

フリスの伝達公式探訪

～送・受信アンテナの働きから見た 伝送系ダイヤグラム～

唐沢 好男

発表の概要

フリスの伝達公式は無線伝送の出発点になる基本式である。10年ほど前、このAP研で、筆者はフリスの伝達公式から導き出されるいくつかの不思議（パラドックス的なこと）を取り上げ解説した。

本発表では、そのときは素通りしてしまった次の三点に焦点を当てる。

- ①フリスの伝達公式ではアンテナ利得と実効面積の関係式が重要な働きをするが、無指向性アンテナから実効面積を直接に導く方法はないか。
- ②フリスの伝達公式を送・受信の双方のアンテナの働きが対等に見える表し方（伝送系ダイヤグラム）はないか。
- ③フリスの伝達公式による受信電力算定と電磁気学的手法による算定は、当然同じ答えを導くが、着眼点が異なる両手法を結ぶものは何か。

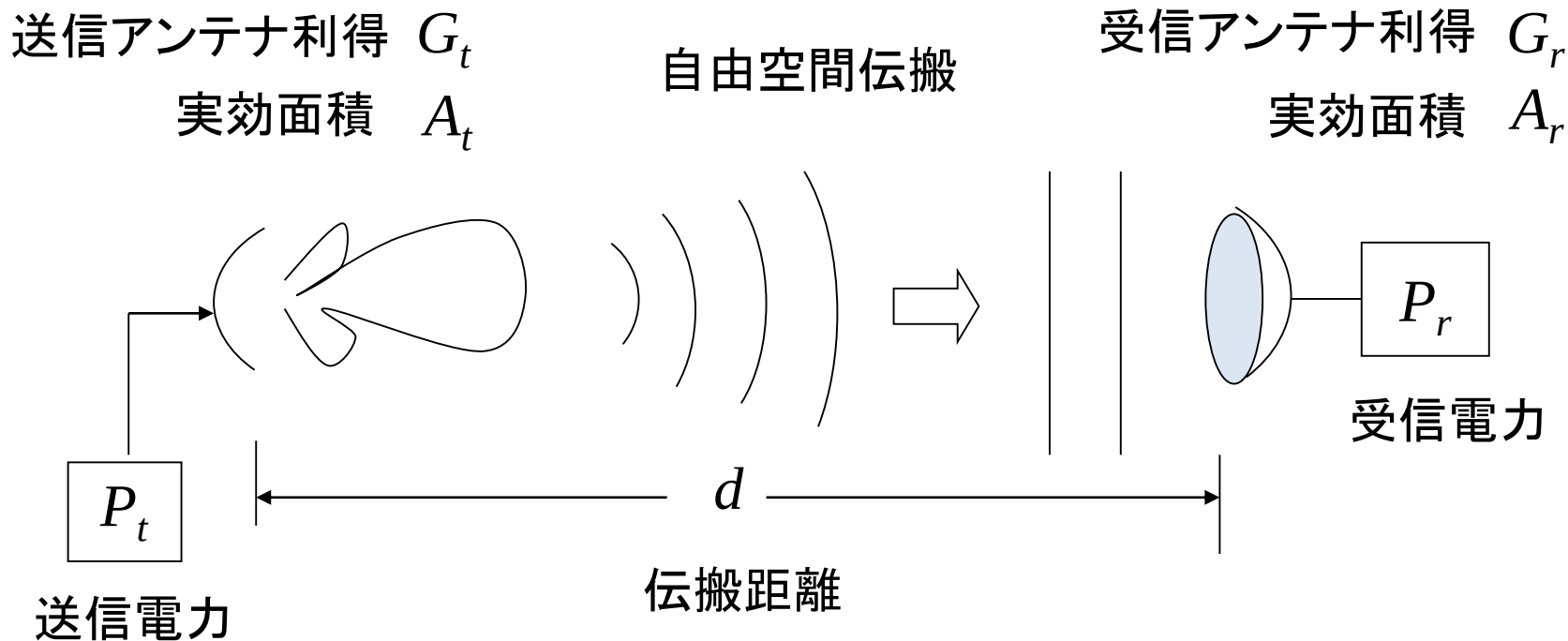
無線通信の授業等では公式の導出をもって説明が終わり、「高い周波数ほど損失が大きくなりますよ」で済んでしまう内容（教科書では1～2ページ）かと思うが、アンテナの働きに奥深いものを有している。

