

静電磁界中のポインティングベクトルについて [III]

～エネルギー流動速度の意味～

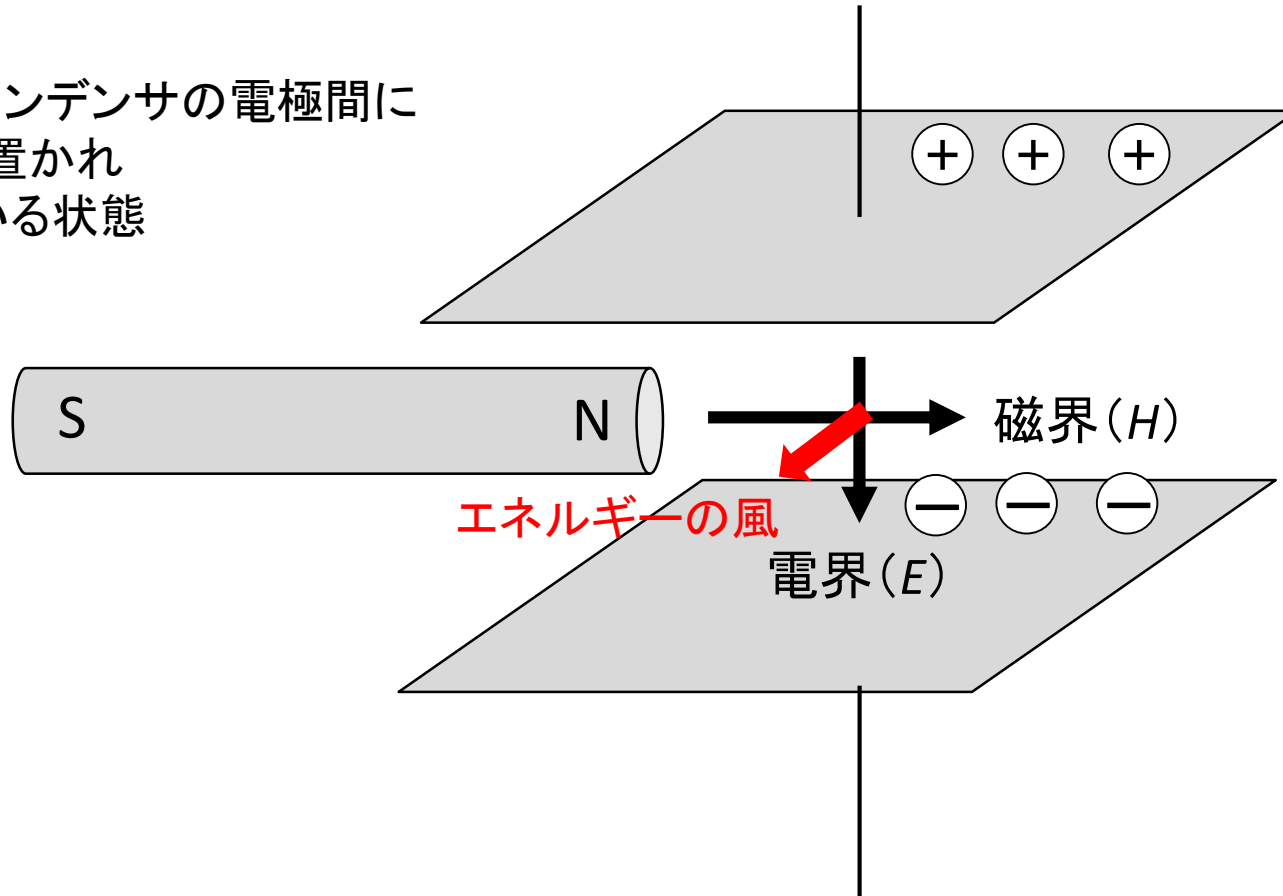
唐沢 好男

発表の内容

- ① 背景：電磁気学のパラドックス
- ② 前回議論（静電磁界のエネルギー流動）のまとめ
流動メカニズムに関する仮定とその合理性
- ③ エネルギー移動速度に関する補足
 - ・基本成分の中になぜ光速が埋め込まれているか
 - ・ローレンツ変換に対する共変性
 - ・直流電力伝送線路での過渡状態と定常状態
 - ・静電磁界の運動量
- ④ まとめ：電磁界とエネルギー流動の描像

