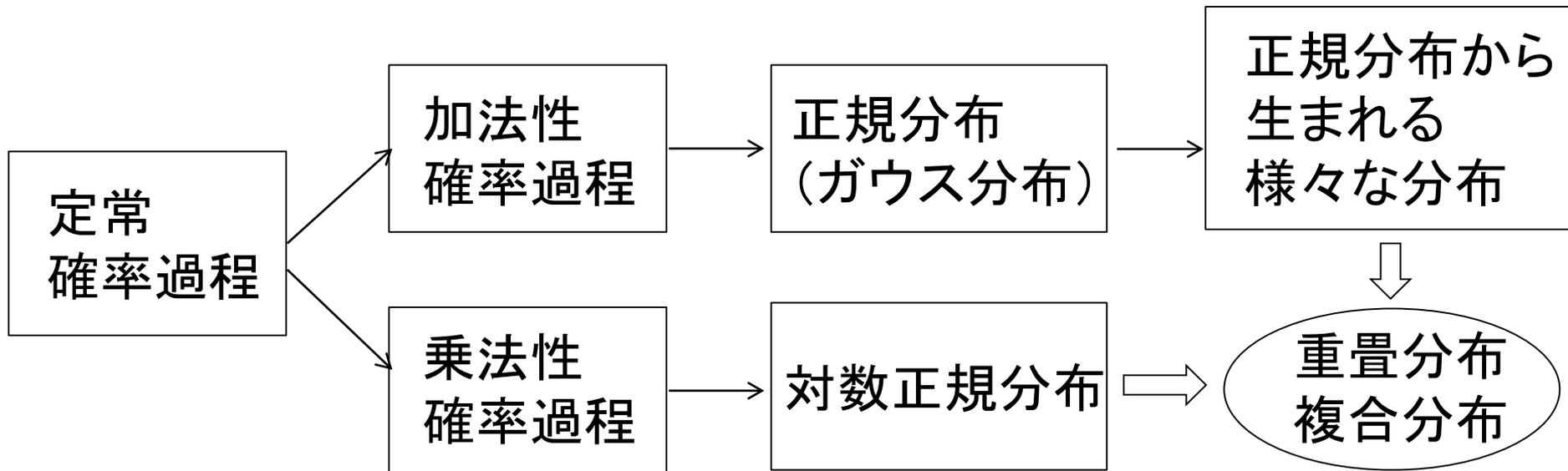
④ 波形が歪む(遅延問題)



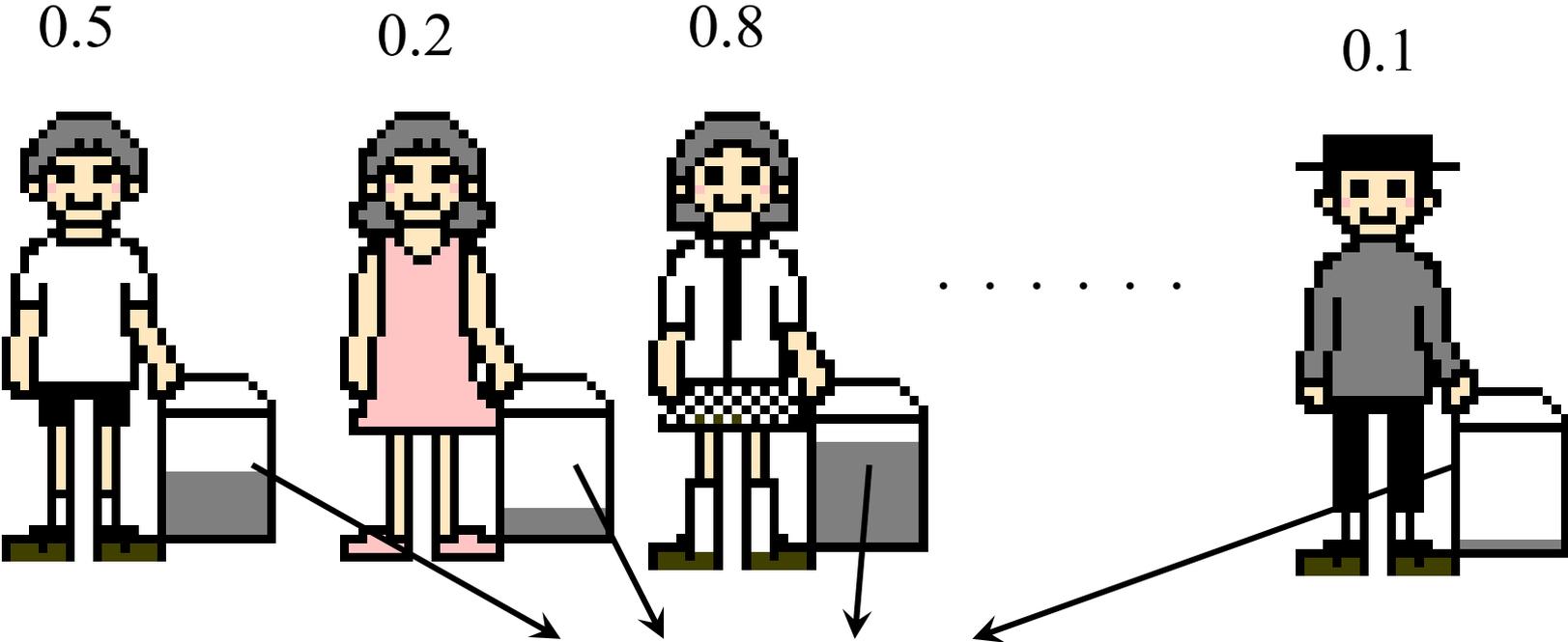
Part 1 移動伝搬と確率過程

電波伝搬： 電波と自然現象との関わりを扱う分野

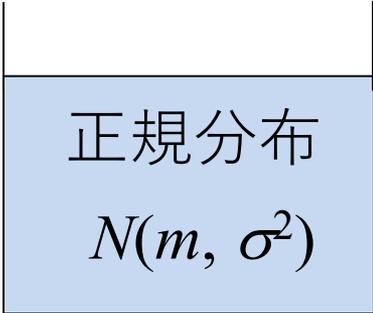
不規則媒質中の電波伝搬 → 確率過程



正規分布(ガウス分布、Normal distribution, Gaussian distribution) :
加法性確率過程 (Additive Stochastic Process)



中心極限定理
Central limit theorem



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

中心極限定理 (Central Limit Theorem)

$$\hat{x} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_N) / N$$



x_i : 同一かつ独立な分布 (i.i.d.)

(もう少し条件を緩めることも可能)

N が十分大きいとき、正規分布になる

個々の作用が足し算される現象の物理量は正規分布に漸近する ⇒ **正規分布は確率分布の基本中の基本分布**

この証明は、どの確率の教科書にも書かれていて、さほど難しくない。しかし、その証明を理解するためには、確率分布の和の分布を求める特性関数(あるいは積率母関数)の知識が必要

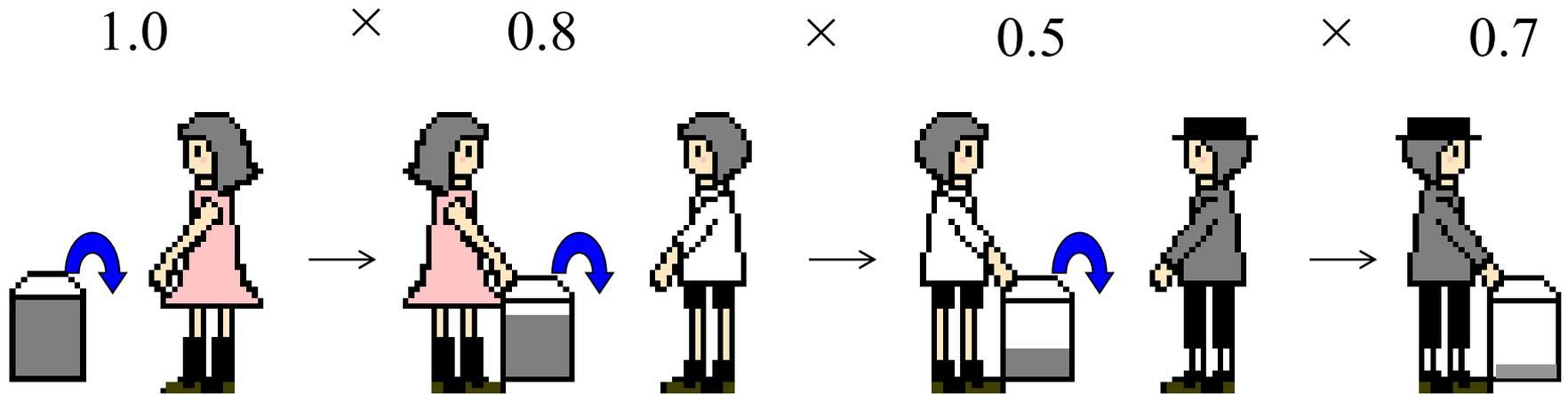
対数正規分布 (log-normal distribution)

乗法性確率過程 (Multiplicative Stochastic Process)

$$x = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_N$$

$$\log x = \log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + \cdots + \log x_N$$

正規分布



対数正規分布

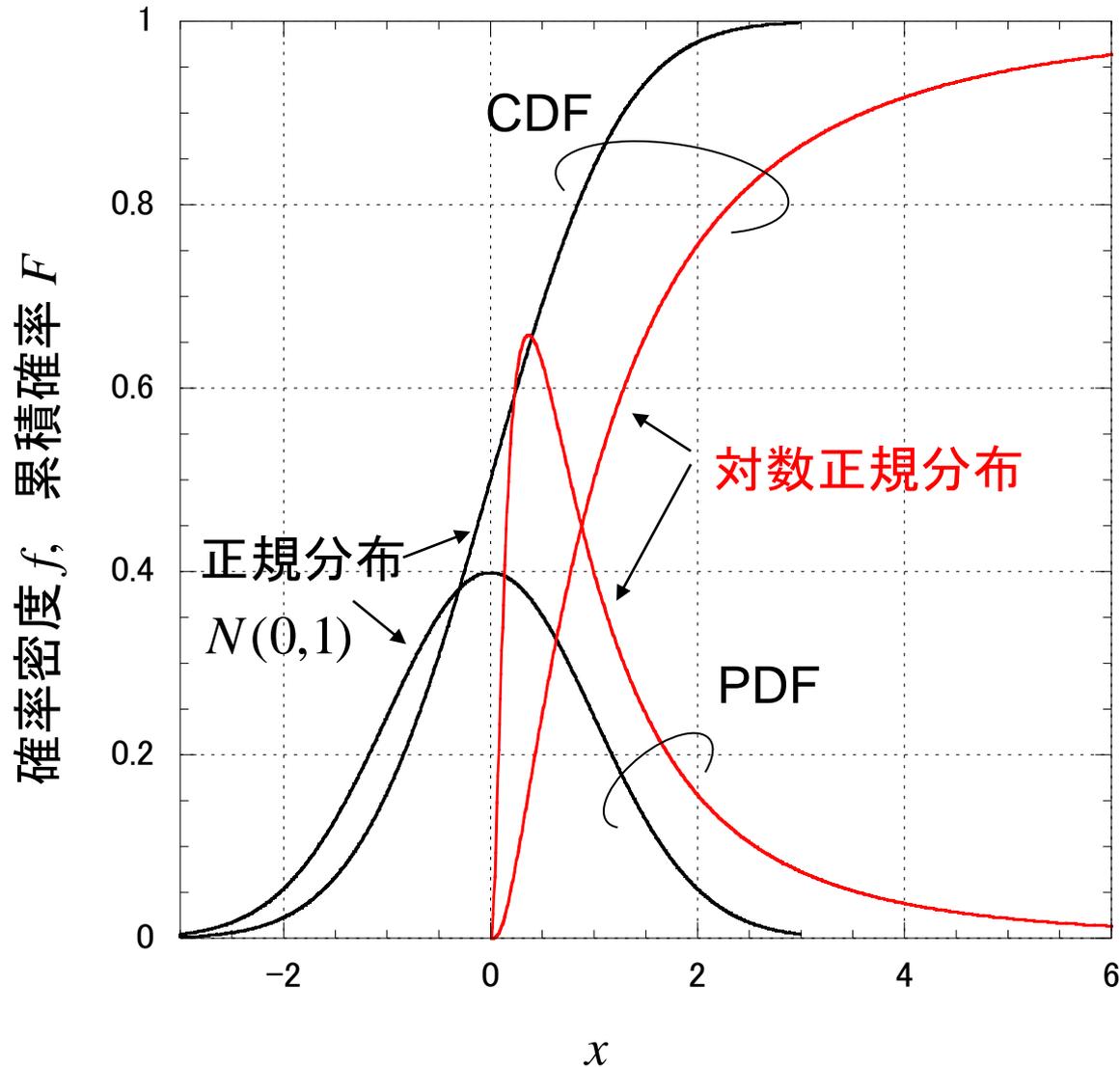
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} \exp \left\{ -\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

対数で表された量 (例えばdB値)
が正規分布するときの

真数値 x の分布 (誤差を倍半分で見える世界)

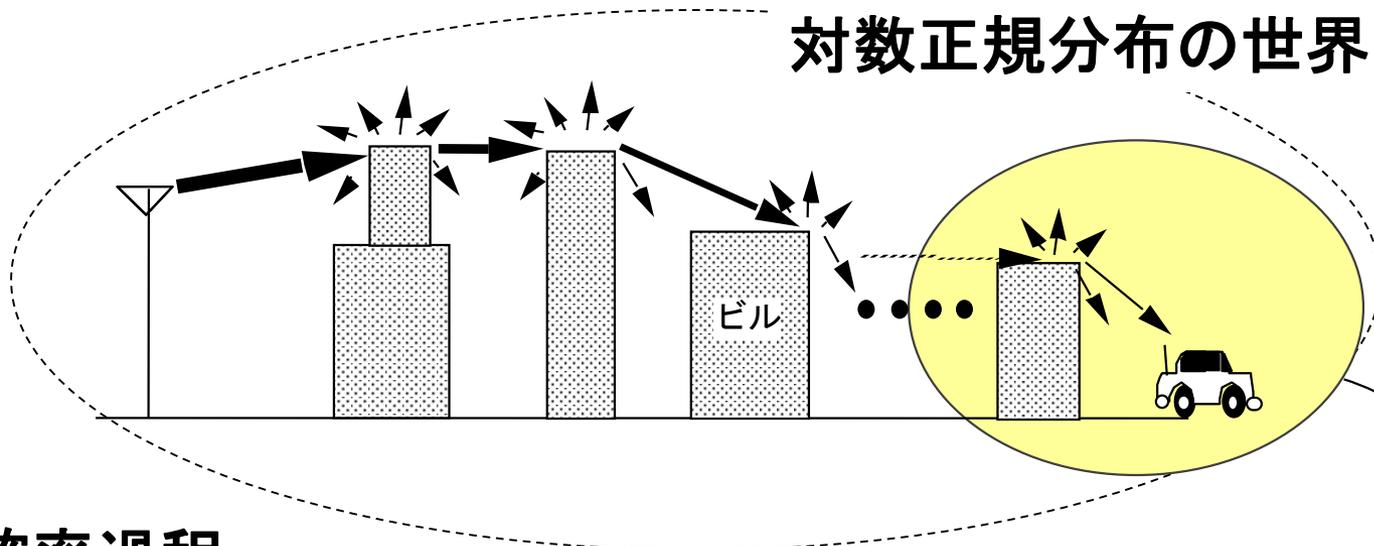
(m, σ は $\log x$ の平均値と標準偏差) 9

正規分布と対数正規分布の 確率密度関数(PDF)と累積分布関数(CDF)



移動伝搬の確率過程

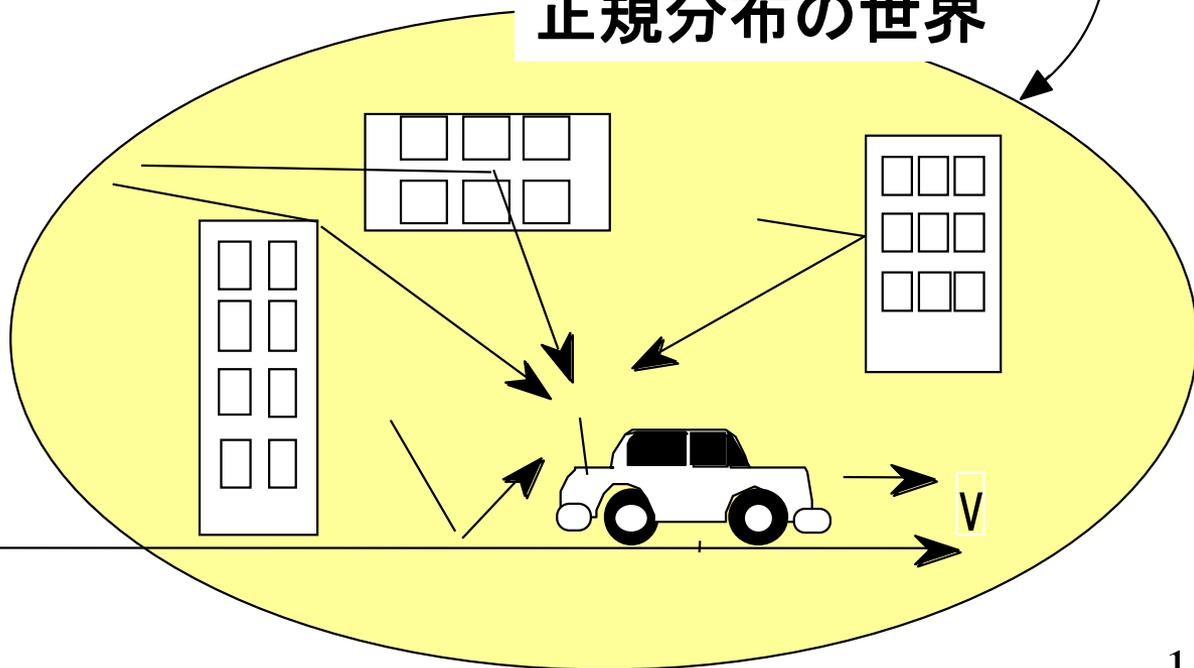
対数正規分布の世界



乗法性確率過程

Multiplicative
Stochastic
Process

正規分布の世界



加法性確率過程

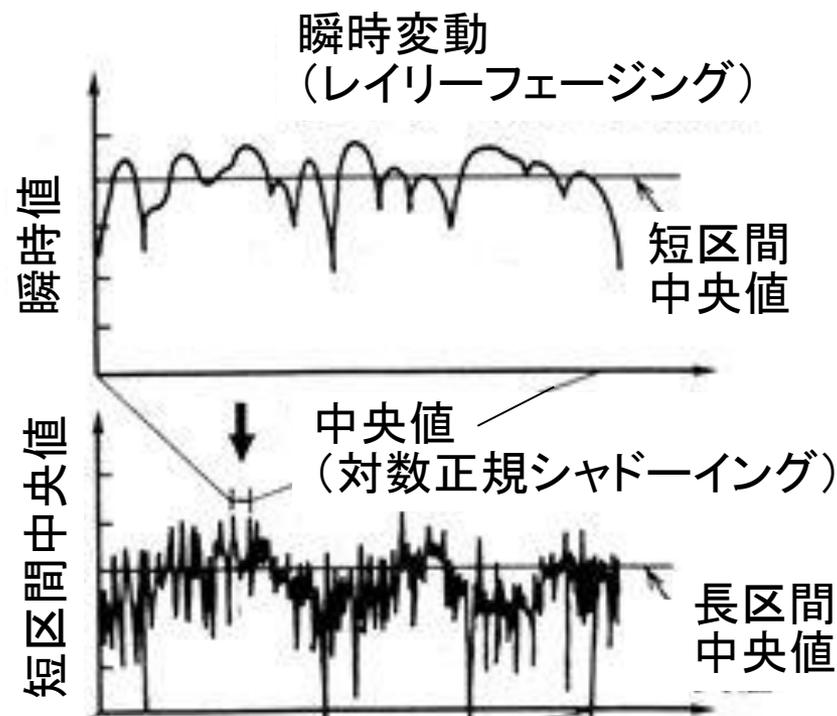
Additive
Stochastic
Process

移動伝搬基本構造モデル 【奥村モデル:1967】

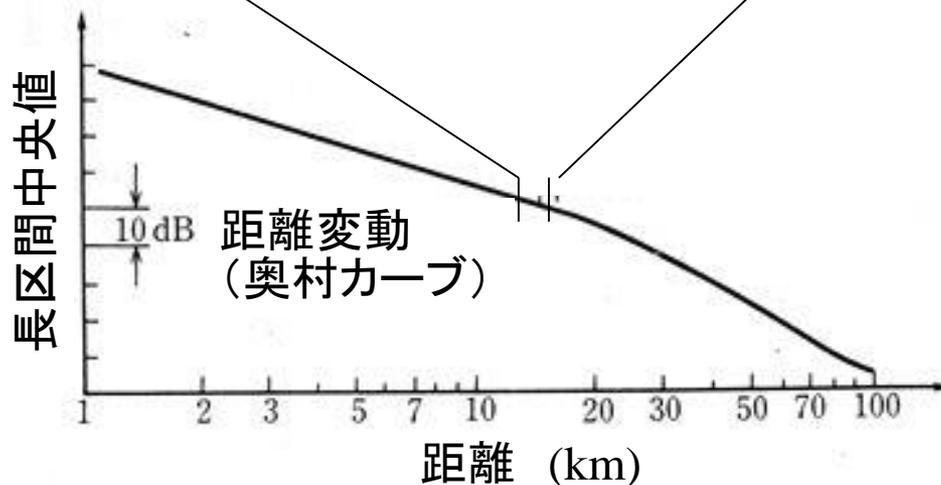
加法性確率過程
(正規分布系)