発表の内容

フリスの伝達公式に関して

- ① 無指向性アンテナの実効面積
- ② 送・受信アンテナの働きから見た伝送系ダイヤグラム
- ③ 電磁気学的アプローチとの接点

無線通信の基本伝送路



周波数: f

フリス(Friis)の伝達公式

$$\frac{P_r}{P_t} = ?$$

無線伝送の基本式： フリスの伝達公式

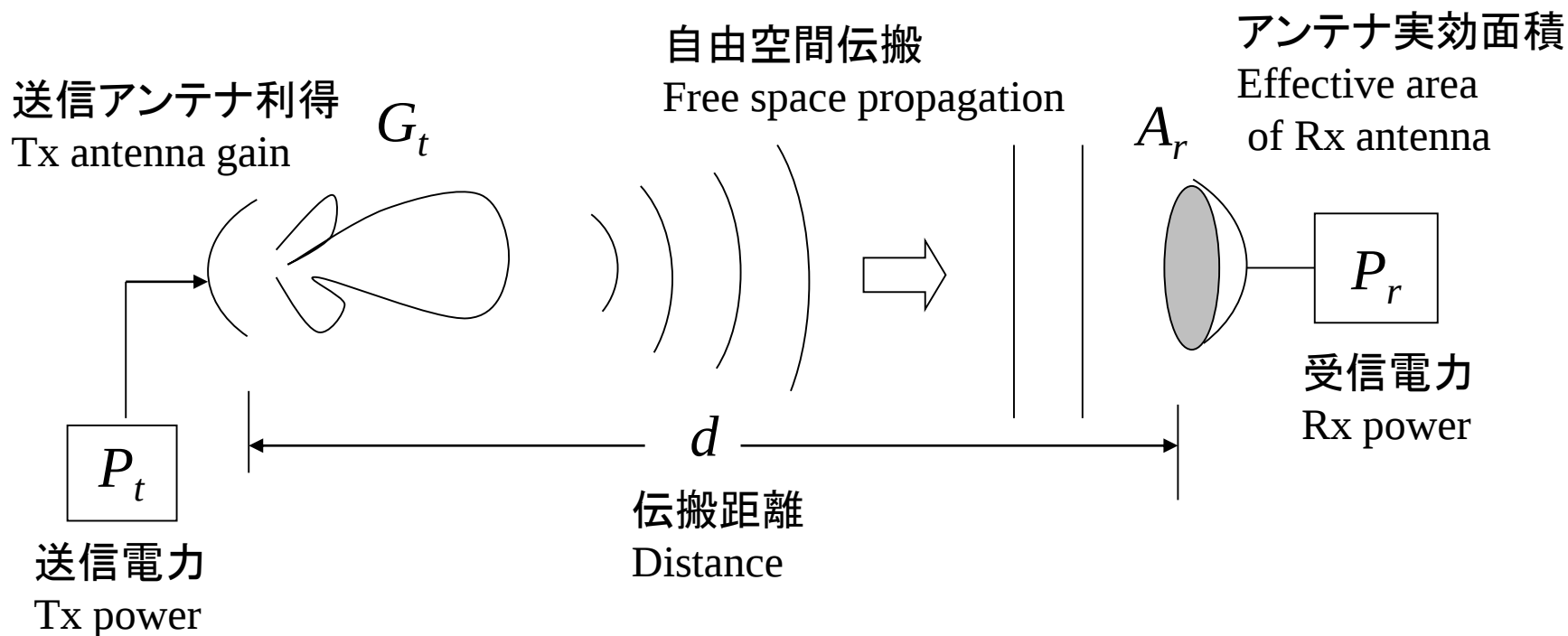
出発点

$$P_r = P_t \times G_t \times \frac{1}{4\pi d^2} \times A_r$$

[W] : [W]