電界と磁界が引き起こす物理現象の不思議 電磁気学のパラドックス？

帯電したコンデンサの電極間に
棒磁石が置かれ
静止している状態



静電界と静磁界がある空間(＝静電磁界)
この空間に、エネルギーの風が吹いている？

静電磁界におけるポインティングベクトル： 歴史

ポインティング(1884年) ポインティングベクトル $E \times H$ を提唱



ヘルツ(1890年) 静電磁界に対して問題提起



ストラットン 1941年 電磁気学教科書の中で



AP研(安達先生、後藤先生、徳丸先生等): 1984年 電磁波工学のパラドックス



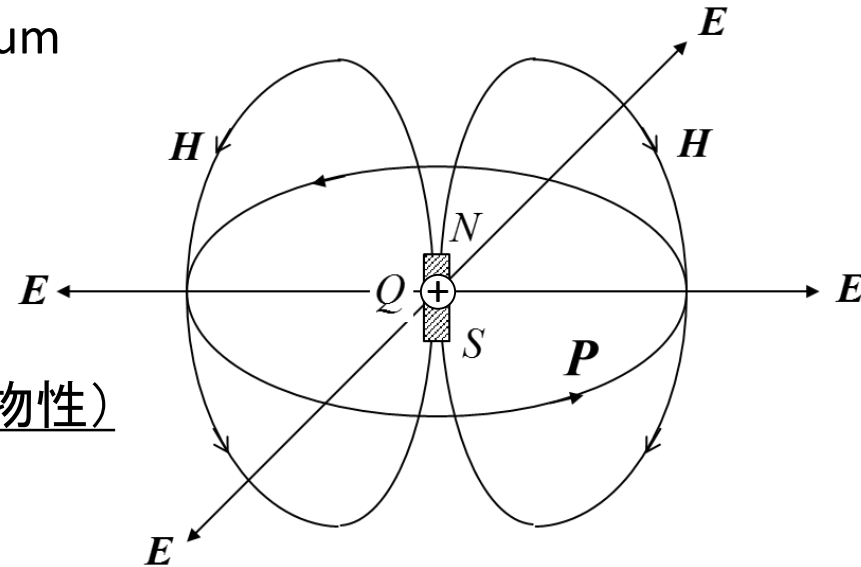
Proc. Eric Load 2014~ ネット上にOpen Forum



(この経緯の詳しいことは前々回発表[I]で)

ファインマン(ファインマン物理学Ⅳ, 電磁波と物性)

- ・これはばかげた話である
 - でも、途方もなく奇妙な話でもない
 - 環流を認める
- ・そのことが何か役立つと思えず、重要なことではない



推論のための前提条件

- ① 自由空間においては電磁界のふるまい(電磁現象)は電界と磁界によってのみ決まる
- ② 電界と磁界がそれぞれどのような仕組みで生成されたかということ(原因)によらない

要は、

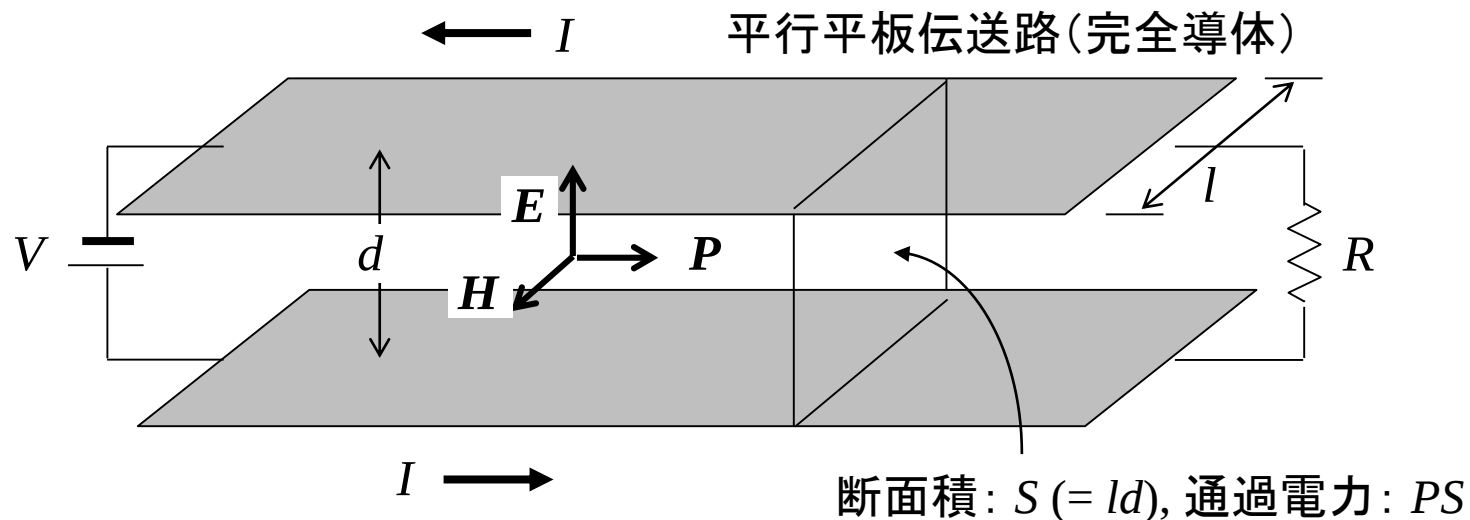
- ・電界や磁界には生成原因が識別できる色がついていない
- ・電界は電界、磁界は磁界と言う以上のものは無い
- ・例えば、ローレンツ力は $F=qE+qv \times B$ と表されるが、
 E や B の素性が問われることは無い