乗法性確率過程
(対数正規分布系)



複雑な移動伝搬環境を物理現象の持つ性質を採り入れた形で組み立てており、見事



Part 2 移動伝搬モデルに現れる基本確率分布 (各種分布の歴史的背景、物理的意味合い)

通信モデルと確率分布

物理量	代表的確率分布
雑音	正規分布
信号強度	レイリー分布、仲上・ライス分布
待ち時間	指数分布
発生回数	ポアソン分布
ダイバーシティ	ガンマ分布(カイ二乗分布)
遮へい減衰	対数正規分布
・	・
・	・

Part 1、Part 2の内容（確率分布）に関連する技術資料： TR-YK-005,
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_005_Probability_distribution.pdf
(この講義では概略的な話しかできないので、資料で式を理解してほしい)

振幅変動を表す確率分布

- ① レイリー分布
- ② 仲上・ライス分布
- ③ 2定常成分＋不規則変動成分を表す分布
- ④ Loo分布
- ⑤ レイリー/対数正規重畳分布(Suzuki分布)

① レイリー分布

無相関2次元正規分布の振幅の分布

(Lord Rayleigh, 1880)

電波環境では： 同レベルの多数の波が合成された信号の包絡線レベルの分布
(見通し外(NLOS)伝搬環境)

$$\begin{aligned}
 a &= r_1 e^{j\phi_1} + r_2 e^{j\phi_2} + \dots + r_N e^{j\phi_N} \\
 &= \underbrace{r_1 \cos \phi_1 + r_2 \cos \phi_2 + \dots + r_N \cos \phi_N}_{x = r \cos \phi \rightarrow N(0, \sigma^2)} + j \underbrace{(r_1 \sin \phi_1 + r_2 \sin \phi_2 + \dots + r_N \sin \phi_N)}_{y = r \sin \phi \rightarrow N(0, \sigma^2)}
 \end{aligned}$$

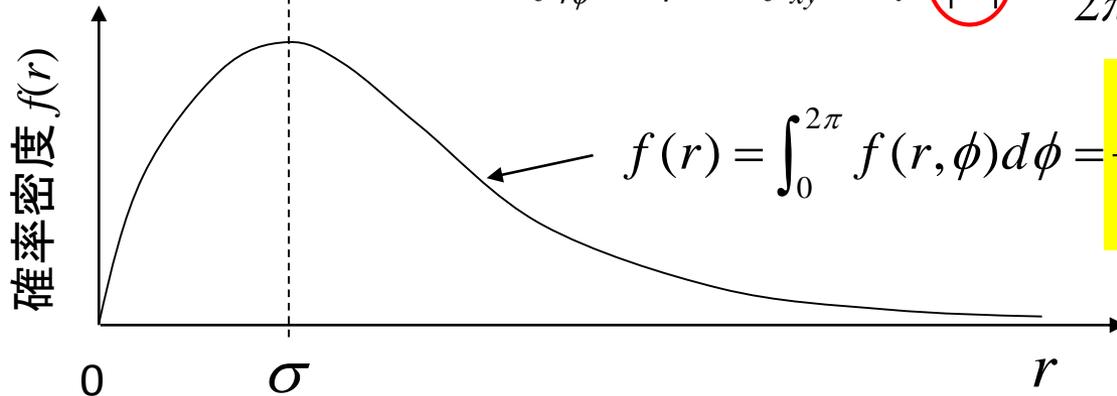
$$r = |x + jy| \left(= \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

ヤコビアン
の
絶対値

レイリー分布

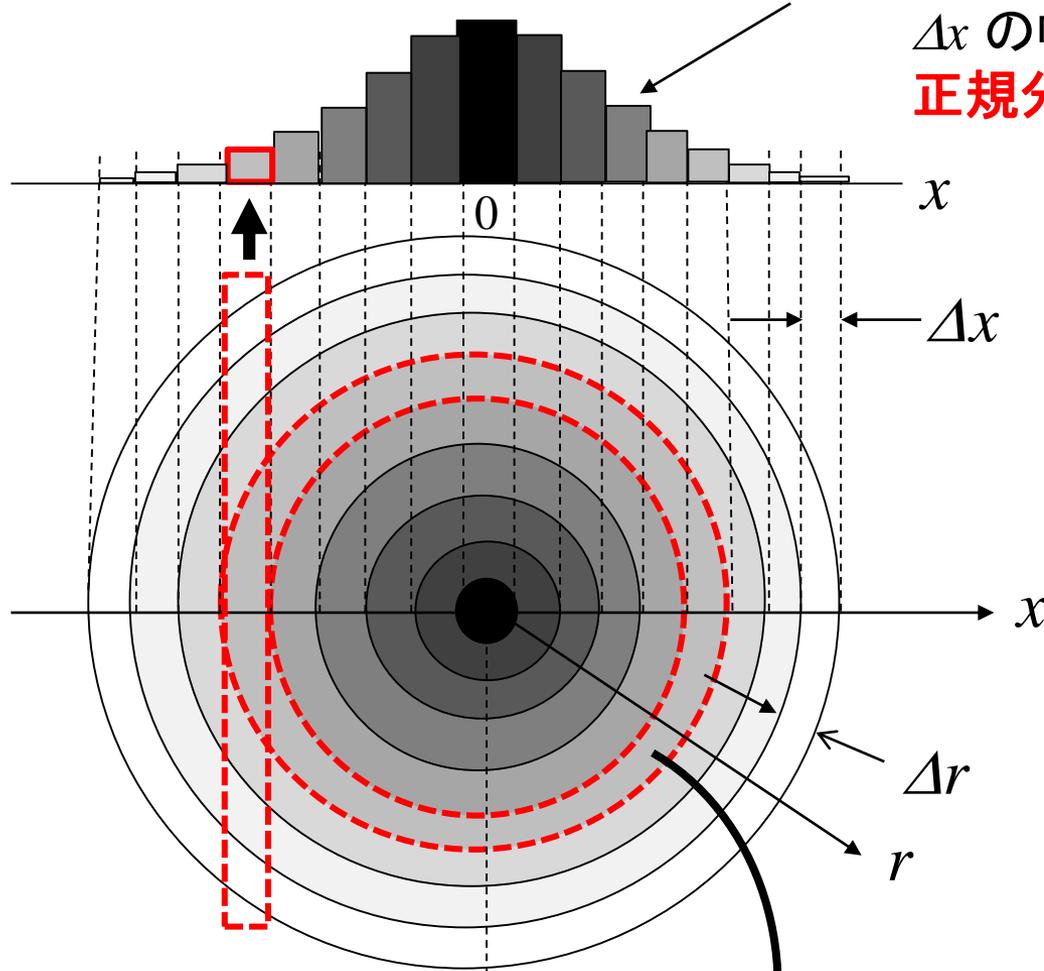
$$f_{r\phi}(r, \phi) = f_{xy}(x, y) |J| = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$



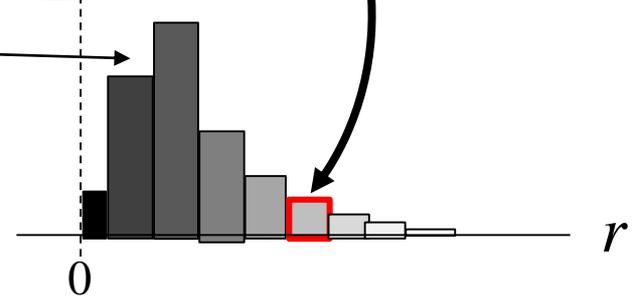
$$f(r) = \int_0^{2\pi} f(r, \phi) d\phi = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$r=0$ で確率が0である意味

Δx の幅の矩形の中にある確率
 Δx の幅を0に近づけると
正規分布



Δr の幅の輪の中にある確率
 Δr の幅を0に近づけると
レイリー分布

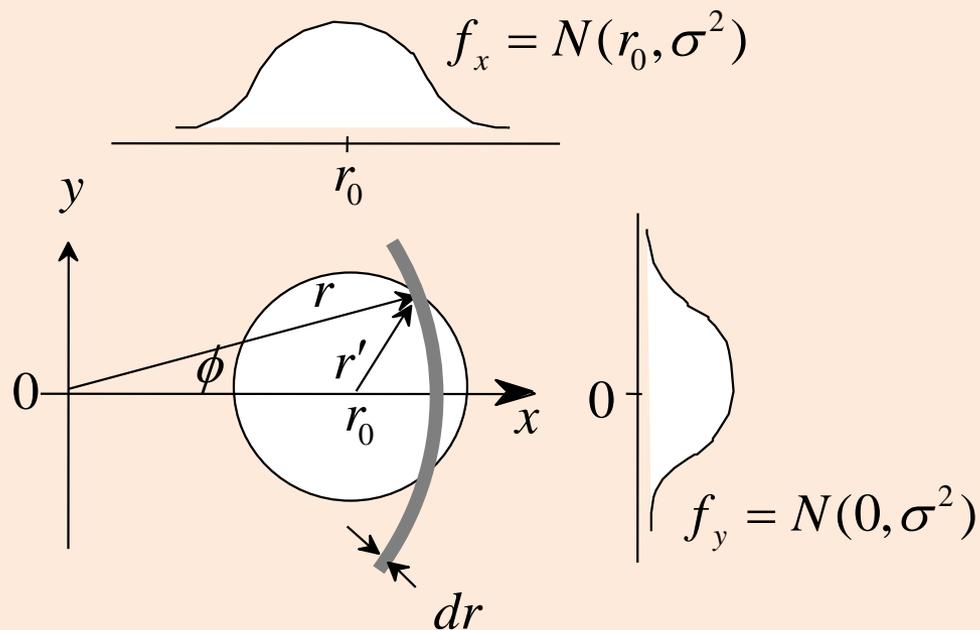


人口密度と
輪の国の人口
の関係

② 仲上・ライス分布

(定常成分と不規則成分の合成信号振幅の確率分布)
(仲上: 1940、Rice: 1945)

変数 x が $N(r_0, \sigma^2)$, y が $N(0, \sigma^2)$ であるときの $x+jy$ の振幅 r の分布



$$r = |x + jy| \left(= \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

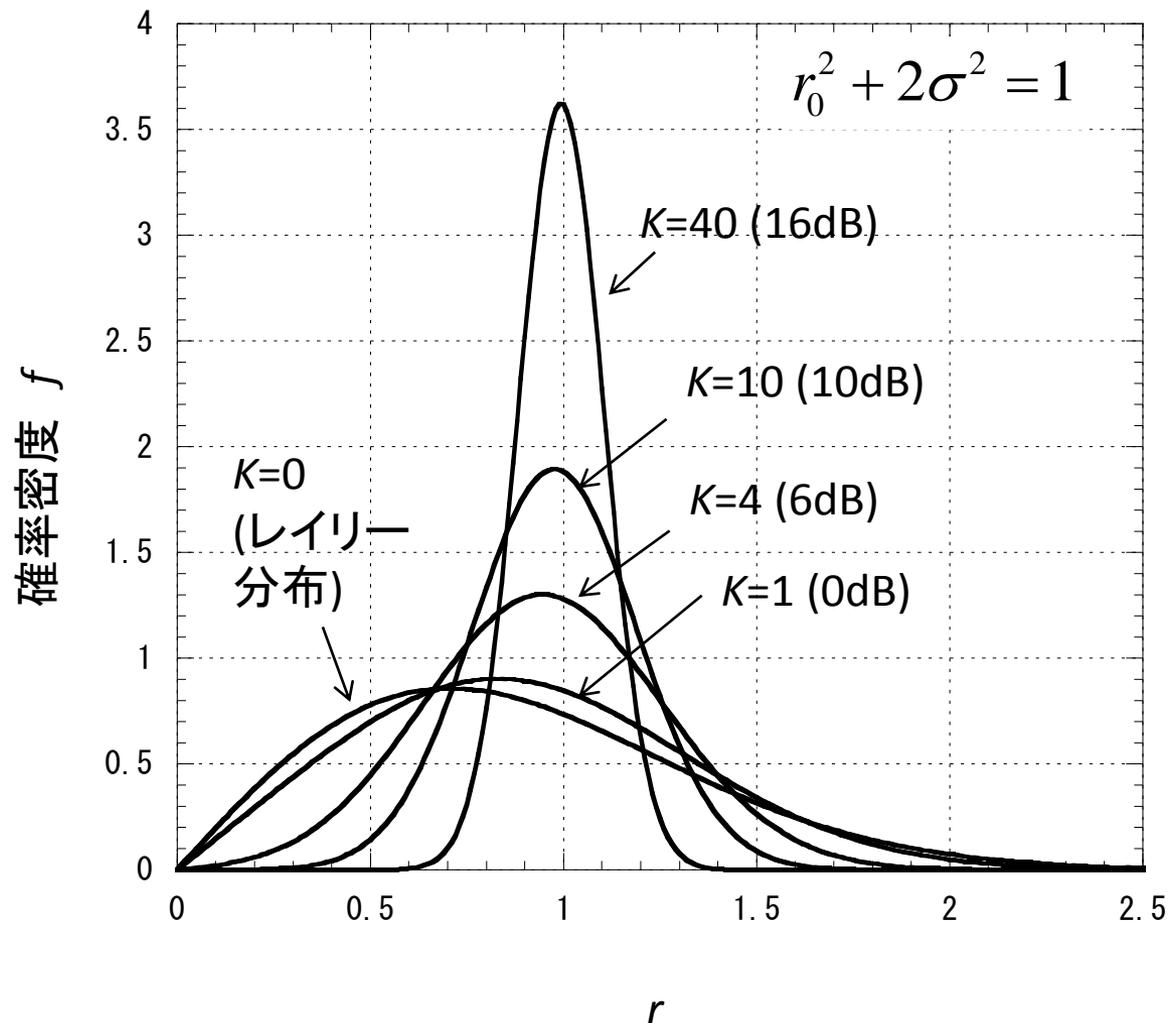
$$\begin{aligned} f_{r\phi}(r, \phi) &= f_x(x) f_y(y) |J| \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 - 2r_0r \cos \phi + r^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{r_0r \cos \phi}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

r : 仲上・ライス分布
 r' : レイリー分布
($r_0=0$ で両者は一致)

$$\begin{aligned} f_r(r) &= \int_0^{2\pi} f_{r\phi}(r, \phi) d\phi \\ &= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{r_0r}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

(変形ベッセル関数 I_0 の積分表示公式より) 17

仲上・ライス分布の計算例



ライスファクタ: K
(定常成分と
不規則成分の電力比)

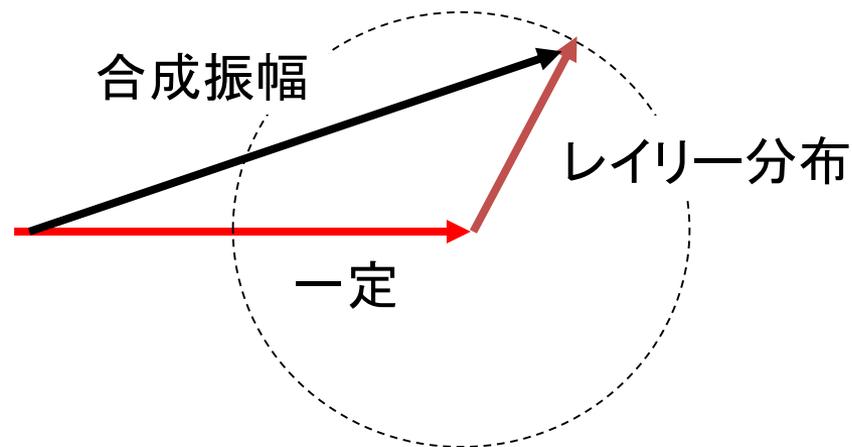
$$K \equiv \frac{r_0^2}{2\sigma^2}$$

見通し内(LOS)伝搬環境
を表す

仲上 稔 氏の功績

Rice (Rician) 分布
↓
Nakagami-Rice 分布

【定着度はまだまだ】



S. O. Rice (ベル研究所): 信号と雑音の研究 (BSTJ, 1944/1945)

仲上 稔 ([国際電気通信株式会社](#): 昭和の激動期 (戦時体制時) の特殊会社)
短波のフェージングの研究 (電気通信学会誌, 1940) (当時の呼び名はn分布)

この分布は、洋の東西の同時代の研究者が、違う目的・違う方法で編み出された。仲上の、世界的な名声は、後述の仲上m分布 (1943) によって、不動のものとなった。(Nakagami distribution, or The m distribution)

この経緯の概略を以下にまとめている (唐沢、信学誌、vol. 99, no. 8, 2016)

https://www.journal.ieice.org/bin/pdf_link.php?fname=k99_8_792&lang=J&year=2016

技術レポート: 唐沢、YK-076、仲上三分布 (n, q, m分布) への歴史探訪 (近日公開)

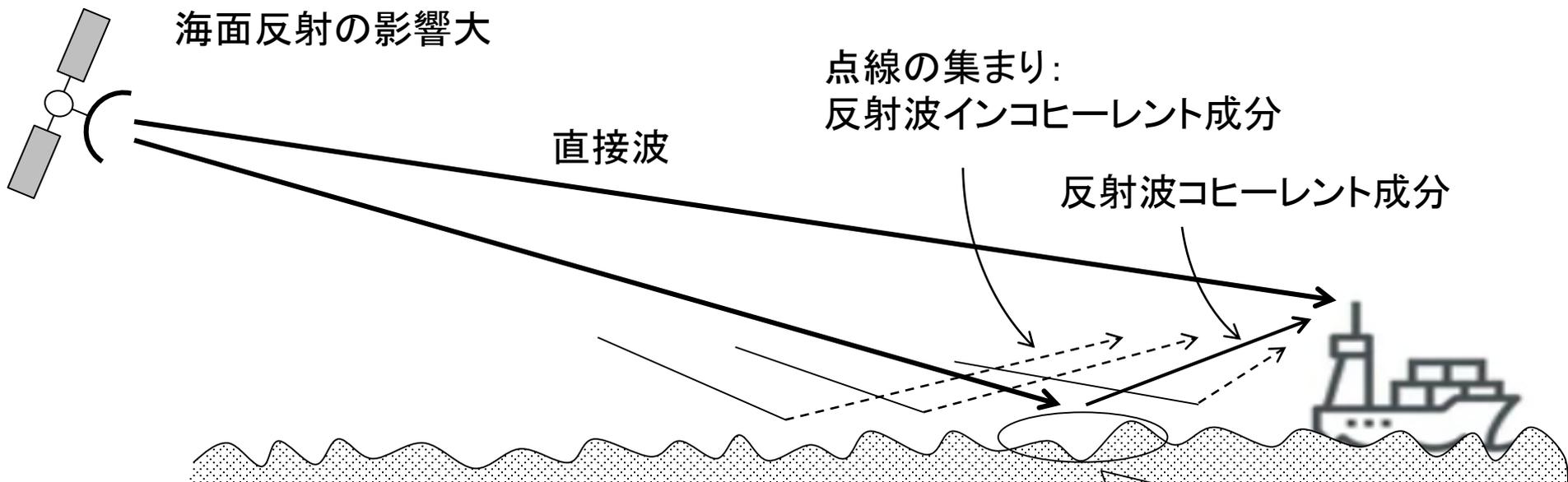
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-076_Nakagami_Distributions.pdf