[1/m²]

[m²]



無線伝送の基本式： フリスの伝達公式

受信アンテナ利得 G_r と実効面積 A_r の関係

$$A_r = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r$$

天下りの的に与えられることが多い

frisの伝達公式

$$P_r = P_t G_t \frac{1}{4\pi d^2} \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r$$

自由空間伝搬損失: L_p

$$= \frac{1}{L_p} G_r G_t P_t$$

$$L_p = \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2$$

アンテナの特性(利得)が周波数に依存しないとき、
周波数が高くなるほど、受信強度は弱くなる

アンテナ利得(G)と実効面積(A)の関係

$$A = \frac{\lambda^2}{4\pi} G$$

直観的に導ける式ではない
(マクスウェルの方程式の力が必要)

この式は、以下の2段階のステップによって導く

第一段階

送受信の相反定理を使い

「 G/A の値は一定で、アンテナのタイプに因らない」を証明する

第二段階

理論解析できるアンテナを一つ選んで、 G と A の比の値を定める

第二段階

理論解析できるアンテナを一つ選んで、 G と A の比の値を定める

選ぶアンテナの例

① **微小ダイポールアンテナ**: マクスウェルの方程式を使って解く正攻法

② **大口径パラボラアンテナ**の開口径と指向性の関係から解く

他にも方法はあるが、いずれの方法も、導出には手間暇かかるが、
答えが出たので、問題としては解決

③ **無指向性のアンテナ** ($G=1$): 実効面積 A_0 が、もっと簡単に求められないか?
もし、求められれば

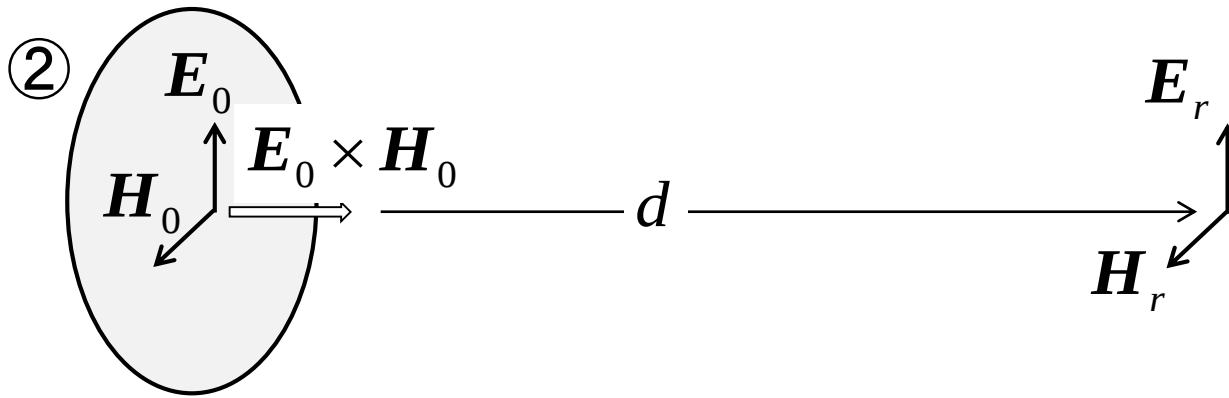
$$A = A_0 G \quad \left(A_0 = \frac{\lambda^2}{4\pi} \right)$$