ということである

この前提条件が誤りであれば、以下の議論は無意味である。

前提条件を認めるなら、静電磁界でのポインティングベクトルを一つ見つけ、その性質を詳細に探れば良い

静電磁界でのエネルギー伝送はどうか？



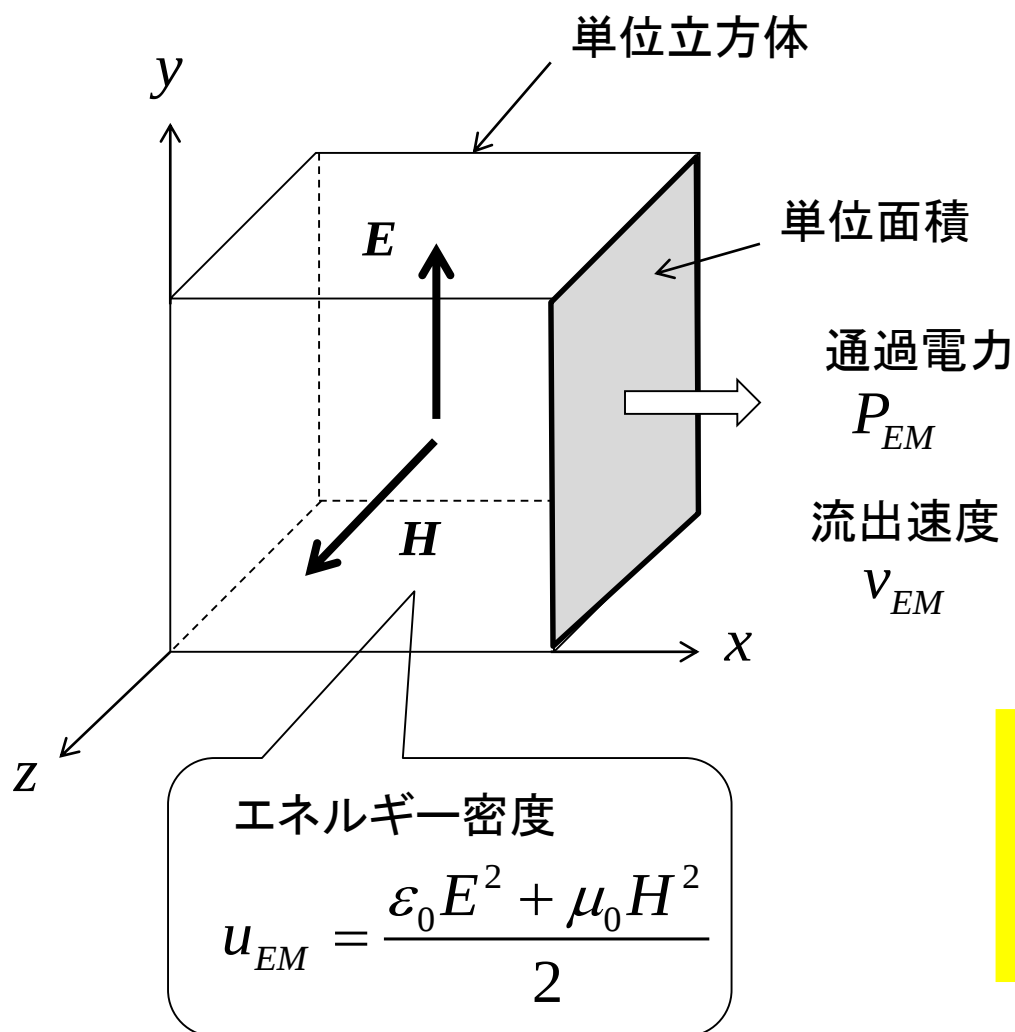
この平行平板直流伝送路(間隔は狭く、長さは十分長い)では

- 1) 電圧 V と電流 I により $VI (= V^2/R = I^2R)$ の電力を抵抗 R に送っている
- 2) 平行平板間には静電界 E と静磁界 H ができており、向きは直交している
- 3) 伝送路の断面積を S とすると、 $EHS = VI$ となり、
平行平板間を電界と磁界が電力 VI を運んでいる

ゆえに、ポインティングベクトル $E \times H$ は、電磁波でも静電磁界でも、エネルギーの流れを示している

それなら・・・

静電磁界のエネルギー移動(前回AP研発表のまとめ)



エネルギー移動の基本式

$$u_{EM} v_{EM} = P_{EM}$$

単位面積を通過する電力
(=ポインティング電力)

$$P_{EM} = E_y H_z$$

エネルギーの移動速度

$$v_{EM} = \frac{2}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c \quad \left(Z \equiv \frac{E_y}{H_z} \right)$$