③ 2定常成分＋不規則変動成分の合成振幅の分布

【典型的な例：海面反射フェージング】

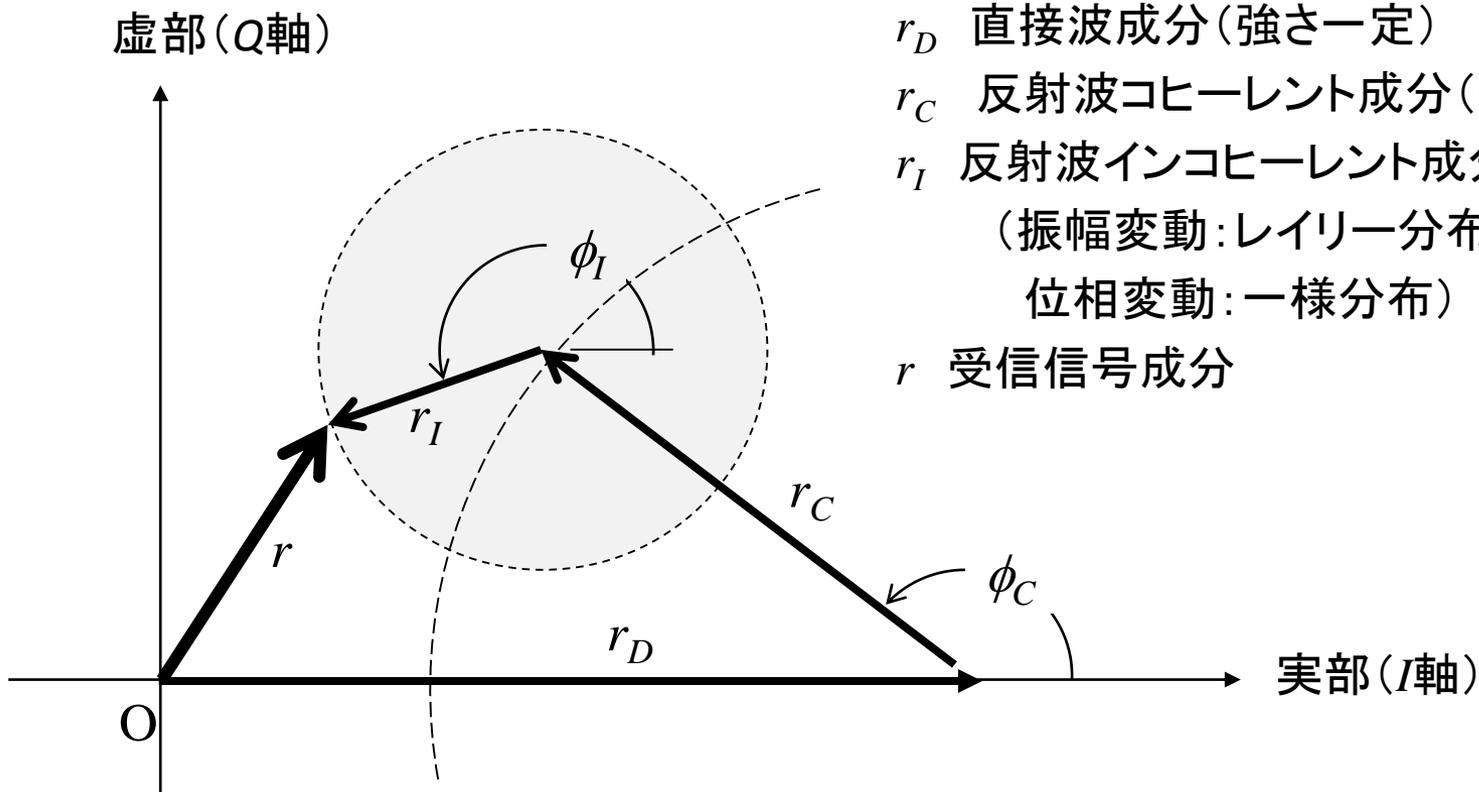
(よく使われているが、
定着した名前はない)

衛星の仰角が低くなるほど
海面反射の影響大



コヒーレント成分の主な寄与エリア：
鏡面反射点を中心とした第一フレネルゾーン

陸上における、大地反射フェージングなども同様



$$r = \left| r_D + r_C e^{j\phi_C} + r_I e^{j\phi_I} \right| \quad (\phi_I \text{ は } 0 \sim 2\pi \text{ の一様分布})$$

Case 1: ϕ_C 一定 $\rightarrow r_0 = \left| r_D + r_C e^{j\phi_C} \right|$ の仲上・ライス分布

Case 2: ϕ_C 一様分布 $\rightarrow f(r) = \frac{r}{\pi\sigma^2} \int_0^\pi \exp\left(-\frac{r_0^2(\phi_C) + r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{r_0(\phi_C)r}{\sigma^2}\right) d\phi_C$

積分が残り、使いやすい式ではない
この分布については、Part 3 で、もう少し
一般的な話をしたい

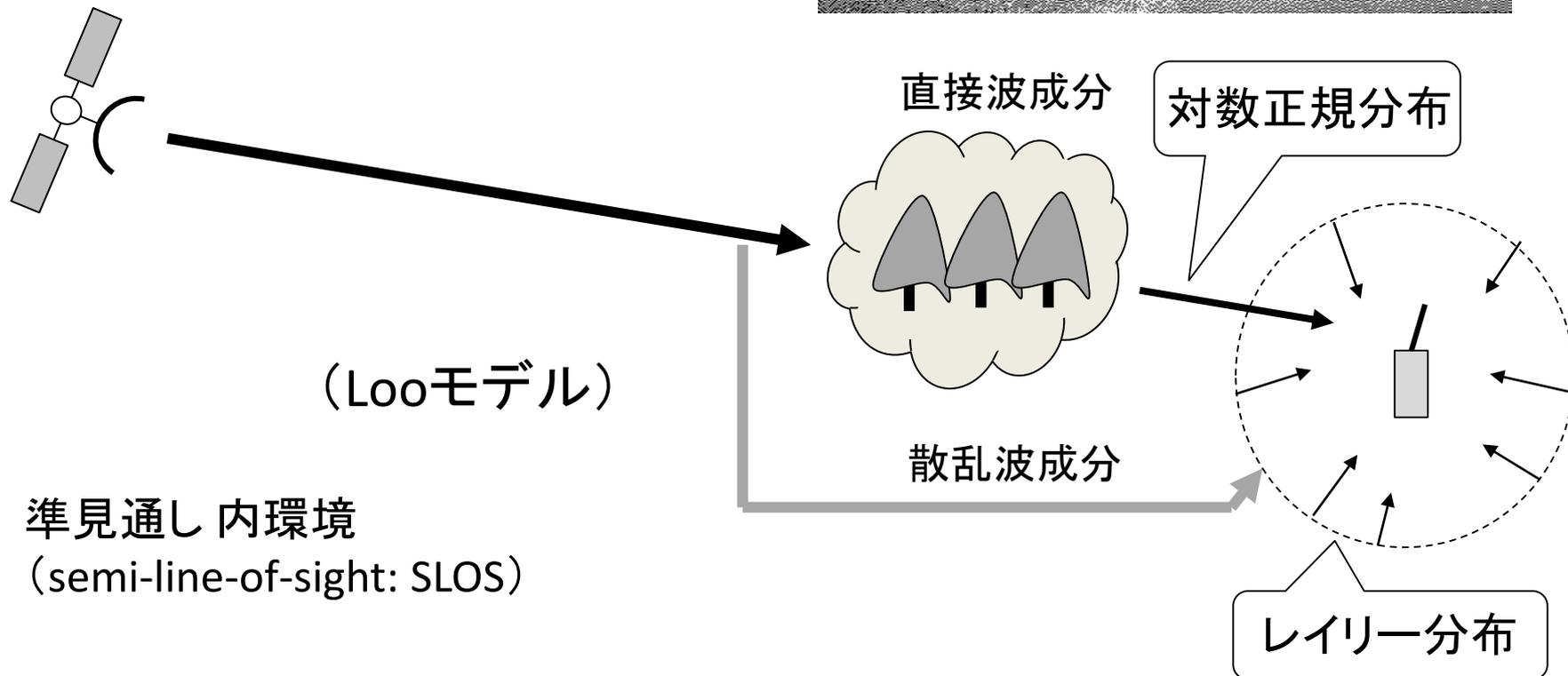
$$(r_0^2(\phi) = r_D^2 + 2r_D r_C \cos \phi + r_C^2)$$

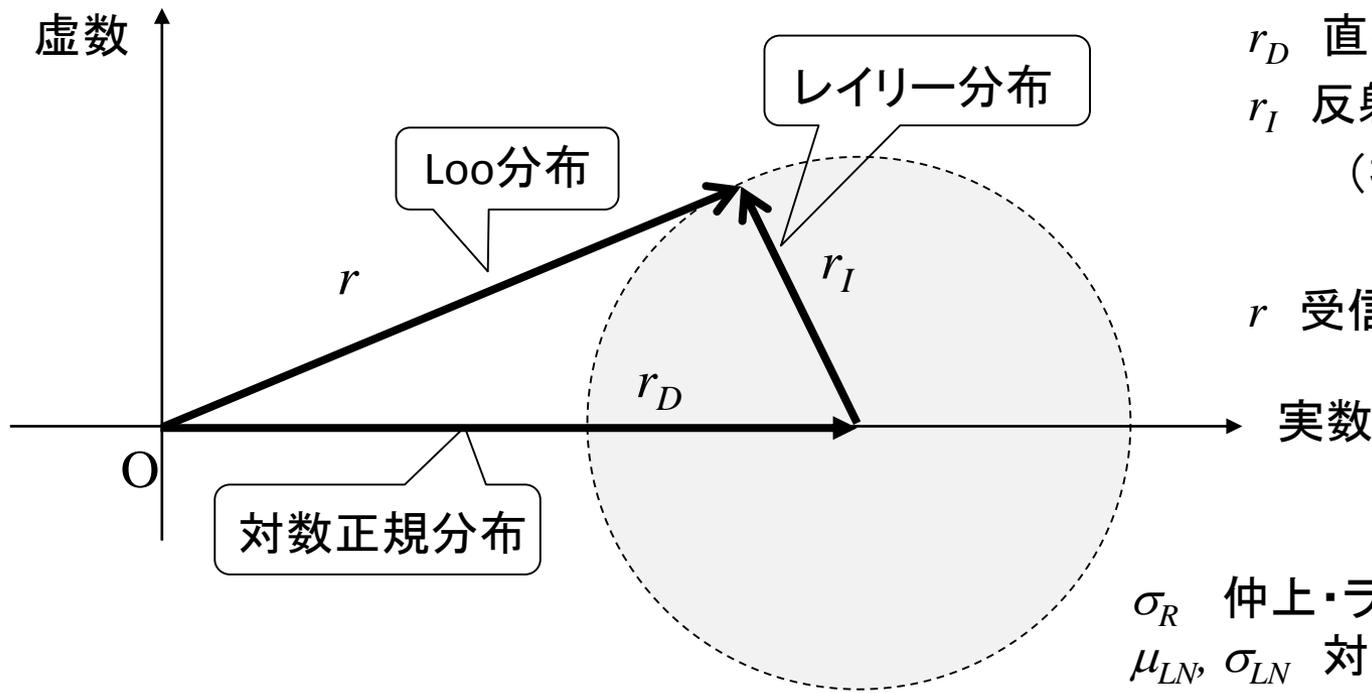
④ Loo分布

(roadside shadowing model; Loo, 1985)

衛星通信の伝搬モデルとして生まれた分布

直接波成分が、道路脇の樹木等によって、若干の減衰を受ける
(仲上・ライス分布の変形)





r_D 直接波成分(対数正規分布)
 r_I 反射波インコヒーレント成分
 (振幅変動:レイリー分布
 位相変動:一様分布)
 r 受信信号成分

σ_R 仲上・ライス分布のパラメータ
 μ_{LN}, σ_{LN} 対数正規分布のパラメータ

$$f_{Loo}(r; \sigma_R, \mu_{LN}, \sigma_{LN}) = \int_0^\infty \underbrace{f_{NR}(r; x, \sigma_R)}_{\text{直接波振幅を } x \text{ とする仲上・ライス分布}} \underbrace{f_{LN}(x; \mu_{LN}, \sigma_{LN})}_{\text{変数 } x \text{ が対数正規分布}} dx$$

直接波振幅を x とする仲上・ライス分布 変数 x が対数正規分布

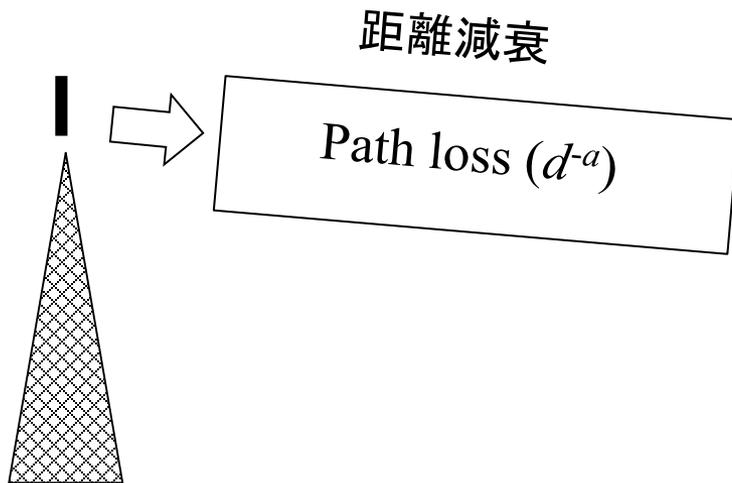
$$= \frac{r}{\sqrt{2\pi\sigma_{LN}\sigma_R^2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_R^2}\right) \times \int_0^\infty \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_R^2} - \frac{(\ln x - \mu_{LN})^2}{2\sigma_{LN}^2}\right) I_0\left(\frac{xr}{\sigma_R^2}\right) dx$$

物理的イメージは明確だが、積分が残り、計算にはあまりうれしくない形
 → 仲上m分布への近似等 詳しいことは、技術レポート: TR-YK-044を見てほしい

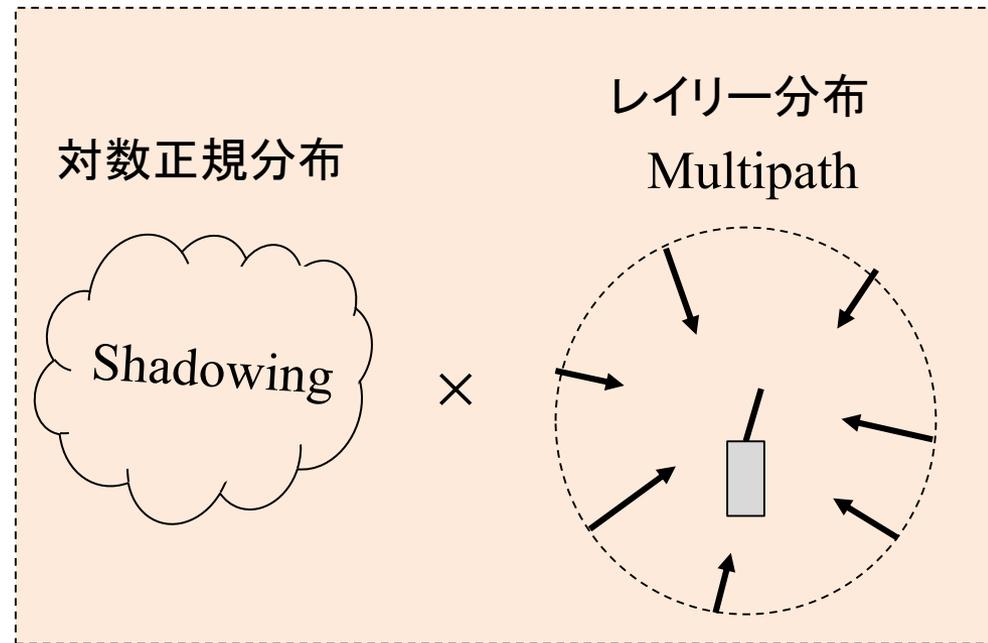
⑤ レイリー/対数正規重畳分布 (Suzuki 分布)

(Suzuki, 1977)

地上系移動伝搬モデル
(奥村モデル)



見通し外 (NLOS)



(レイリー分布のパラメータ σ が対数正規分布する形の重畳分布)

分布の計算式

$$f(r; \mu, \lambda) = \int_0^\infty \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda\sigma}} \exp\left(-\frac{(\ln\sigma - \mu)^2}{2\lambda^2}\right)}_{\text{パラメータ } \sigma \text{ が対数正規分布}} \times \underbrace{\left[\frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \right]}_{\text{パラメータ } \sigma \text{ が一定の下で変数 } r \text{ がレイリー分布}} d\sigma$$

パラメータ σ が対数正規分布

パラメータ σ が一定の下で
変数 r がレイリー分布

$$= \int_0^\infty \frac{r}{\sqrt{2\pi\lambda\sigma^3}} \exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2} - \frac{(\ln\sigma - \mu)^2}{2\lambda^2}\right\} d\sigma$$

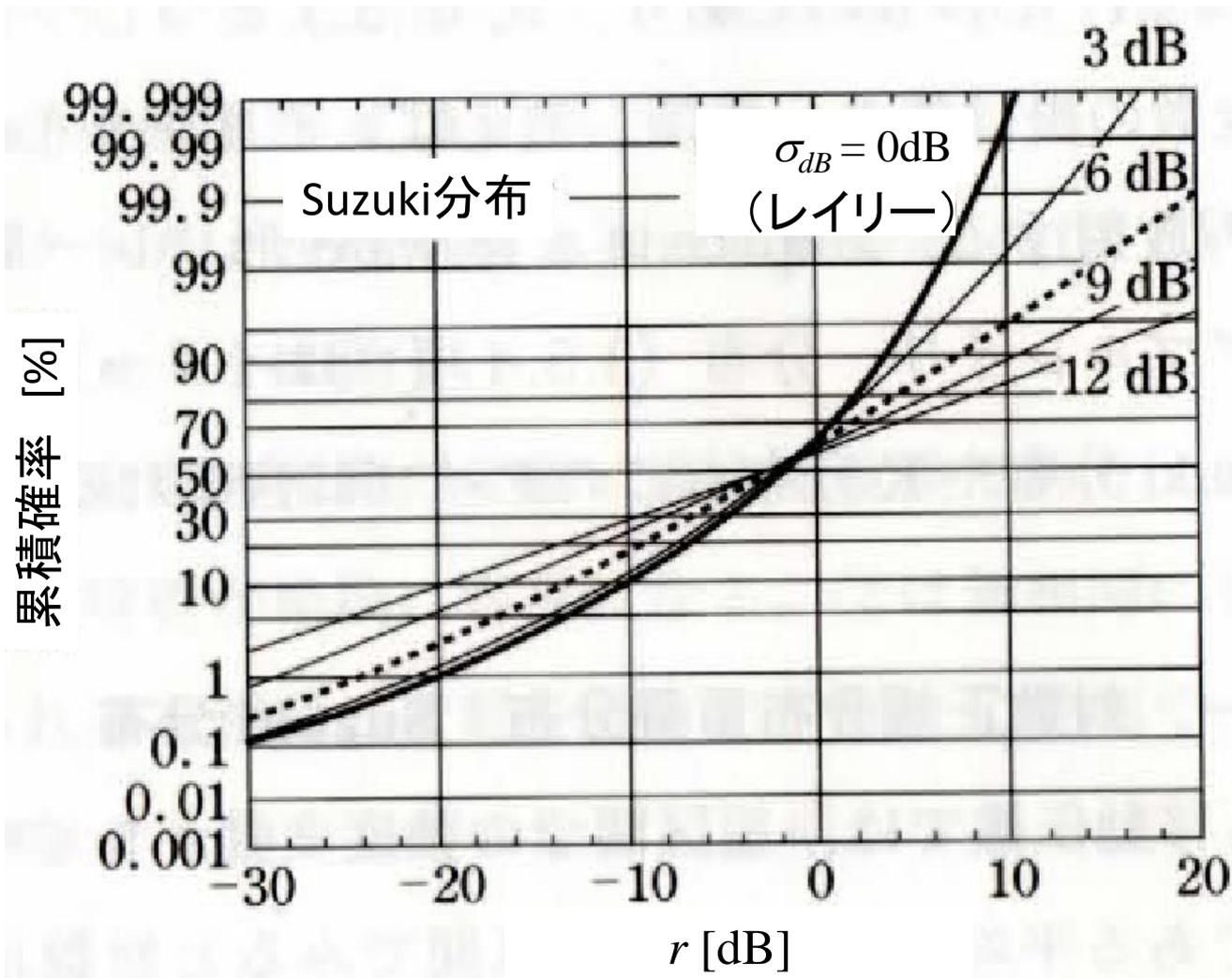
$$F\left(r; \mu = -\frac{\ln 2}{2}, \lambda\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left\{-\frac{u^2}{2} - r^2 \exp(-2\lambda u)\right\} du$$

パラメータ μ と λ は、 $\ln \sigma$ の平均値と標準偏差
dB値で表す遮へい変動の標準偏差を σ_{dB} とすると、

$$\mu = -\frac{\ln 2}{2}, \lambda = \sigma_{dB} / (20 \log_{10} e) (= 0.115 \sigma_{dB})$$

この分布の意味は明確だが、これも、扱いにくい式なので、
仲上m分布、ワイブル分布、K分布などで近似する方法も試みられている。

レイリー/対数正規重畳分布 (Suzuki 分布)