この式の意味は？

静電磁界の動作に関する仮定

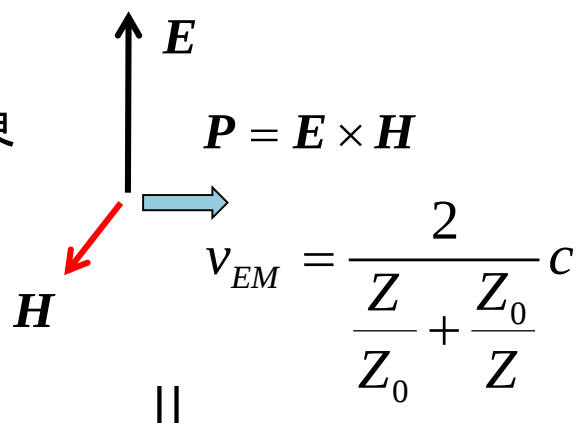
先の前提条件①、②に続き、

- ③ 電界と磁界が直交し、その大きさの比率の絶対値 $|Z|$ が Z_0 であるものを**基本成分**とする。基本成分は2種類あり、 $Z=Z_0$ では、エネルギーはx軸正方向に光速で動く。もう一つの基本成分は $Z=-Z_0$ で、負方向に光速で動く。ここでは、便宜上、前者を**正の基本成分**、後者を**負の基本成分**と呼ぶ。
- ④ **任意の直交電磁界は2つの基本成分**(=正負の基本成分)**に分解される**。この電磁界でのエネルギーの動きは、反対方向に光速で動く二つの成分の合成である。
- ⑤ 電界のみ、または磁界のみの環境ではエネルギーは静止している。

直交静電磁界がある環境でのポインティングベクトルとエネルギー流動

動電磁界と言えども
微小時間・微小空間で見れば
そこは静電磁界。静電磁界の
中に光速が隠れている

直交電磁界

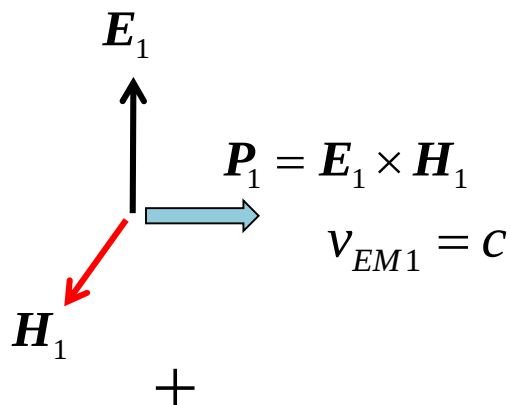


$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 = \frac{1}{Z_0}(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$$

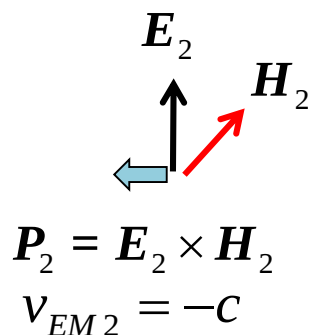
正の
基本成分



$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{E} + Z_0 \mathbf{H})$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{E}_1}{Z_0}$$

負の
基本成分



$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - Z_0 \mathbf{H})$$

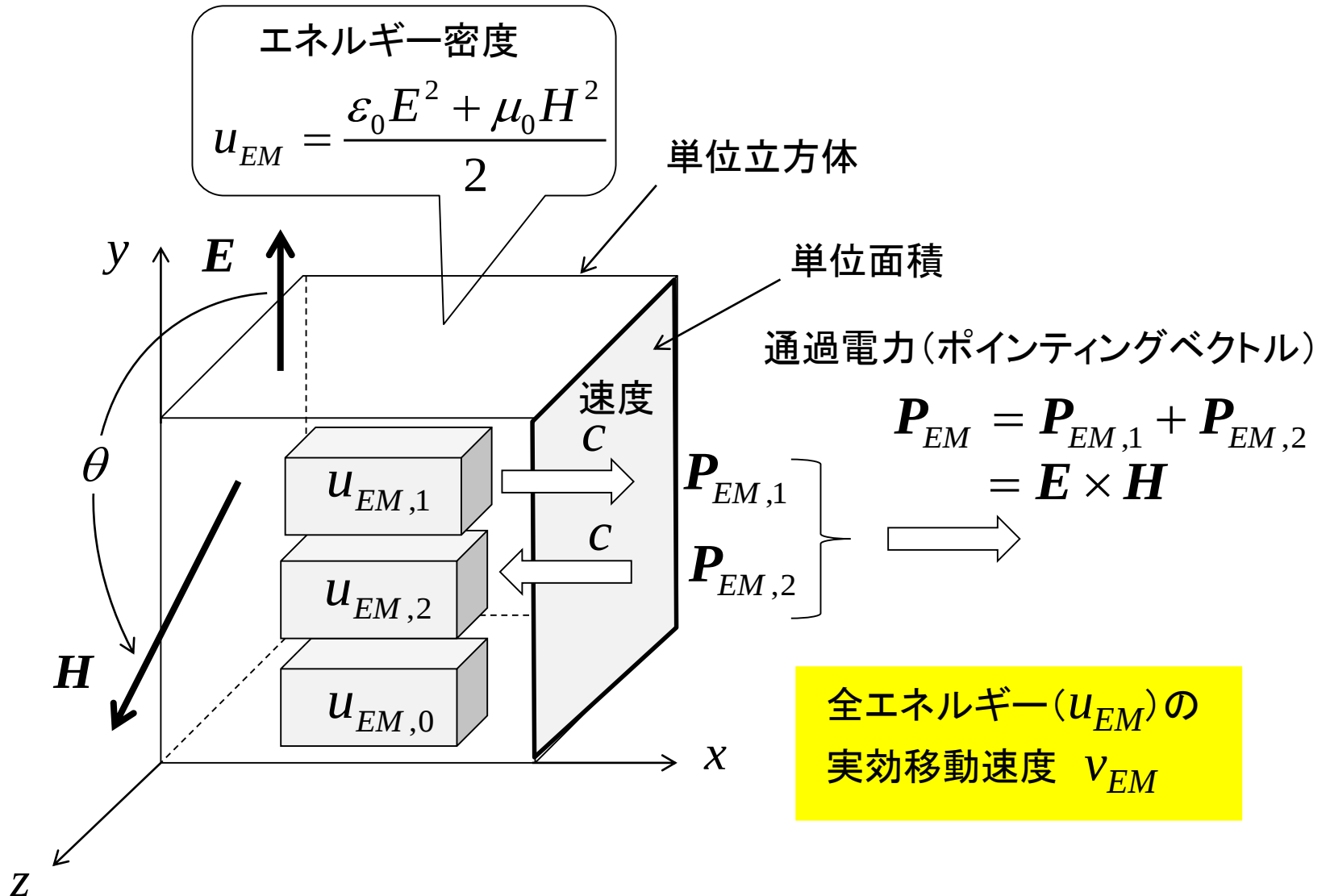
$$\mathbf{H}_2 = \frac{\mathbf{E}_2}{Z_0}$$

電界と磁界がどの
ような関係にあるか
を表したものがマク
スウェルの方程式

電界と磁界がある
時、エネルギーの
流動がどうなってい
るかは、マクスウェ
ルの方程式からは
陽には見えない

(この仮定に不合理なことは見つからない)