遮蔽変動が大きくなると対数正規分布(図で直線)に近づく

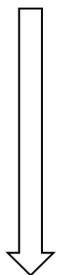
電力変動を表す確率分布

- ⑥ 指数分布
- ⑦ カイ二乗分布
- ⑧ ガンマ分布

⑥ 指数分布

電力変動(あるいはSN比)の分布

振幅変動:レイリー分布



$$f_{Rayleigh}(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

電力変動:指数分布

$$z = r^2$$

$$f_{Exp}(z) = f_{Rayleigh}(r(z)) \left| \frac{dr}{dz} \right| = \lambda e^{-\lambda z}$$

$$\lambda = \frac{1}{\langle z \rangle} = \frac{1}{2\sigma^2}$$

⑦ カイ二乗分布

x_i : 独立な標準正規分布 (平均値 0、分散 1)

$$z = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

z の確率分布: (自由度 n の)カイ二乗分布

$$f_{\chi^2}(z; n) = \frac{1}{2\Gamma(n/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{n/2-1} \exp\left(-\frac{z}{2}\right)$$

(確率変数の和の分布の導出は、特性関数に変換して行う)

⑧ ガンマ分布

電力変動の和の分布

カイ二乗分布を2変数にして一般化した分布：ガンマ分布
(スケールパラメータ β の導入と、 $n/2 \rightarrow \nu (>0)$ の置き換え)

$$f_{Gamma}(z; \nu, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \beta^\nu z^{\nu-1} \exp(-\beta z) \quad (\Gamma \text{ はガンマ関数})$$

レイリーフェージング環境における
スペースダイバーシチ(最大比合成)のSN比の確率分布

$$f_{MRC}(\gamma; M, \Gamma_0) = \frac{1}{(M-1)!} \frac{\gamma^{M-1}}{\Gamma_0^M} \exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_0}\right)$$

γ : 合成信号のSN比

M : アンテナ素子数

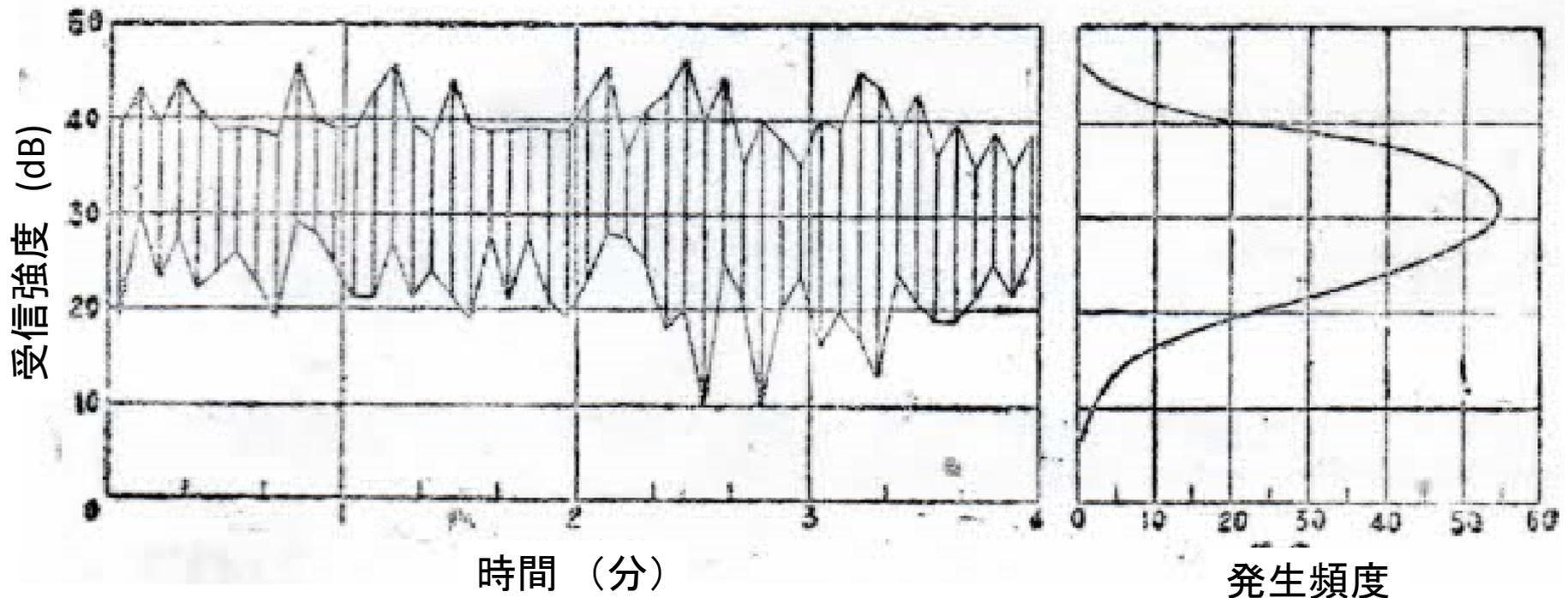
Γ_0 : 素子アンテナのSN比

仲上m分布の不思議を探る

⑨ 仲上m分布

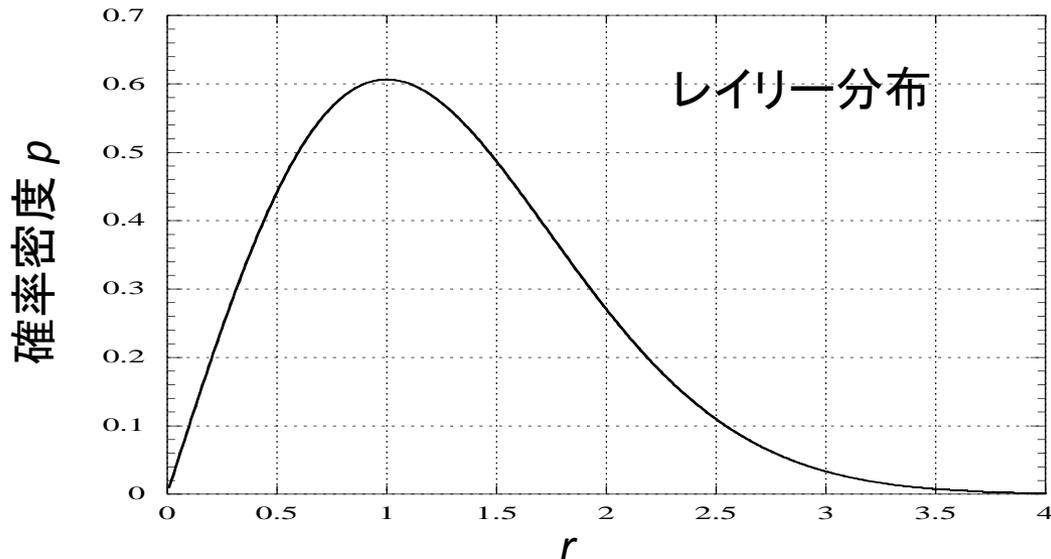
(分類上は振幅を表す分布)

短波フェージングデータと頻度分布特性(下記文献の図2. 3より)



今のように自動記録したデータをパソコンが解析してくれる時代と違って、仲上が働いていた時代（1930～1940年代）には、測定データもブラウン管を見て写真を撮ったり自記記録計の紙データであったりで、その解析もすべて手作業である。短波のフェージングの周期は数秒程度以下であるので、観測単位時間を3～5秒とし、その間における電界強度の変動の範囲（最大値と最小値）をもってその間の電界強度の変動を代表させ、これの数分間の連続記録（左）から頻度分布（右）を得ていたようである。

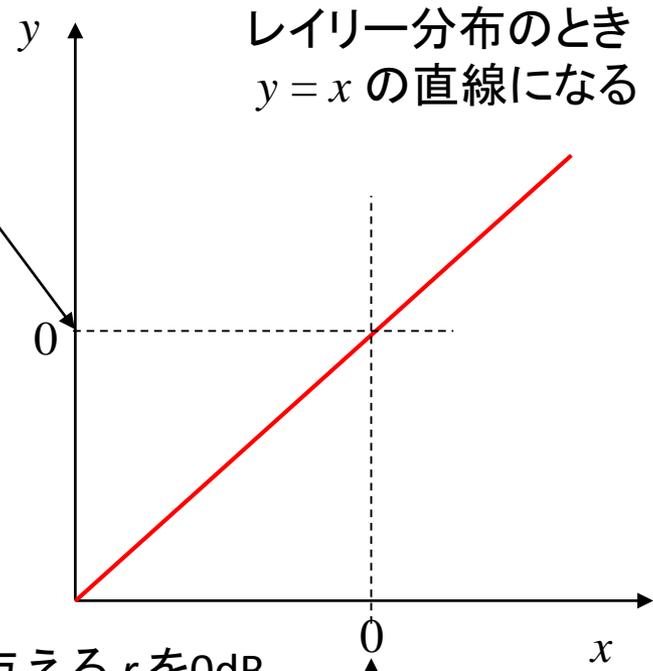
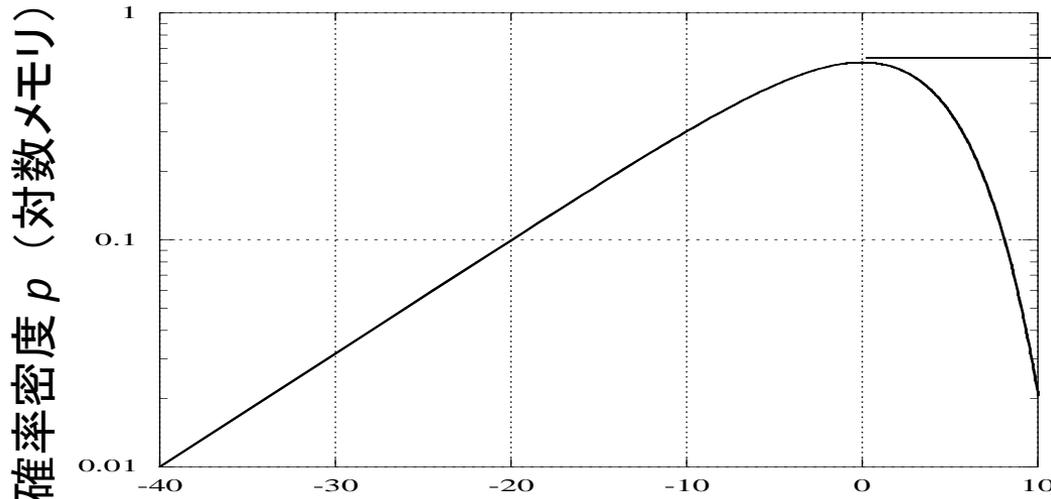
相対頻度グラフ(レイリー分布のPDFを直線で表す特殊方眼紙)



$$x = 1 + \frac{2}{M} - \exp(2\chi / M)$$

$$(M = 20 \log_{10} e)$$

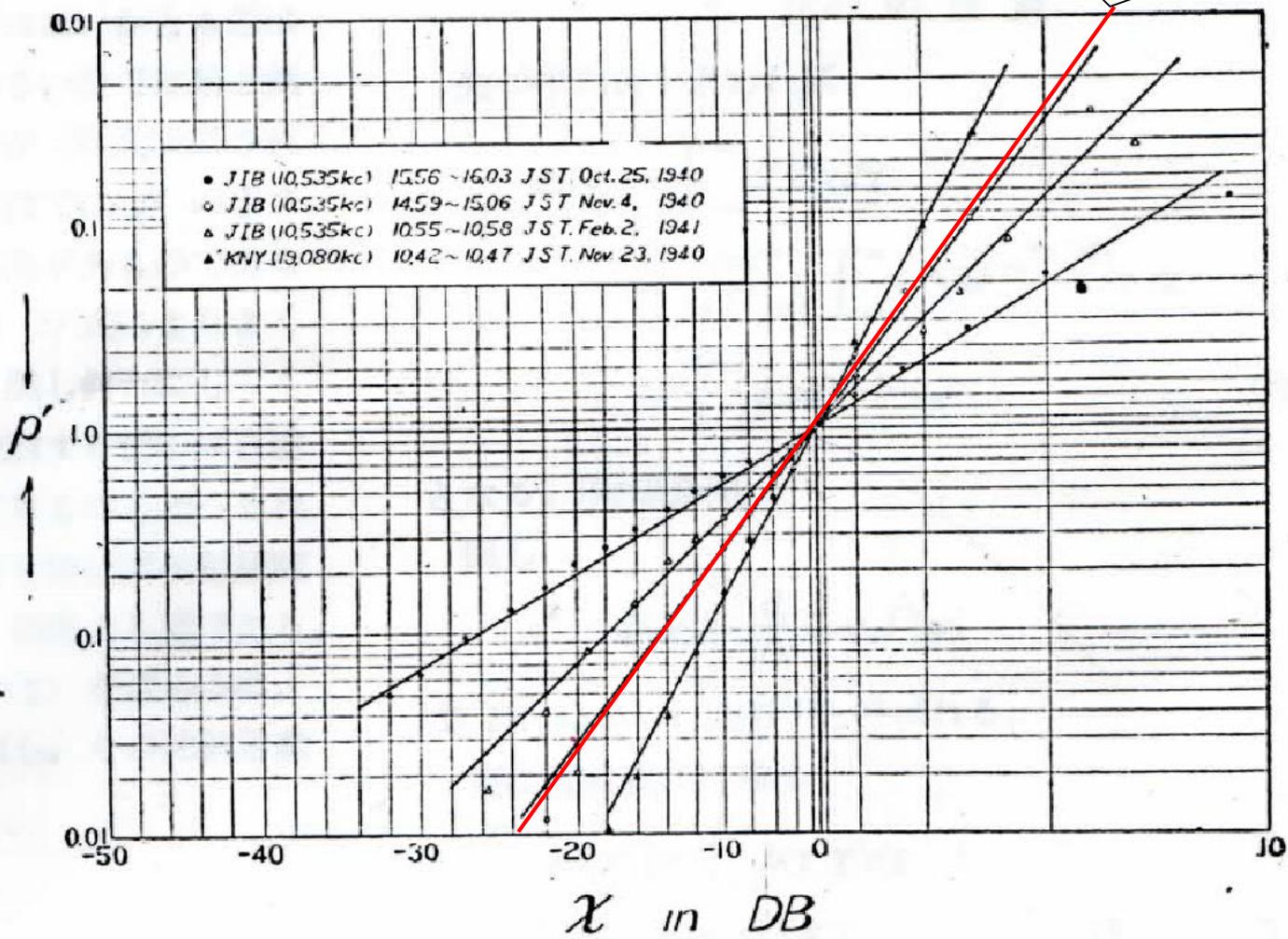
$$y = \begin{cases} \log_e p' & (\text{for } \chi \leq 0) \\ -\log_e p' & (\text{for } \chi > 0) \end{cases}$$



ピーク値を与える r を 0dB

短波フェージングの相対頻度特性(その1:下記文献の図1より)

$y = x$: レイリー分布



測定データから
どれも、直線に近い

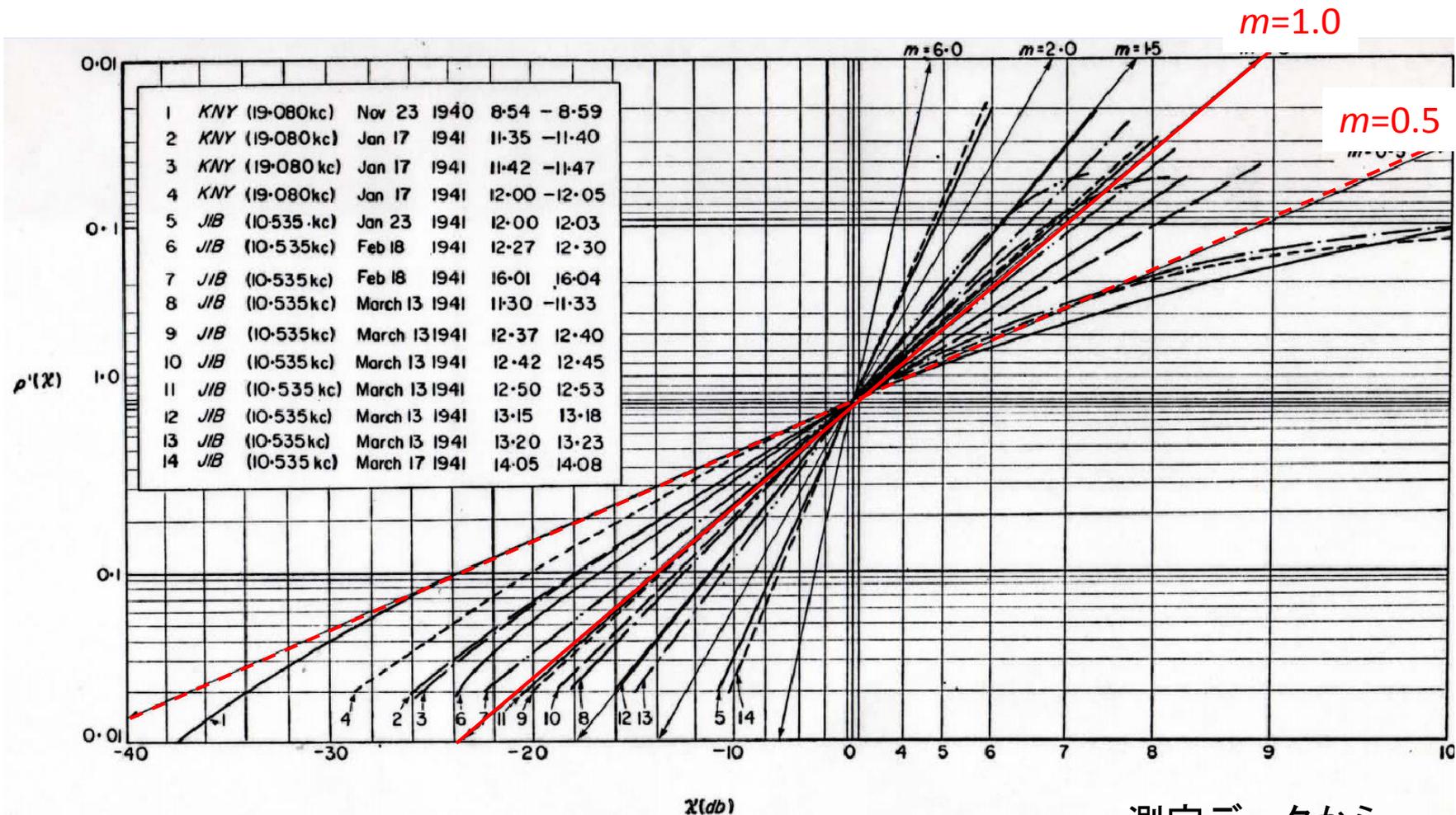


$y = mx$

の性質を発見
(パラメータ: m)

仲上稔, “短波によるフェージングの統計的性質,” 電気通信学会誌, no. 239, pp. 145-150, 1943.