エネルギーとポインティング電力とエネルギー移動速度の関係

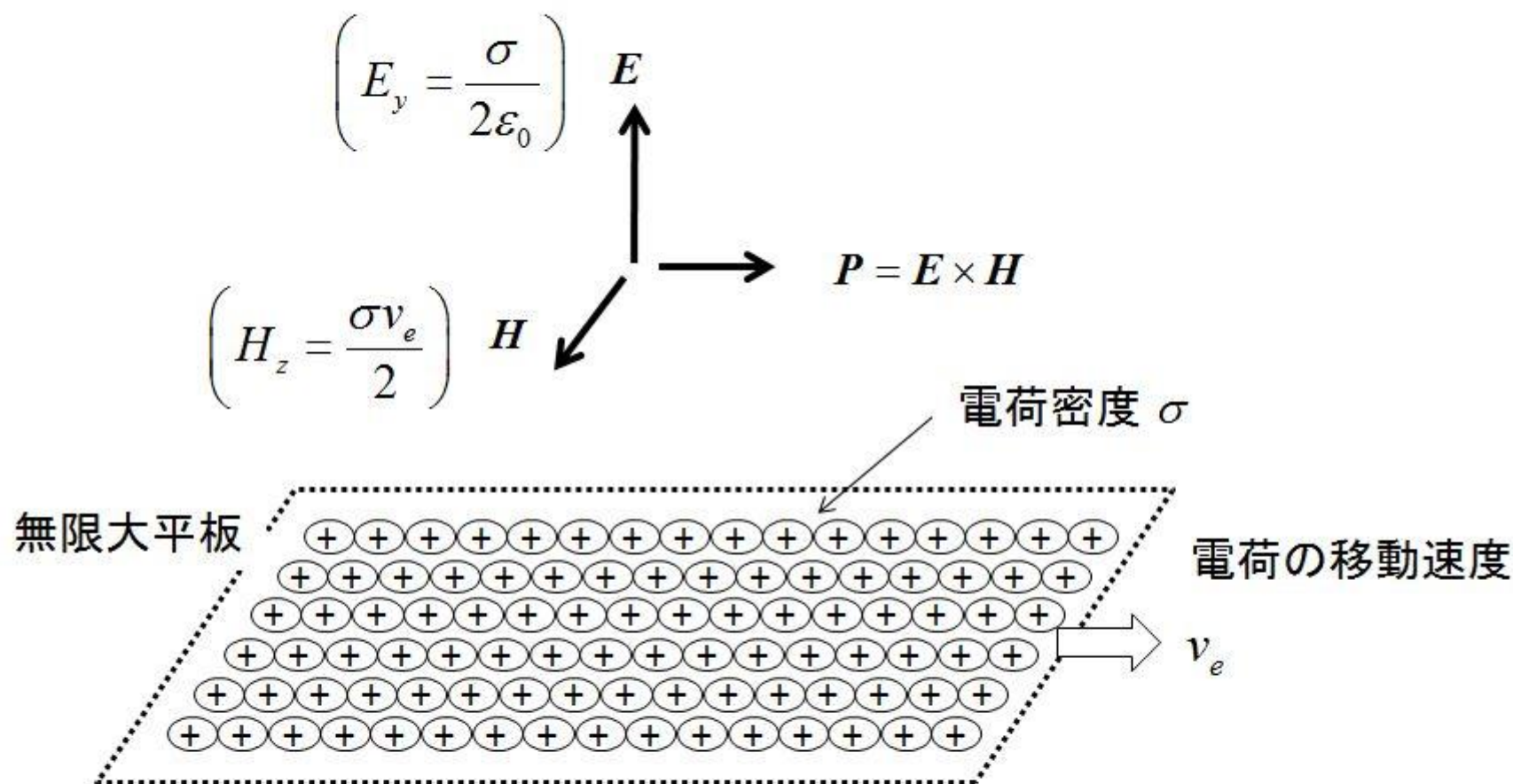


エネルギーの実効移動速度に関する補足的なこと

$$v_{EM} = \frac{2}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c \quad \left(Z \equiv \frac{E_y}{H_z} \right)$$

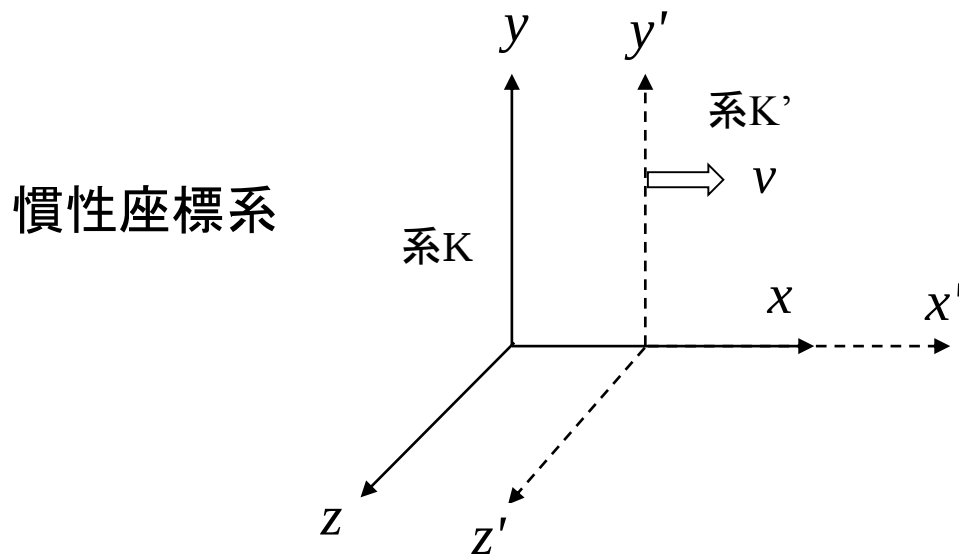
- (1) 基本成分の中になぜ光速が隠れているか
- (2) 慣性座標系でのローレンツ変換に対する共変性
- (3) 直流伝送線路の過渡状態と定常状態
- (4) 静電磁界の運動量

基本成分の中になぜ光速が隠れているか



基本成分
$$\frac{E_y}{H_z} = \frac{1}{\epsilon_0 v_e} = Z_0 \left(= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \right) \Rightarrow v_e = c$$

慣性座標系でのローレンツ変換に対する共変性



共変性

物理法則に対して

K 系 $f(x, y, z, t) = 0$

K' 系 $f(x', y', z', t') = 0$

電磁界のローレンツ変換

$$E'_y = \gamma E_y \left(1 - \frac{\mu_0 v}{Z} \right)$$

$$H'_z = \gamma H_z (1 - \varepsilon_0 v Z)$$

$$Z' = \frac{E'_y}{H'_z} = \frac{Z - \mu_0 v}{1 - \varepsilon_0 v Z}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}}$$

基本成分のエネルギー

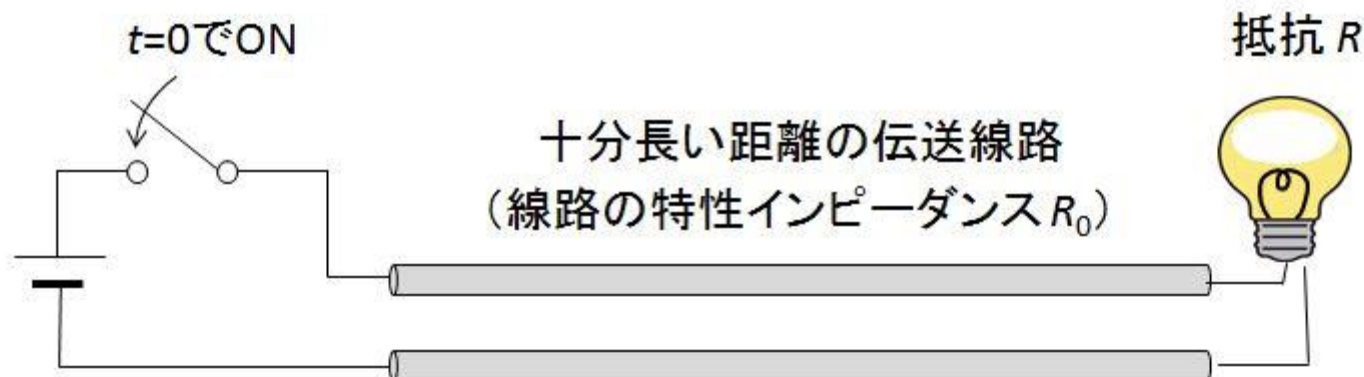
$$u'_{EM,1} = \frac{\varepsilon_0 E'^2}{4} \left(1 + \frac{Z_0}{Z'} \right)^2$$

$$u'_{EM,2} = \frac{\varepsilon_0 E'^2}{4} \left(1 - \frac{Z_0}{Z'} \right)^2$$

エネルギー流動速度

$$\begin{aligned} v'_{EM} &= \frac{u'_{EM,1} - u'_{EM,2}}{u'_{EM,1} + u'_{EM,2}} c \\ &= \frac{2}{\frac{Z'}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z'}} c \end{aligned}$$

直流伝送線路の過渡状態と定常状態



動作

第1ラウンド(往): 電圧 V 、電流 $I=V/R_0$ の波形が光速で進む

第1ラウンド(復): 不整合負荷に対する反射波形が光速で戻る

第2ラウンド(往): 上記反射波形の反射波形が光速で進む

・

・

(やがて直流電力伝送の定常状態に至る)

その定常状態でのエネルギーの
平均伝送速度が

$$v_{EM} = \frac{2}{\frac{R}{R_0} + \frac{R_0}{R}} c = \frac{2}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c$$

電磁運動量の視点から流動速度を見る

静電磁界の運動量 $\mathbf{g}_{EM} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2}$