短波フェージングの相対頻度特性(その2: 下記文献のFig. 2.1より)



測定データから

- 1) $y = mx$ の直線に近い
- 2) $m \geq 0.5$

仲上分布、m分布と呼ばれる場合もある。短波のフェージングデータの特徴から見出された分布であるが、移動通信のモデルにも役立つ非常に汎用的な分布

相対頻度グラフから $y = mx$ を発見

確率分布の式の導出は脚注レポートに

$$f(r) = \frac{2m^m}{\Omega^m \Gamma(m)} r^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} r^2\right) \quad m \geq 0.5, \quad \Omega = \langle r^2 \rangle$$

式の形(見かけの複雑さに騙されないように)

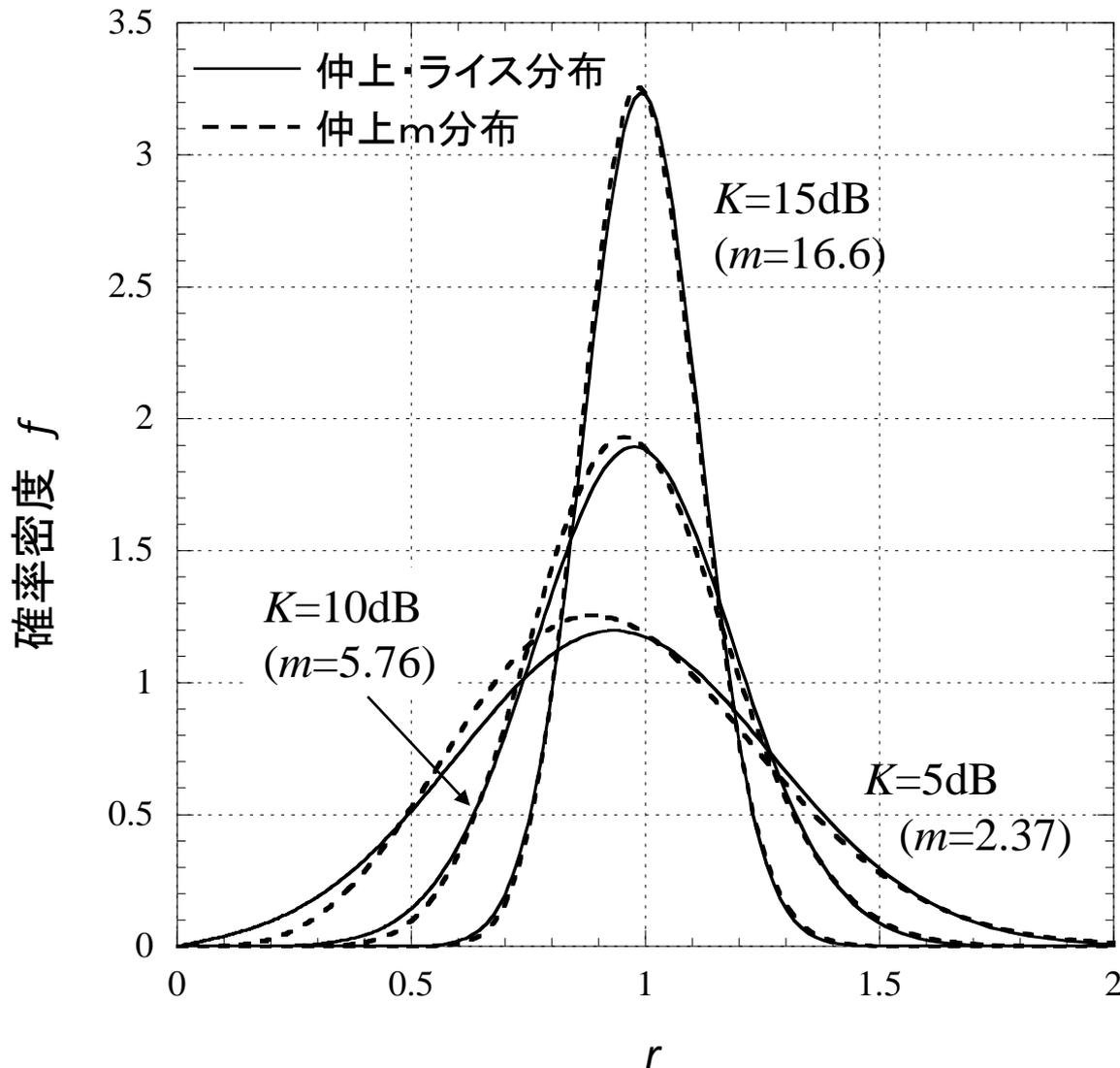
$$f(r) \propto r^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} r^2\right) \quad \begin{array}{l} (m=1 \text{でレイリー分布} \\ m=0.5 \text{で半ガウス分布}) \end{array}$$

仲上・ライス分布と分布の形が近い(近似関係にある)。

他と組み合わせての利用する場合に、仲上・ライス分布よりは、解析性に優れている。

仲上・ライス分布と仲上m分布の近似関係:PDFで見る

$$\langle r^2 \rangle = a^2 + 2\sigma^2 = \Omega = 1 \quad (\text{電力正規化})$$



パラメータ: m と K の換算

$$m(\geq 1) = \frac{(K+1)^2}{2K+1}$$

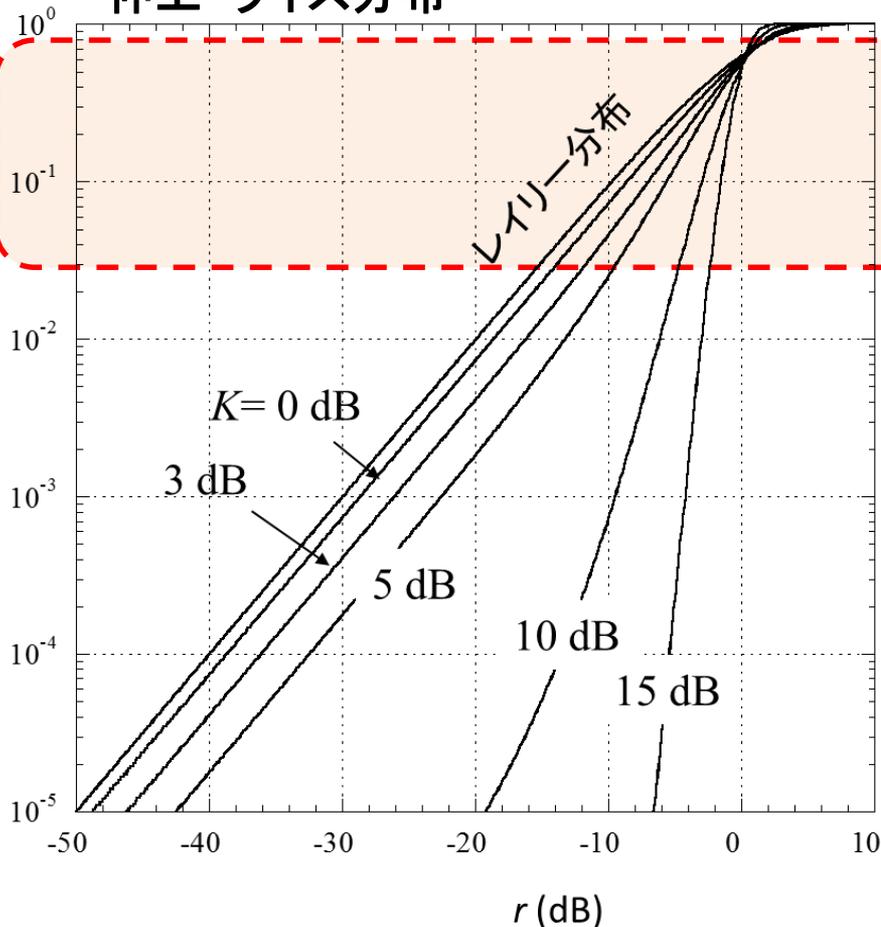
$$K = \sqrt{m^2 - m} + m - 1$$

全体的に見ると
良い近似関係

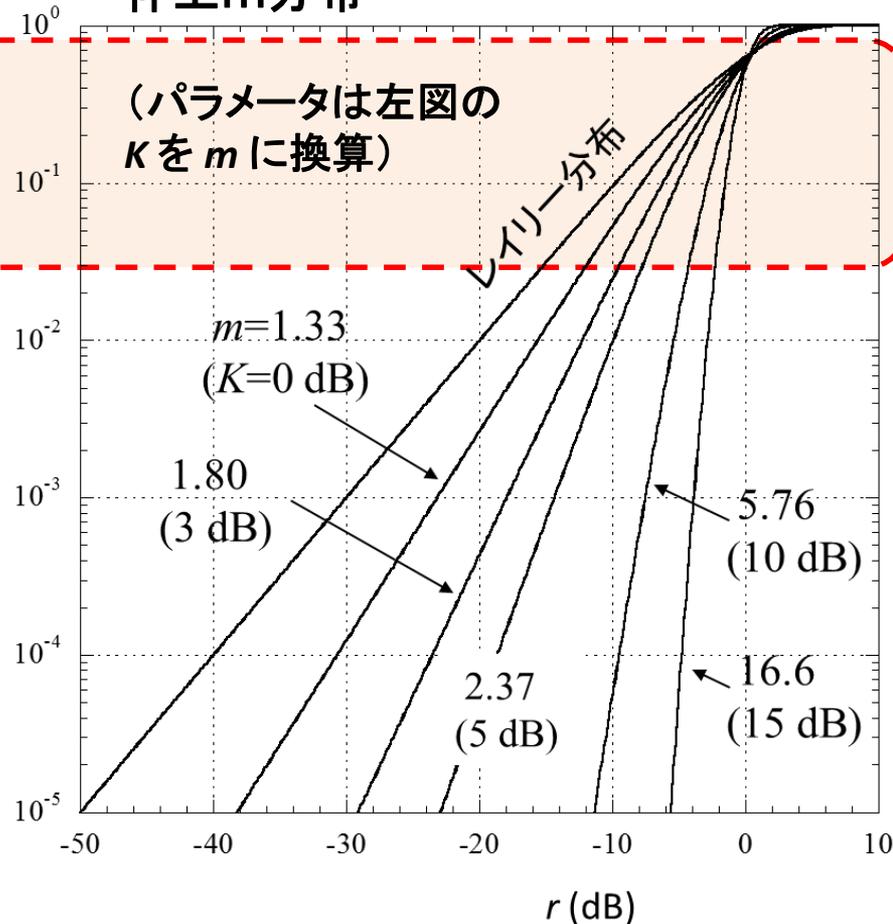
他の関数と組み合わせて
使うとき、解析性が良いの
で、仲上・ライス分布の代
わりにm分布が使われるこ
ともある

仲上・ライス分布と仲上m分布の近似関係：CDFで見る

仲上・ライス分布



仲上m分布

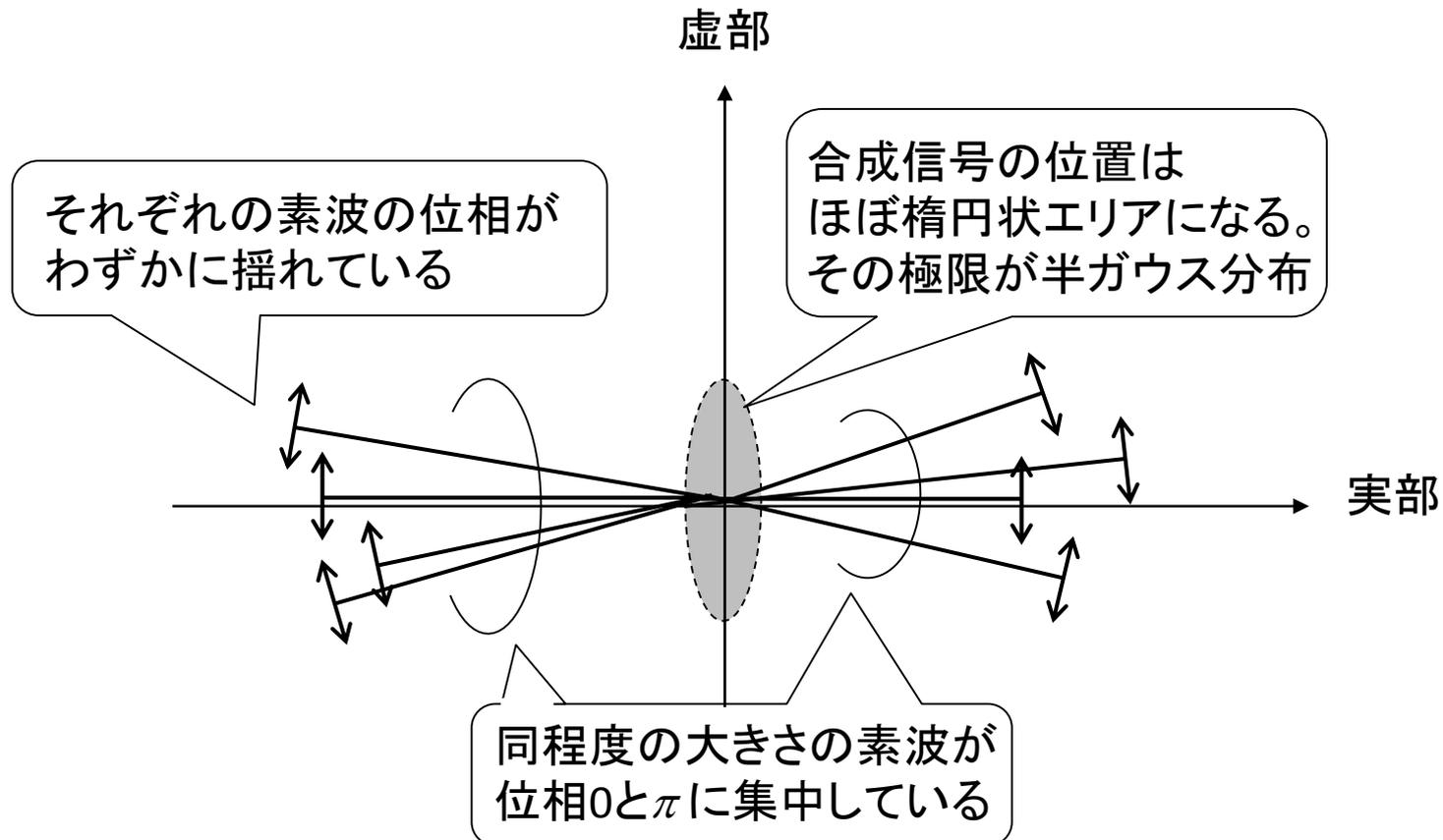


良い近似関係にあるのは図の赤点線枠内あたり
分布の裾の方では、大きな違いが出ている

BER計算などの演算には、代用が大きな誤差を生むので注意

$0.5 \leq m < 1$ ではレイリー分布より深い落ち込み:どんな環境?

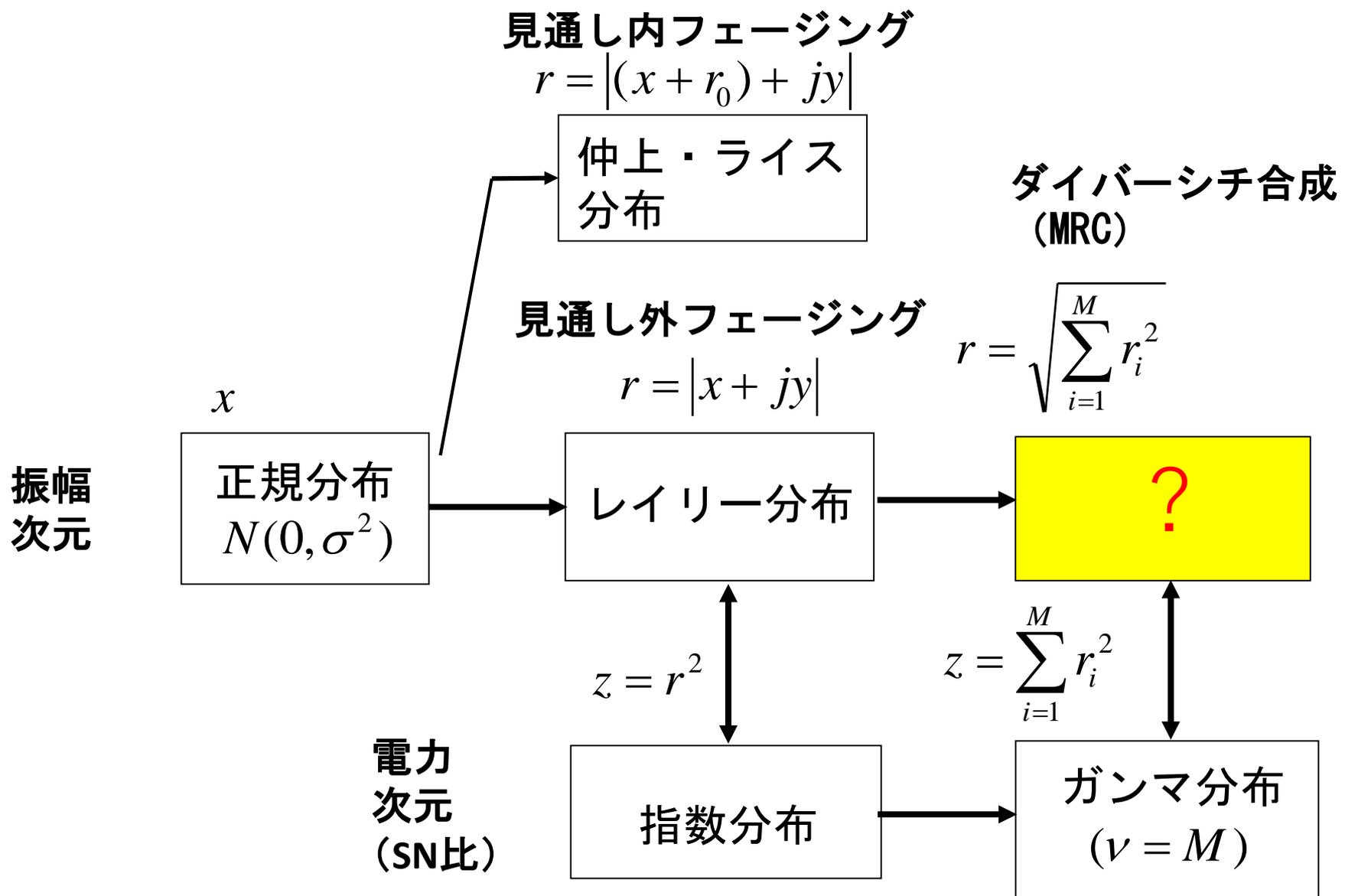
$$m = 0.5 \rightarrow f(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi\Omega}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\Omega}\right) \quad \begin{array}{l} \text{半ガウス分布} \\ \text{(ガウス分布の正側のみの分布)} \end{array}$$



仲上m分布の特徴は

- 短波のフェージングで生まれた分布であるが、
移動伝搬環境のフェージングの特性もよく表す(実用的分布)
 - レイリー分布より深い変動をするフェージングもカバーしている
 - 様々な分布の近似分布として有用(数式処理に便利)
 - その分布を生み出す物理環境をうまく描けない
 - 仲上mフェージング環境を計算機シミュレーションで作りたい
と言ったときに悩む(例えば、位相分布は?)
(仲上自身、その意味付けへの苦闘が論文から読み取れる)
- 果たして、仲上m分布の実態(物理イメージ)は?

伝搬モデルに現われる正規分布とその仲間たち (仲上m分布の位置付け)



前スライドの「？」部分には「仲上 m 分布」が入る

正規分布(ガウス分布)、レイリー分布、指数分布、ガンマ分布(カイ二乗分布)は、数学・物理分野で、20世紀初頭には既に知られていた分布

そのころ、誰かが、ガンマ分布を電力変動を表す分布と捉え、「その実効値(電圧次元)の分布は？」という思いに至れば、一つの理論分布として仲上 m 分布は、変数変換によってたちどころに得られていたであろう。

しかし、歴史はそうではなく、1940年代、電波工学者の仲上稔氏が短波のフェージングの性質として、実験データから経験的に導いたものであり、その誕生はドラマティックある(必要は発明の母)

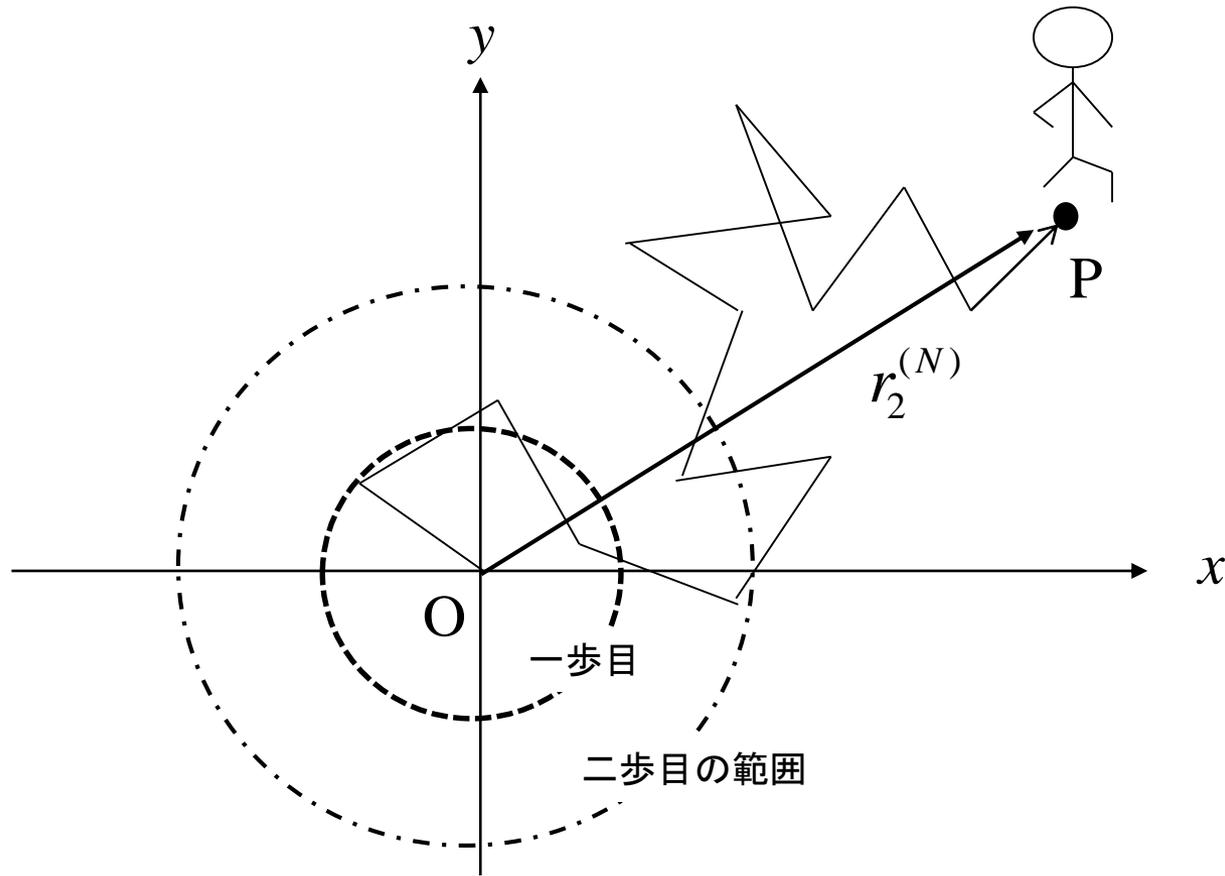
(メモ: m 分布では、パラメータ m の範囲を0.5以上としているが、対応するガンマ分布のパラメータ ν の範囲は0以上である。伝搬モデルへの応用という意味で、仲上が m に加えた制約である)

仲上 m 分布は時代が変わっても、現在の移動通信の伝搬モデル(マルチパス伝搬モデル)の中に生き続けている。

(メモ:仲上・ライス分布やLoo分布は理論に裏打ちされた環境を表すが、理論どおりに現れる電波環境は、実はどこにもないという意味において)

余談 ランダムウォークと仲上m分布

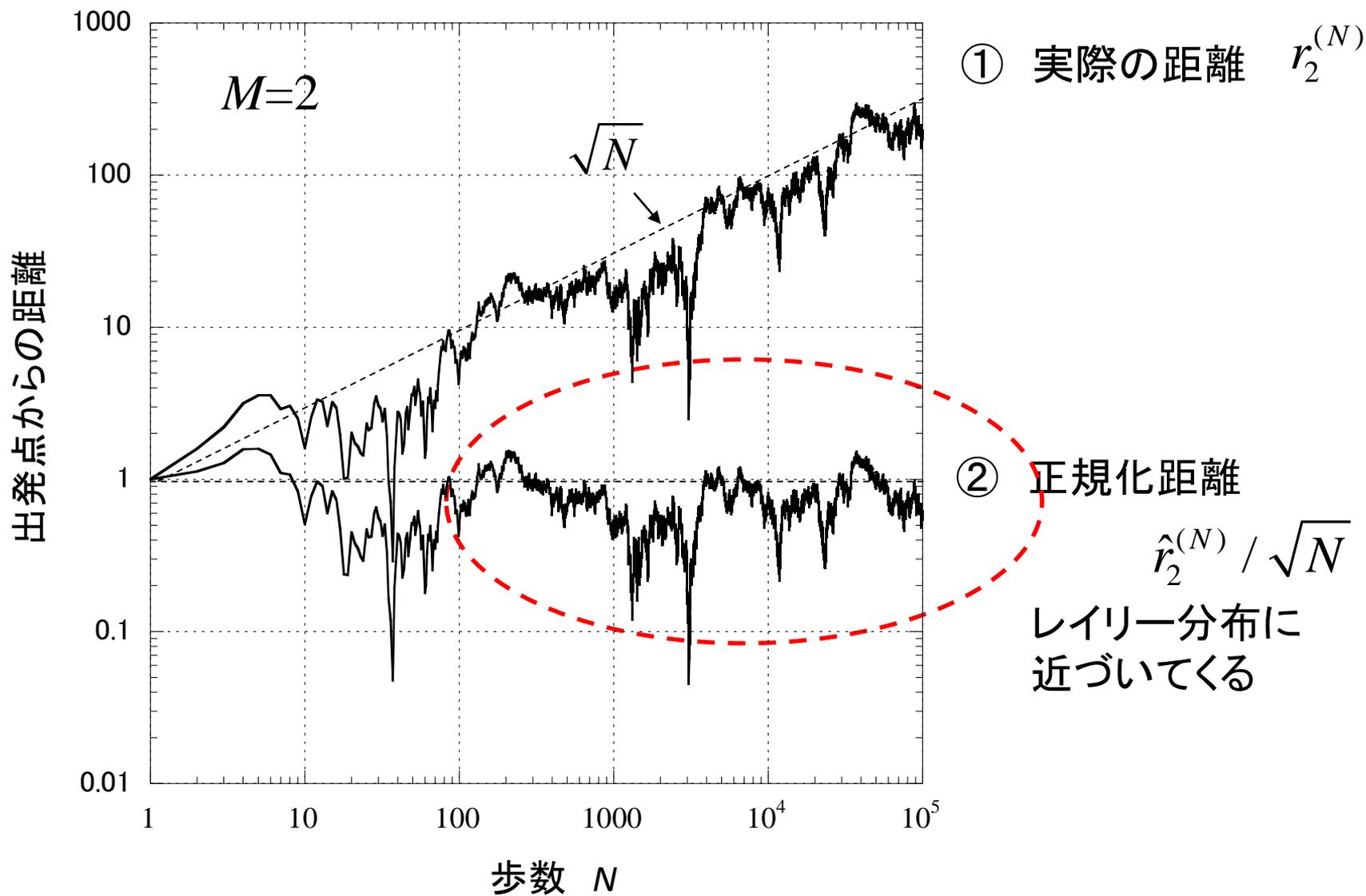
平面上のランダムウォークとレイリー分布



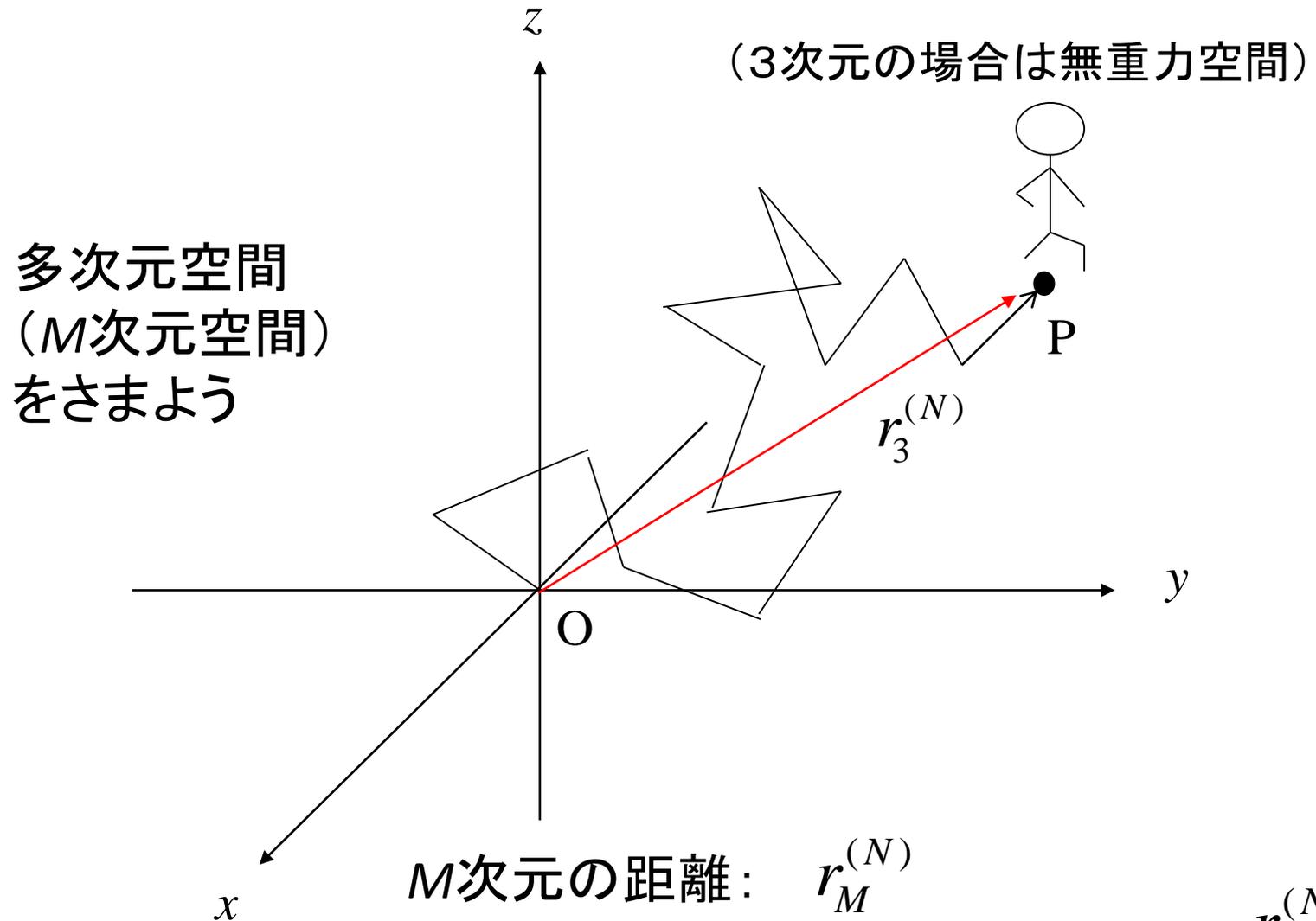
前提

- 1) 平面上を歩く歩幅: 一定 (この長さを1)
- 2) 次のステップの方向: ランダム

2次元空間のランダムウォークをしてみると



多次元空間のランダムウォークと仲上m分布

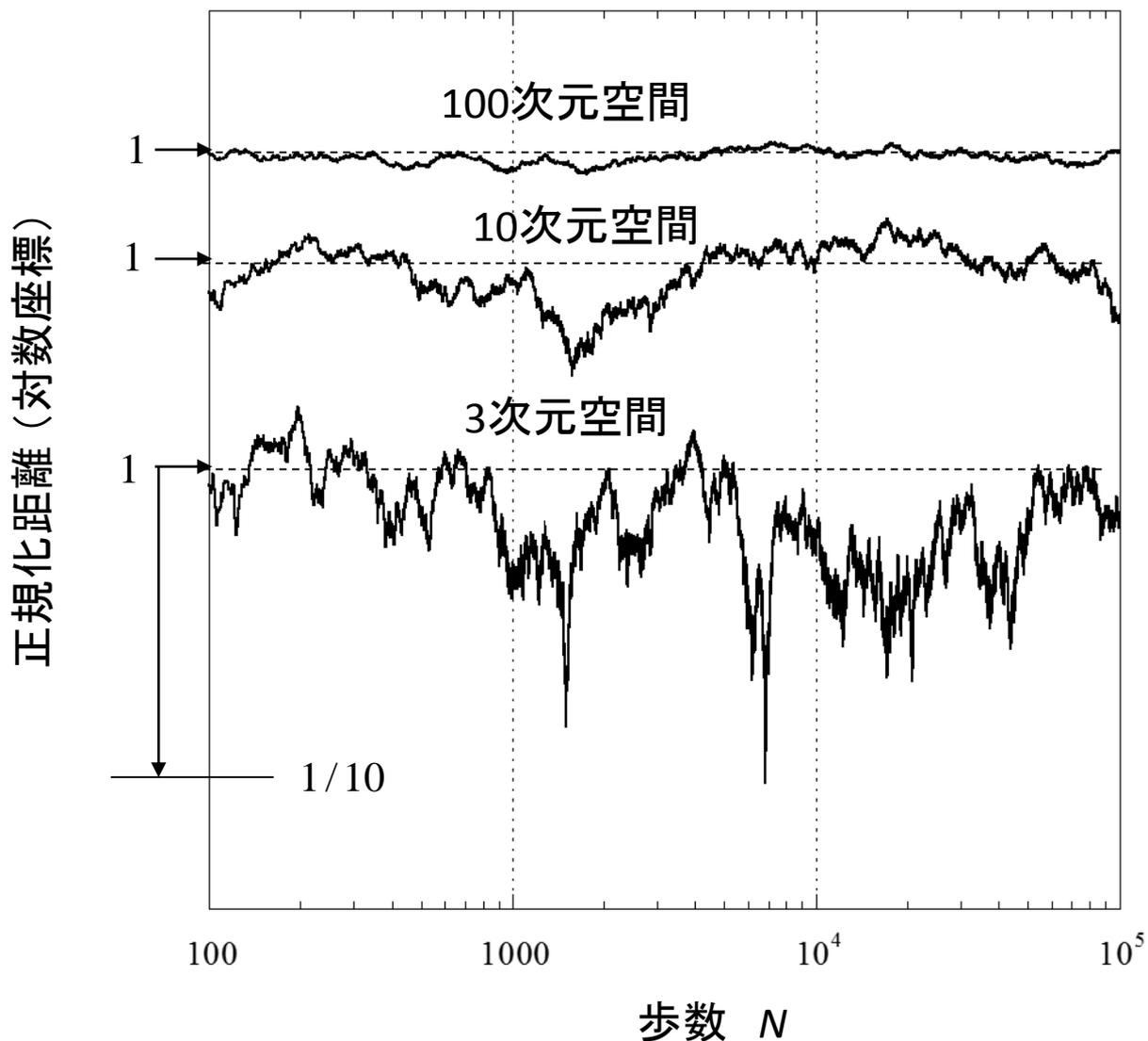


M 次元の距離: $r_M^{(N)}$

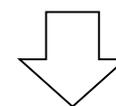
$N \gg 1$ での正規化距離: $\hat{r}_M = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r_M^{(N)}}{\sqrt{N}}$

正規化距離の確率分布は？

多次元空間ランダムウォークの正規化距離



M 次元空間のランダムウォークでの出発点からの距離は $m=M/2$, $\Omega=N$ の仲上 m 分布になる



次元が高いほど出発点に近づかなくなる

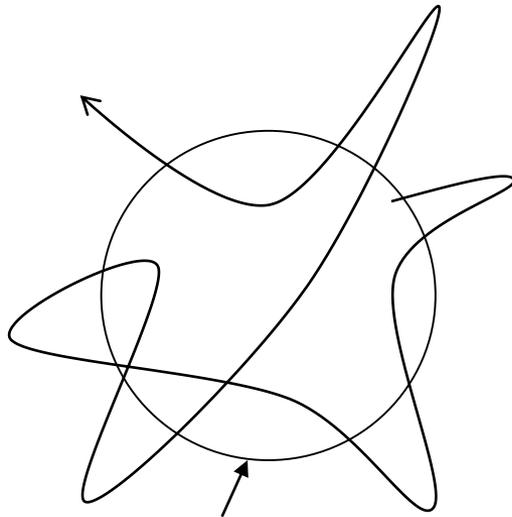
出て行ったきり、帰ってこなくなる

(1の値付近に張り付く)

(注: 3つの線が重なって見にくくならないよう縦方向はずらしているが、1/10低下の幅は同じ)

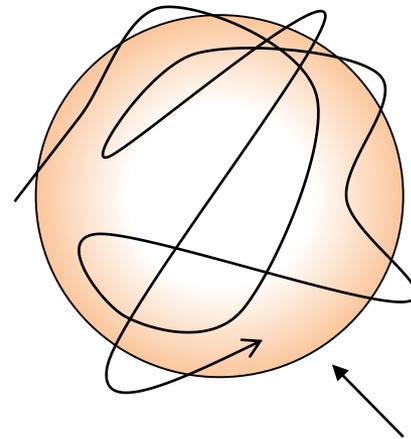
超球面とランダムウォークの軌跡

2次元空間



半径 $1/\sqrt{N}$ の円

多次元空間
(十分高い次元)



半径 $1/\sqrt{N}$ の超球面

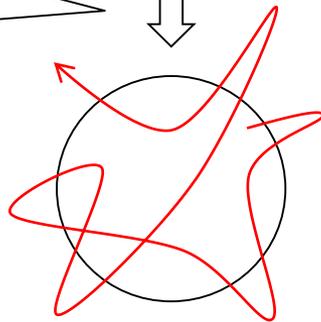
次元が高くなると
超球面に張り付く動きになる

多次元ランダムウォークとスペースダイバーシチ(MRC)

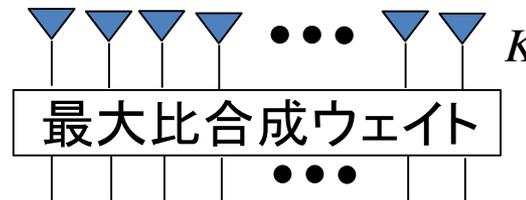
スペースダイバーシチとは
2次元RWを多次元RWに置き替えて
原点回帰を抑える技術

マルチパス伝搬環境

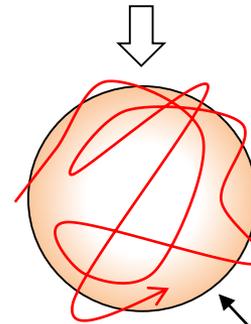
信号振幅は
レイリー分布



正規化半径1の円周を中心に平面
状をダイナミックに動き回る
(受信強度が時々大きく落ち込む)



合成信号振幅は
伸上m分布



正規化半径 \sqrt{K} の超球
面付近を動き回る
(受信強度は常時安定)

多次元空間の超球面

- 移動通信の電波伝搬は確率過程の現象である
- 確率過程に基づく物理現象には、それを表すのに相応しい確率分布モデルがある
- そのような確率分布として、正規分布、対数正規分布、レイリー分布、仲上・ライス分布、Loo分布、Suzuki分布などがある
- 仲上m分布は、多くの確率分布を近似する汎用性があるが、その物理イメージを捉えるのは難しい
- ここで述べなかつた伝搬モデルに有用な確率分布もたくさんある。(例えば、MIMOチャネルのウィシャート分布など)。物理現象に結びつけながら、調べてほしい

Part 3

任意マルチパス環境の受信信号振幅の確率分布を求める手法

解析手段を身に着けることは大事

多彩な武器をもつと攻略が効率的にできる

(手にする武器が少ないと、その武器だけで頑張ろうとして無理が生じることも)

その手段の一つ、ハンケル変換形特性関数を用いて確率分布を求める方法を学ぶ

この手法は、古典的な手法(仲上が n 分布(=仲上・ライス分布)を導くのに用いた方法)であるが、数値演算手法としてこれからの時代にも役立つ手法である」

何ができるか

それぞれの振幅が異なる任意の数の正弦波の集まった信号

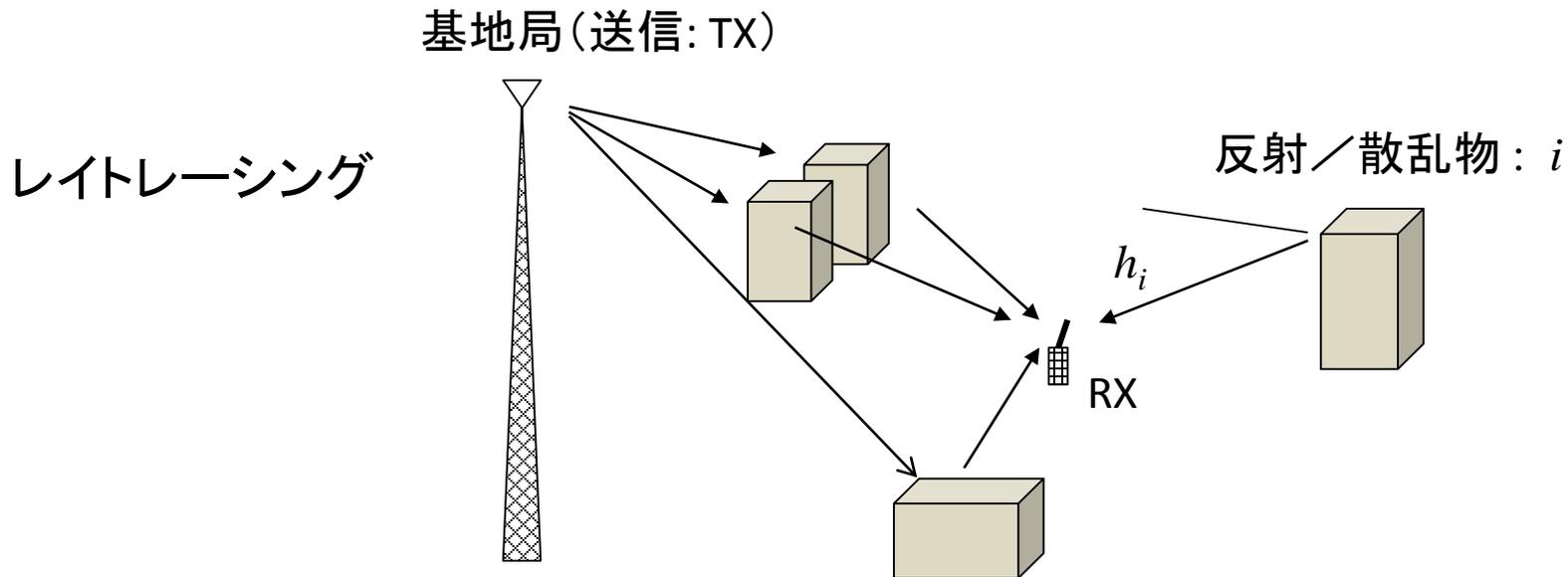
正弦波A + 正弦波B + 正弦波C + ... + 正弦波Z

の包絡線レベルの確率分布を求めることができる

手法の詳細説明は、技術レポート:TR-YK-043

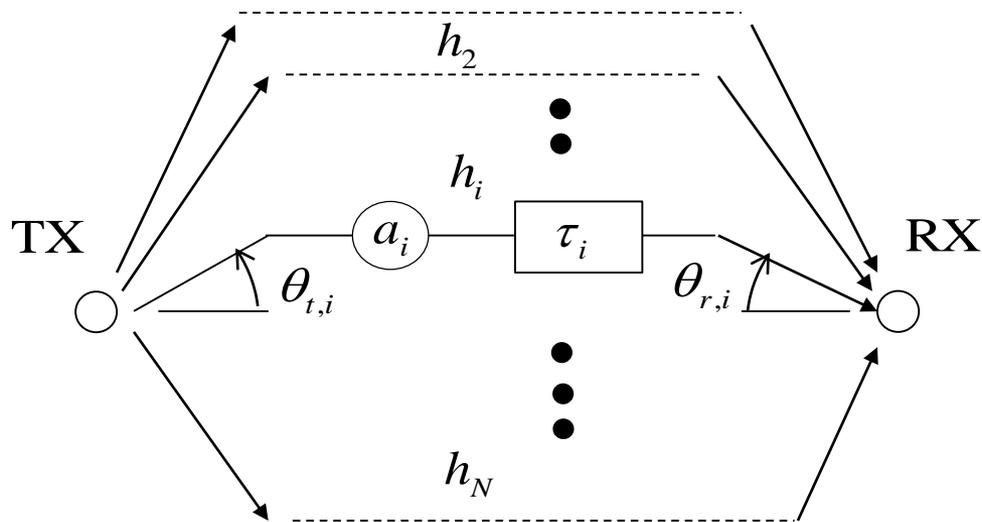
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_043_Hankel_Transform.pdf

電波環境のレイトラッキング



得られる情報
(各パス i に対して)

- h_i : インパルス応答
- a_i : 複素振幅
- τ_i : 遅延時間
- $\theta_{t,i}$: 放射角度
- $\theta_{r,i}$: 入射角度



電波環境のレイトレーシング:その後どうする?