$$g_{EM} = \frac{E_y H_z}{c^2} = \frac{E_y^2}{c^2 Z}$$

静電エネルギーを等価的な質量に換算してみると

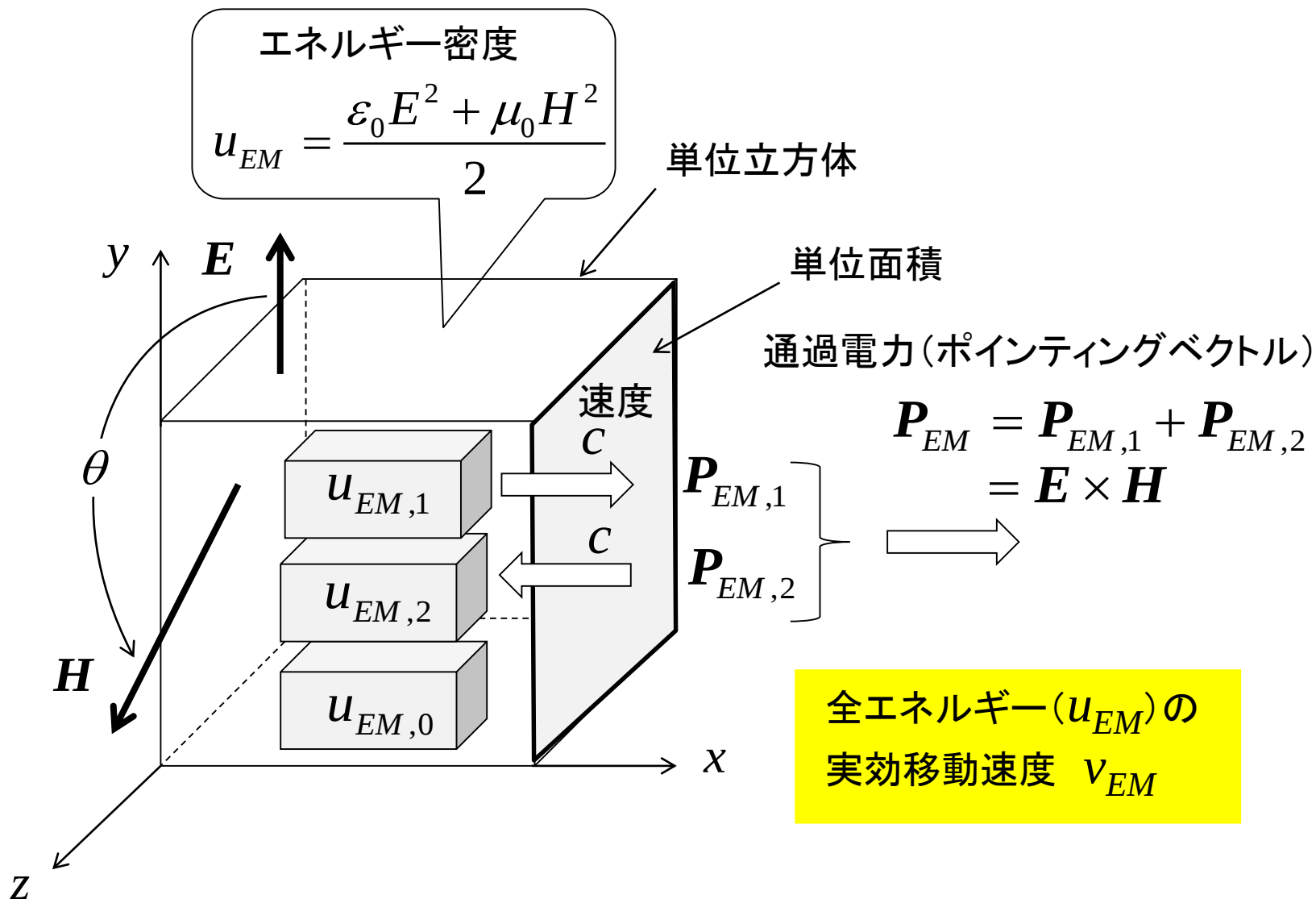
$$m_{EM} = \frac{u_{EM}}{c^2}$$

運動量を質量と速度の積に見立て、速度に v_{EM} を代入してみると

$$m_{EM} v_{EM} = \frac{2u_{EM}}{c \left(\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z} \right)} = \frac{E_y^2}{c^2 Z} = g_{EM}$$

一連の発表のまとめ

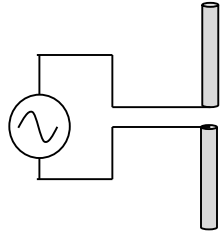
エネルギーとポインティング電力とエネルギー移動速度の関係



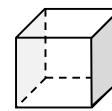
マクスウェルの方程式によって定められる電磁界 (時間と空間の4次元世界)

- ・近傍電磁界
- ・放射電磁界
- ・平面波電磁界
- ・導波路電磁界

アンテナ



時空間の一点(r_0, t_0)を
中心とする微小エリア



$E(r, t)$

$H(r, t)$

静電磁界と
等価な世界

$$E_0 \equiv E(r_0, t_0)$$

$$H_0 \equiv H(r_0, t_0)$$

$$P_0 \equiv E_0 \times H_0$$

二つの基本成分に分
解でき、それぞれのエ
ネルギーは、光速で
反対方向に動く

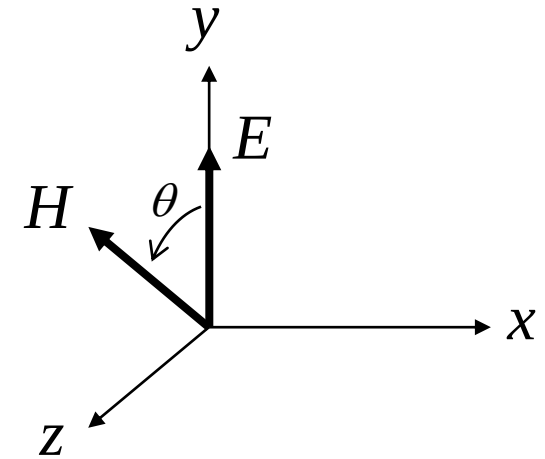
(エネルギー流動の秘密は
この中に隠れている。
静かな世界にもエネル
ギーの風が吹いている)

静電磁界の中にエネルギーの光速移動が隠れている。
動電磁界は、静電磁界の性質をもつ微小領域が4次元
空間全体に亘って敷き詰められたもの

参考：電界と磁界が直交しない場合

電磁界

$$\mathbf{E} = E\mathbf{j}, \quad \mathbf{H} = H \sin \theta \mathbf{k} + H \cos \theta \mathbf{j}, \quad Z \equiv E / H$$



エネルギー密度

$$u_{EM,total} = u_{EM,1} + u_{EM,2} + u_{EM,0} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)$$

エネルギー移動速度

($EM,1$: 正の基本成分、 $EM,2$: 負の基本成分
 $EM,0$: 静止成分)

$$\begin{aligned} v_{EM} &= \frac{u_{EM,1} - u_{EM,2}}{u_{EM,total}} c \\ &= \frac{\frac{1}{4} \epsilon_0 \left\{ (E + Z_0 H \sin \theta)^2 - (E - Z_0 H \sin \theta)^2 \right\}}{\frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)} c = \frac{2 \sin \theta}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c \end{aligned}$$

単位面積当たりの通過電力

$$P_{EM} = u_{EM,total} v_{EM} = (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \frac{\sin \theta}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c = EH \sin \theta = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}|$$