直接に得られる情報:インパルス応答

$$h(\tau, \theta_t, \theta_r) = \sum_{i=1}^N h_i(\tau, \theta_t, \theta_r)$$
$$h_i(\tau, \theta_t, \theta_r) = a_i \delta(\tau - \tau_i) \delta(\theta_t - \theta_{t,i}) \delta(\theta_r - \theta_{r,i})$$

レイトレーシングの結果を処理して得られる情報

- ① 受信強度の確率分布 → 回線設計、BER評価
- ② 遅延プロファイルと遅延スプレッド → 広帯域伝送特性(符号間干渉)
- ③ パス方向の角度スペクトル → アダプティブアレー、MIMO
(空間信号処理)

受信信号の合成振幅(包絡線)

$$a = \sum_{i=1}^N a_i = \sum_{i=1}^N r_i \exp(j\phi_i) \quad \rightarrow \quad r = \left| \sum_{i=1}^N a_i \right| = \left| \sum_{i=1}^N r_i \exp(j\phi_i) \right|$$

確率変数の和の分布を求めるのに便利な手法：特性関数

変数 X の確率分布： $f(x)$

フーリエ(逆)変換の形で積分変換(特性関数)

$$\Phi_X(t) = \langle e^{jtx} \rangle = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} e^{jtx} f_x(x) dx$$

(他の変換として、ラプラス変換形の積率母関数がある)

特性関数を用いることの便利な点

確率分布の和の分布は、畳み込み積分になって、変数の数が多くなると計算困難になる。特性関数の土俵では、個々の分布の特性関数の積になって、演算が容易になる(詳しくは確率の教科書で)

例 正規分布の和の分布 → 正規分布

指数分布の和の分布 → ガンマ分布 (スペースダイバーシティ)

正弦波の信号を足して包絡線の分布を求めるのは、包絡線同志を足し算する演算ではないので、上記の特性関数の適用が困難である

→ ハンケル変換形特性関数はそれができる

ハンケル変換形の特性関数

確率密度関数 (PDF) $f(r)$

ハンケル変換形特性関数

$$g(k) \{ = \langle J_0(rk) \rangle \} = \int_0^\infty f(r) J_0(rk) dr$$

$$f(r) = r \int_0^\infty g(k) k J_0(rk) dk$$

積分変換対

(ハンケル変換には、いくつかの変形があり、これもその一つ)

累積分布関数 (CDF) は

CDFでも一重積分が維持されていることが嬉しい

$$F(r) \left(= \int_0^r f(r) dr \right) = r \int_0^\infty J_1(kr) g(k) dk$$

特関数 $g(k)$ が求められれば、PDFもCDFも一重積分で済む
(一重の数値積分は、今の時代ではネックではない)

ハンケル変換形特関数の詳しい説明は、技術レポート: TR-YK-043

http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_043_Hankel_Transform.pdf

【参考】 変換が成立していることの確認 (TR-YK-043の付録1)

$$g(k) = \int_0^{\infty} J_0(kr) f(r) dr$$

$$f(r) = r \int_0^{\infty} k J_0(kr) g(k) dk$$

$$= r \int_0^{\infty} k J_0(kr) \left[\int_0^{\infty} J_0(kr') f(r') dr' \right] dk$$

$$= r \int_0^{\infty} f(r') \left[\int_0^{\infty} k J_0(kr) J_0(kr') dk \right] dr'$$

$$= r \int_0^{\infty} f(r') \frac{1}{r'} \delta(r' - r) dr' \quad (\text{大幅に省略})$$

$$= f(r)$$

求めたいもの: 合成信号の振幅(包絡線)の確率分布

任意振幅の N 波の合成信号の振幅

$$a = r_1 e^{j\phi_1} + r_2 e^{j\phi_2} + \dots + r_N e^{j\phi_N}$$

$r_1 \sim r_N$: 振幅一定

$\phi_1 \sim \phi_N$: 独立な任意位相(一様分布)

$$r = |a|$$

$$= \sqrt{\left(r_1 \cos \phi_1 + r_2 \cos \phi_2 + \dots + r_N \cos \phi_N\right)^2 + \left(r_1 \sin \phi_1 + r_2 \sin \phi_2 + \dots + r_N \sin \phi_N\right)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^N r_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{i' \neq i \\ i'=1}}^N r_i r_{i'} \cos(\phi_{i'} - \phi_i)}$$

このやり方では、 $N=1$ の場合は自明に、 $N=2$ の場合は簡易な計算で r の確率分布は求められるが、 $N \geq 3$ では、簡単には求められない

正弦波合成信号の包絡線変動のハンケル変換形特性関数

振幅 r_1 の一波の場合 ($N=1$)

$$f_{r\phi}(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \delta(r - r_1)$$

$$g(k) = \int_0^\infty J_0(kr) \int_0^{2\pi} f_{r\phi}(r, \phi) d\phi dr = \int_0^\infty J_0(kr) \delta(r - r_1) dr = J_0(kr_1)$$

振幅 r_1 と r_2 の二波の場合 ($N=2$)

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \Delta\phi} \quad (\Delta\phi \equiv \phi_2 - \phi_1)$$

導出の詳細は
TR-YK-043の付録1に

$$g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_0\left(k\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \Delta\phi}\right) d\Delta\phi = J_0(kr_1)J_0(kr_2)$$

振幅 $r_1 \sim r_N$ の N 波の場合

$$g(k) = J_0(kr_1) \times J_0(kr_2) \times \cdots \times J_0(kr_N) = \prod_{i=1}^N J_0(kr_i)$$

(Kluyver, 1906)

それぞれの特性関数が積の形になっていて、
全体の特性関数を求めるのに好都合な形

確率密度関数 (PDF) に戻すと

$$\begin{aligned} f(r) &= r \int_0^{\infty} k J_0(kr) g(k) dk \\ &= r \int_0^{\infty} k J_0(kr) \prod_{i=1}^N J_0(kr_i) dk \end{aligned}$$

積分が解けていないので、嬉しくないと思うだろうが、現在のパソコンの計算能力なら一重の積分の数値演算は、大きな隘路にはならない
(数値積分に関するノウハウ(積分範囲や刻み幅)は後述)

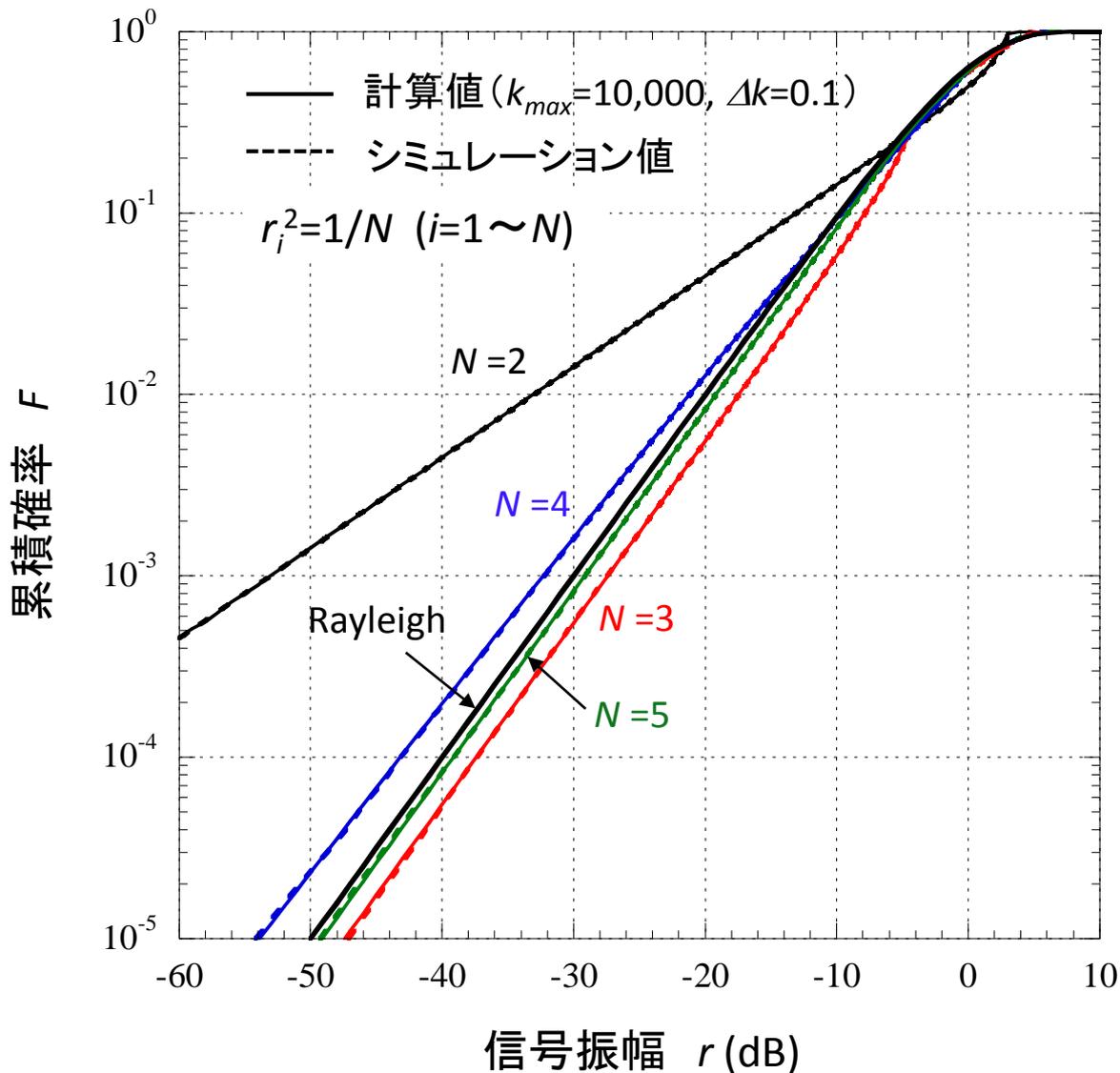
累積分布関数 (CDF) は

$$F(r) \left(= \int_0^r f(r) dr \right) = r \int_0^{\infty} J_1(kr) \prod_{i=1}^N J_0(kr_i) dk$$

【参考】 $N=2$ と $N=3$ についてのPDFは閉形式の形で解けている。 $N=3$ では、第一種完全楕円積分関数含んで結構複雑な式。式の形は、TR-YK-043に

等振幅 N 波の 合成信号の振幅 のCDF

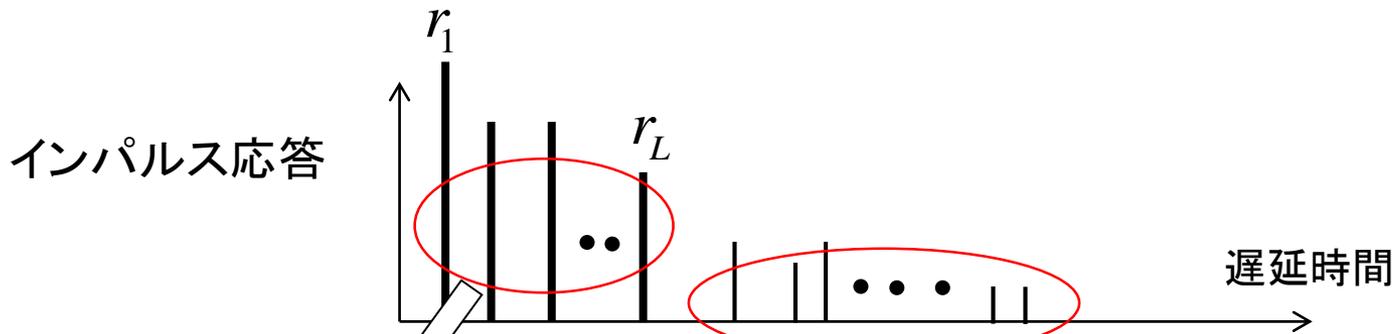
$N = 2 \sim 5$



シミュレーション値は乱数により 10^7 回試行した結果から、統計が安定している累積確率 10^{-5} 以上を示しているため、正しい理論値を代理していると思っております

(数値積分結果とずれがある場合は、数値積分側の積分範囲や刻み幅の問題による(スライド65参照))61

主要 L 波と、残りをまとめた不規則変動の和の分布



合成信号

$$a = r_1 e^{j\phi_1} + r_2 e^{j\phi_2} + \dots + r_L e^{j\phi_L} + r_{L+1} e^{j\phi_{L+1}} + \dots + r_N e^{j\phi_N}$$

主要な L 波

まとめて一つの不規則波
(振幅: レイリー分布)

$$g_{1\sim L}(k) = \prod_{i=1}^L J_0(kr_i)$$

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad \left(\sum_{i=L+1}^N r_i^2 \equiv 2\sigma^2\right)$$

$$g(k) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) \prod_{i=1}^L J_0(kr_i)$$

$$g_{L+1\sim N}(k) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right)$$

【参考】 仲上n分布(仲上・ライス分布)の誕生

1 定常波と1不規則波の合成信号の振幅

【ハンケル変換形特性関数利用】

$$g(k) = J_0(kr_0) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right)$$

$$f(r) = r \int_0^\infty k J_0(kr) J_0(kr_0) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) dk$$

仲上稔 (1940)

積分式の解法は
岩波数学公式 IIIに

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{r_0 r}{\sigma^2}\right)$$

【 r, ϕ 結合確率密度関数から(スライド 17)】

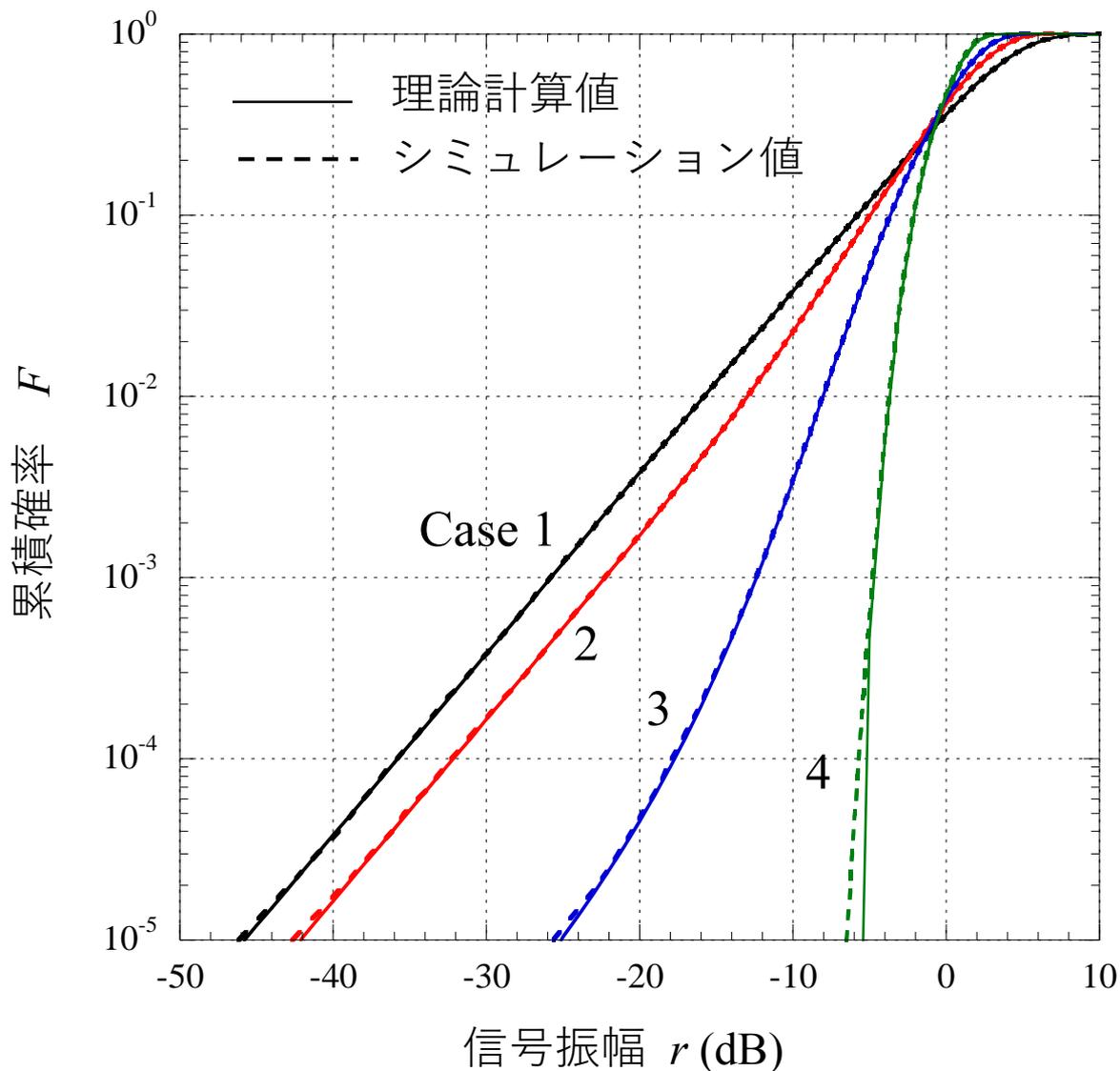
$$f_{r\phi}(r, \phi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 - 2r_0 r \cos \phi + r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f_r(r) = \int_0^{2\pi} f_{r\phi}(r, \phi) d\phi$$

S. O. Rice
(1945)

(式の導出にはライスの方法をお奨め)

3波＋不規則波の分布



設定環境

Case	r_1	r_2	r_3	ΔP
1	1	0.5	0.3	0.5
2	1	0.4	0.3	0.1
3	1	0.3	0.2	0.05
4	1	0.2	0.1	0.01

$$(\Delta P \equiv 2\sigma^2)$$

スライド 21 で説明した③の分布(2定常成分＋不規則変動成分の合成振幅の分布)もこの計算手法で求められる

【参考】 数値積分設定の目安

積分の上限値: k_{max}

$$f(r) = r \int_0^{\infty} k J_0(kr) g(k) dk$$

← 計算の刻み幅: Δk

最も簡易な積分計算式(単純分割合成)

$$f(r) = r \sum_{m=0}^{k_{max}/\Delta k} k_m J_0(k_m r) \prod_{i=1}^L J_0(k_m r_i) \exp\left(-\frac{\Delta P k_m^2}{4}\right) \Delta k \quad (k_m = m\Delta k)$$

$$F(r) = r \sum_{m=0}^{k_{max}/\Delta k} J_1(k_m r) \prod_{i=1}^L J_0(k_m r_i) \exp\left(-\frac{\Delta P k_m^2}{4}\right) \Delta k$$

- i) r の小さい変化の部分を精度よく求めたいためには、 k の値 (k_{max}) が大きいところまで計算する必要がある
- ii) r の大きい値の部分を精度よく求めたい場合は、 k の刻み幅 (Δk) を小さくしなければならない
- iii) K_{max} および Δk の目安値は r の実効値の逆数に比例する

適用の目安範囲 $r / \sqrt{P_r} \geq -50[\text{dB}]$, $F \geq 10^{-5}$

$$k_{max} \geq 10,000 / \sqrt{P_r} \quad \left(P_r = \sum_{i=1}^L r_i^2 + \Delta P \quad \left(\Delta P = \sum_{i=L+1}^N r_i^2 \right) \right)$$
$$\Delta k \leq 0.1 / \sqrt{P_r}$$

伝搬環境解析の方法としてレイトレーシングがある

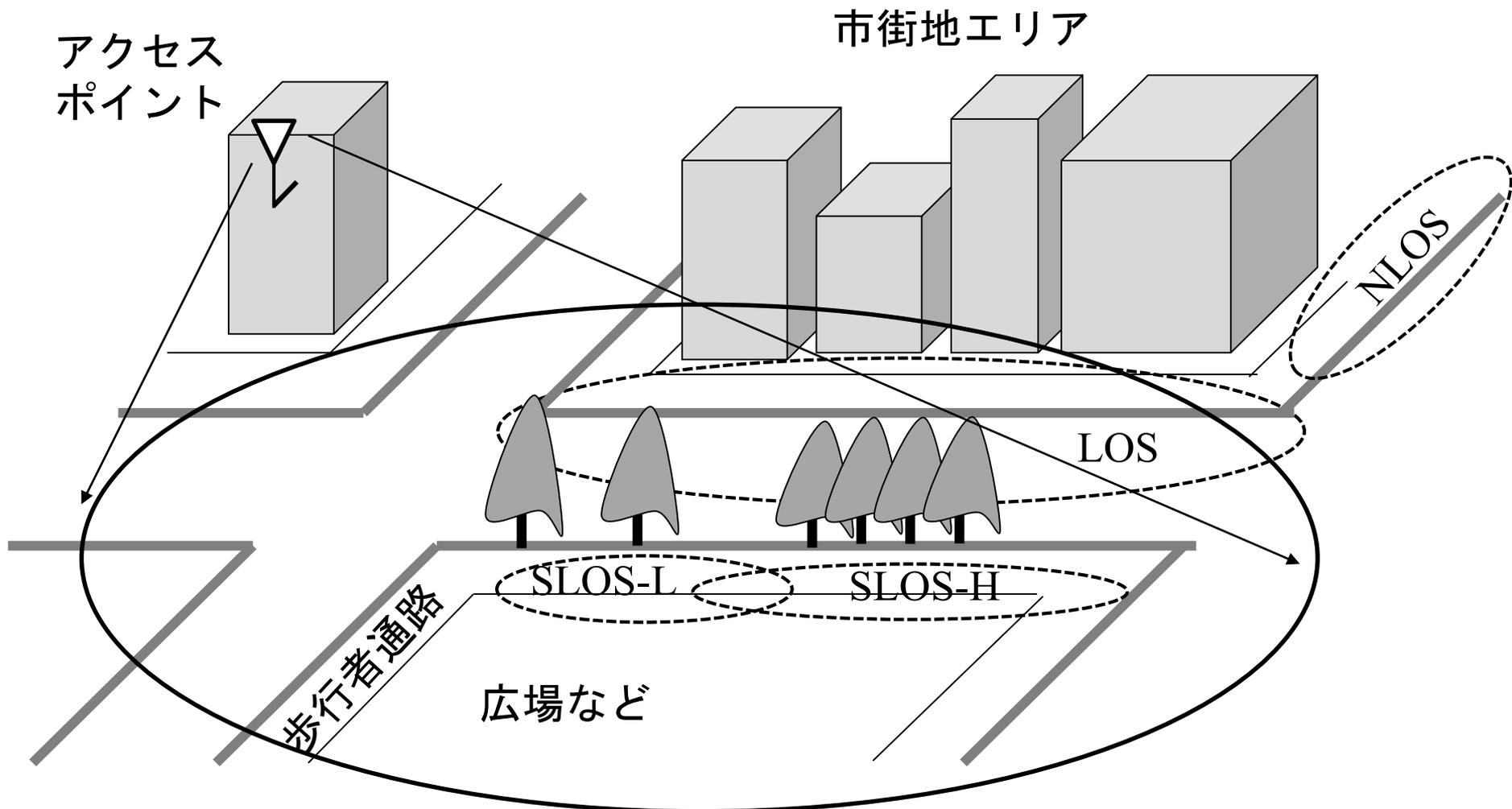
それによって得られたパス解析データから、合成信号の振幅(包絡線レベル)の確率分布を求めたいときには、ハンケル変換形の特性格関数を利用する方法が有効

ハンケル変換形特性格関数を用いると振幅の確率密度関数も累積分布関数も一回の数値積分で求めることができる。

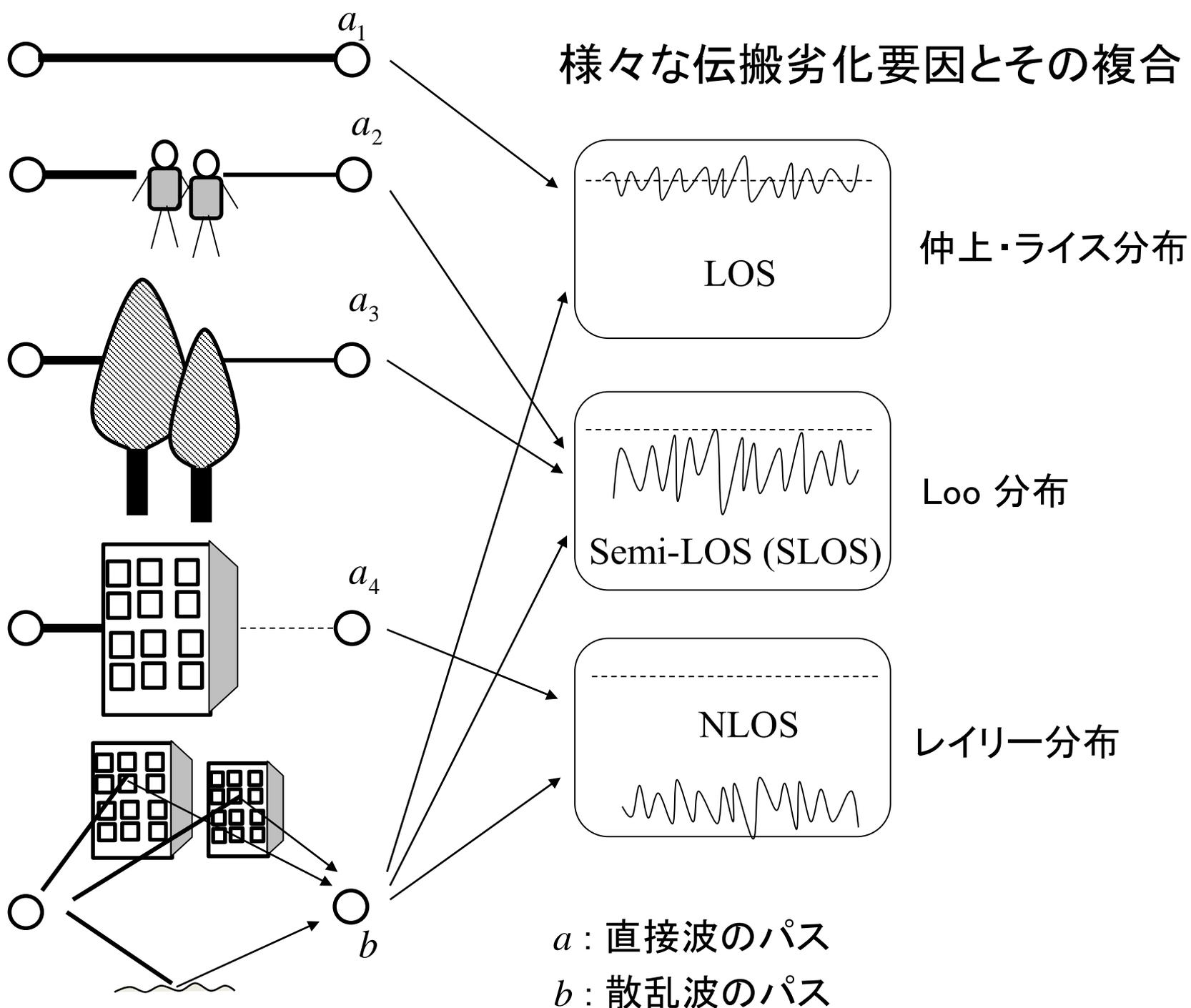
この方法は、仲上が n 分布(仲上・ライス分布)を生み出すときに利用した手法であり、確率分布の世界では古典である。仲上自身は、閉形式で表される式の導出に利用したが、今の時代のパソコンの演算性能では、一重の数値積分計算程度では大きな隘路にはならないので、確率分布解析の手段として身に付けておくと、役に立つことがあると思う

今後の展望

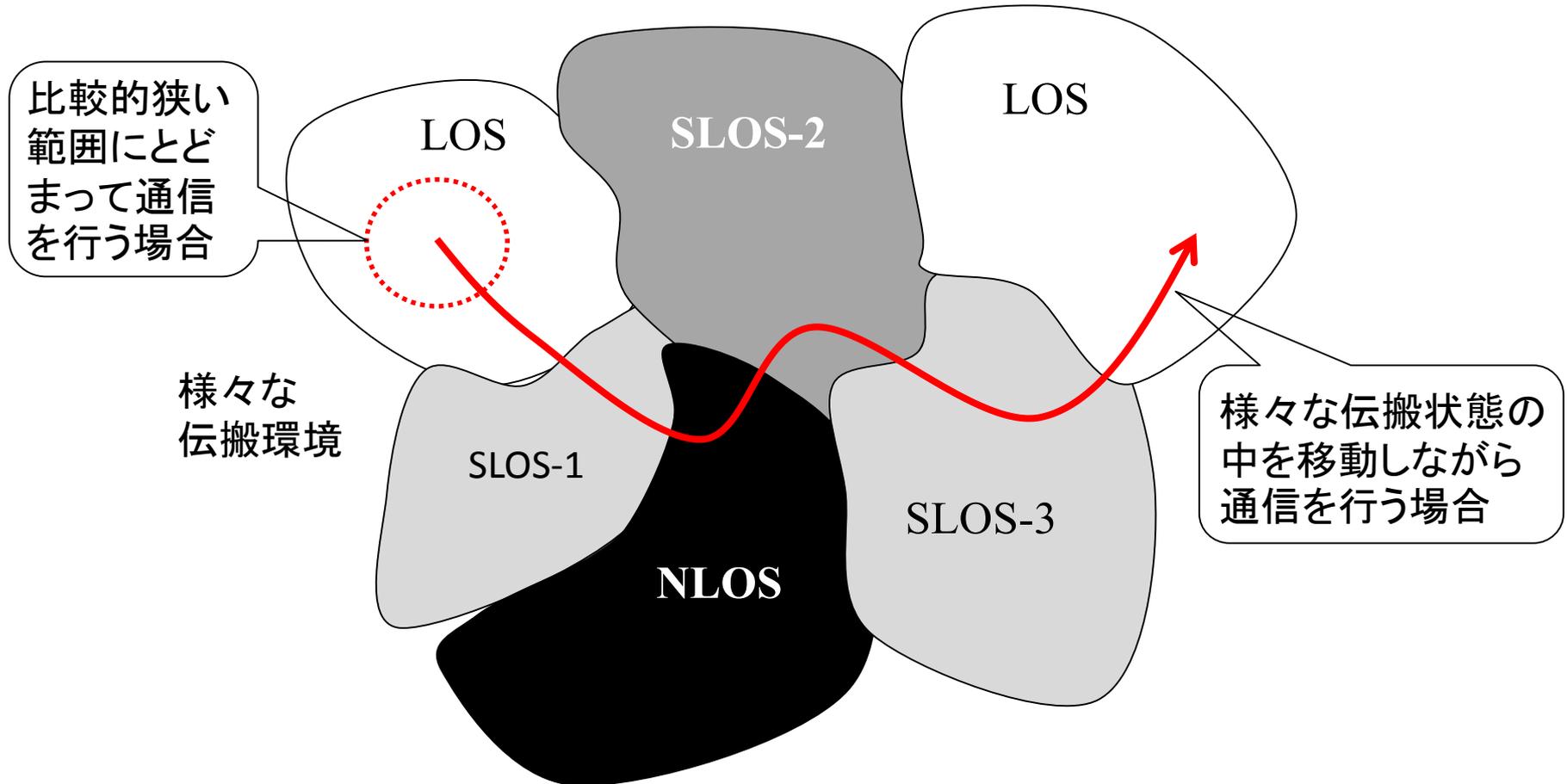
ミリ波等高い周波数の利用 → LOS/ SLOSを中心とした多状態伝搬環境



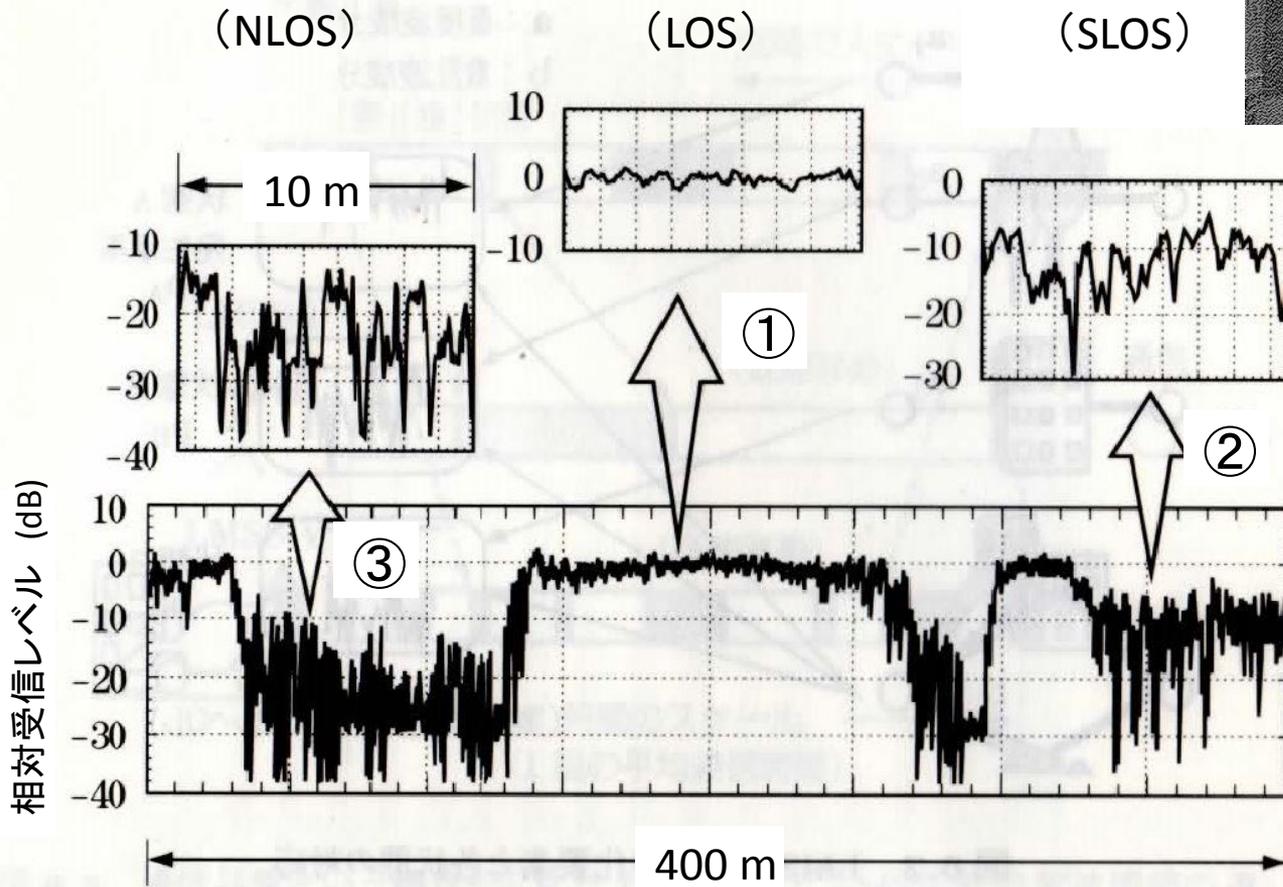
様々な伝搬劣化要因とその複合



多状態伝搬環境の中を移動する通信に対する 伝搬モデルの考え方は？



市街地における衛星電波移動受信の例



衛星: インマルサット

太平洋衛星

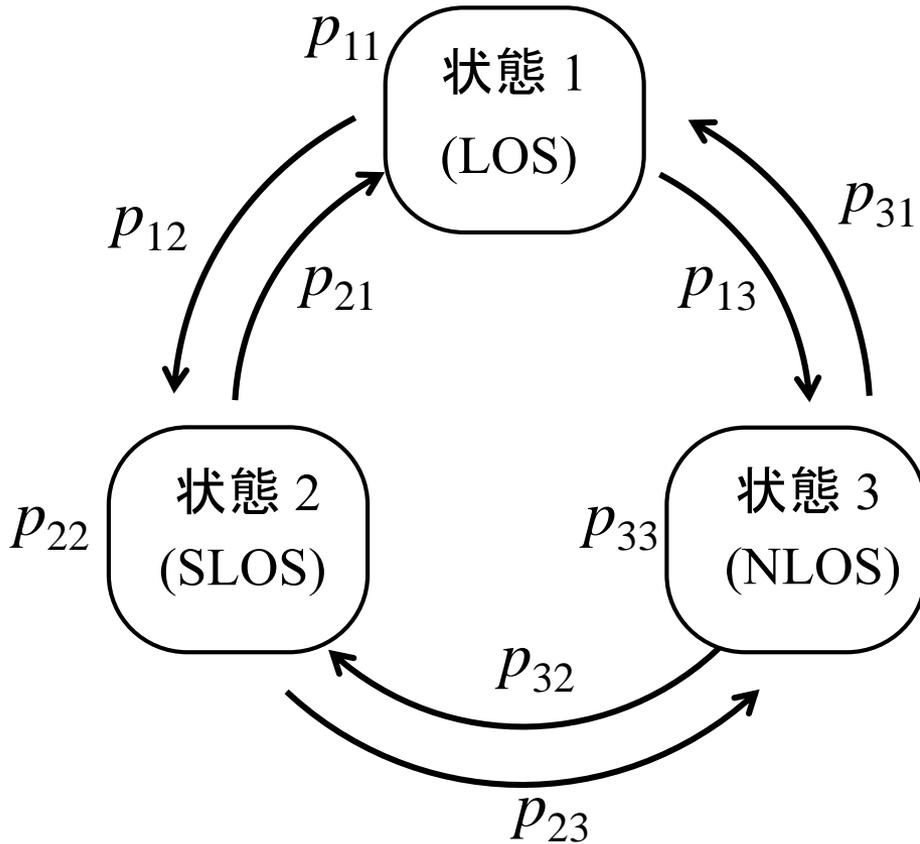
衛星仰角: 32°

周波数: 1.5 GHz

測定場所: 新宿

マルコフモデル(状態遷移モデル)

【3状態マルコフモデル】 (LOS/SLOS/NLOS)



【多状態マルコフモデル】

状態遷移確率行列(状態数 M)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1M} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & p_{M2} & \cdots & p_{MM} \end{pmatrix}$$

各状態の平均持続時間

$$\boldsymbol{\alpha} = (\langle \tau_1 \rangle \quad \langle \tau_2 \rangle \quad \cdots \quad \langle \tau_M \rangle)$$

詳細は 唐沢技術レポート、TR-YK-06、ミリ波伝搬チャネルモデリング:Part 2

移動伝搬研究の動向

統計的推定
(確率分布モデル)

伝搬実験の
積み重ね

サイトスペシフィック推定
(レイトレーシング)

そこからどのように情報を
汲み取るかは
料理人の腕の見せ所

・深層学習に基づく推定
・ベイズ推定(MCMC)
(ビッグデータ活用
リアルタイム推定)

・物理が見えなくな
る懸念
・AIから人間への
フィードバック

このWSのテーマ

確率過程
伝搬モデルに現れる
様々な確率分布

任意マルチパス環境での
受信強度推定手法

本セミナーに関する参考資料

【確率分布 (Part 1, Part 2)】

- 技術レポート TR-YK-005: 伝搬モデルに現れる確率分布

http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_005_Probability_distribution.pdf

【ハンケル変換形特性関数 (Part 3)】

- 技術レポート TR-YK-043: 伝搬環境のレイトレーシング:その後どうする?

http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_043_Hankel_Transform.pdf

【電波伝搬の歴史 (解説記事)】

- 唐沢好男, “電波伝搬: 物理現象とモデリング ~先達の足跡をたどる~, ” 信学誌, vol. 88, no. 8, pp. 782-798, 2016. (Open Access)

https://www.journal.ieice.org/bin/pdf_link.php?fname=k99_8_792&lang=J&year=2016

- 技術レポート TR-YK-076: 仲上三分布 (n, q, m 分布) への歴史探訪 (近日公開)

http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-076_Nakagami_Distributions.pdf

【その他の無線技術関連レポート (唐沢研究室HPから)】

レポートリスト http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/Technical_Report_Index.pdf

補足： 限られた数の実測データから良いモデルを作る
良いモデルを選ぶ

良いモデル(統計的モデリング)とは

確率分布で表されるモデルや多変量回帰モデルにおいて、

① 未来に起きることに対して推定精度がよい

その上で、

② 物理現象の表現に相応しいモデルである

③ 簡易に計算できる

④ パラメータ数が必要最小限である

良いモデルを選ぶ有力な指標： AIC(赤池情報量基準)

$$AIC = -2 \times (\text{最大対数尤度}) + 2 \times (\text{パラメータの数})$$

上記 AICの値が小さいほど良いモデル(=選択すべきモデル)

AICについては、以下の技術レポートに丁寧にまとめているので、まずは、それで学んでほしい

http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_048_AIC.pdf