となって、形がきれい。

でも、アンテナに具体的な形がないので、実行面積がイメージできない

①～⑥の手順に従って
無指向性アンテナの
実効面積 A_0 を求める

A_0



④

十分遠方
 A_0 面と直交

$$E_r = \frac{E_0 A_0}{\lambda d}$$

③

$$P_t = \frac{E_0 H_0}{2} A_0 = \frac{E_0^2}{2Z_0} A_0$$

① $p_r = \frac{P_t}{4\pi d^2}$

⑤ $p_r = \frac{E_r^2}{2Z_0}$

⑥

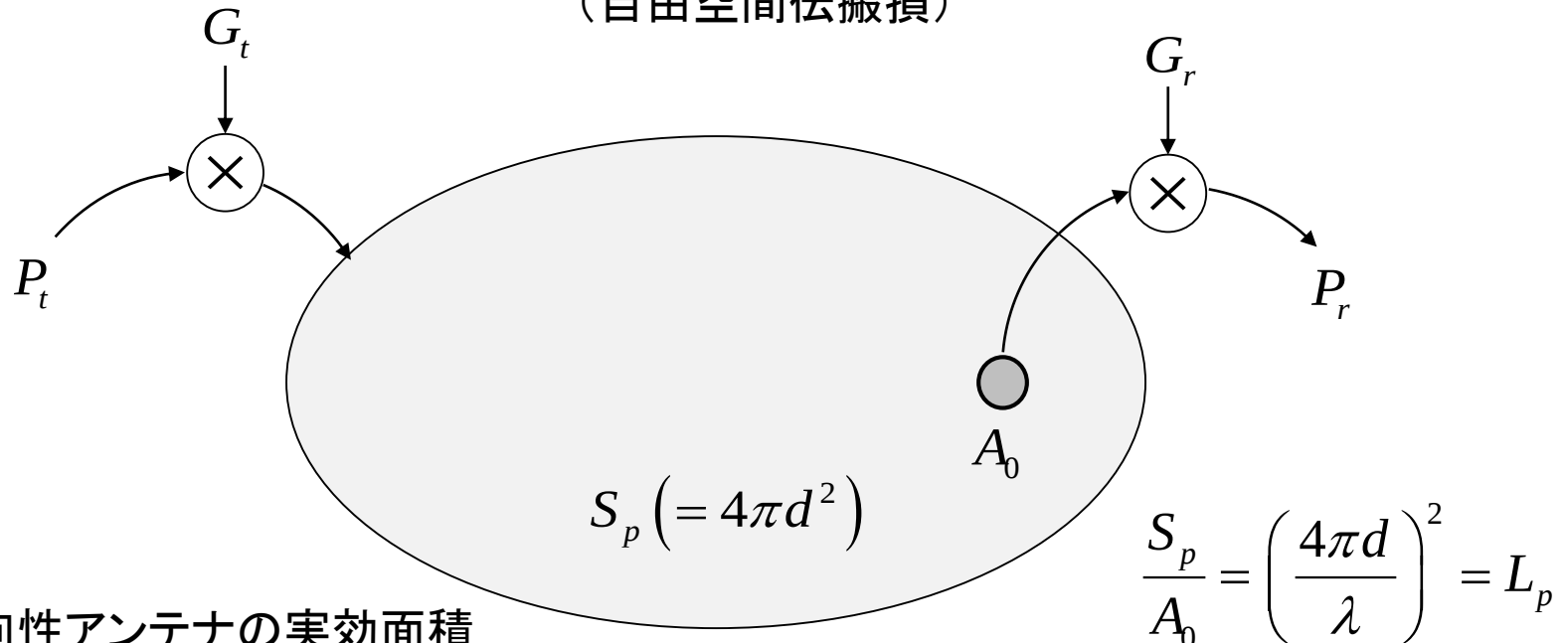
$$A_0 = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

④にマクスウェルの方程式の力を借りており、
無指向性アンテナと言えども、導出は簡易ではない

フリスの伝達公式を送・受信アンテナの働きで見てみよう 自由空間伝搬損の意味

$$\frac{P_r}{P_t} = \frac{1}{L_p} G_t G_r \quad \left\{ L_p = \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2 \right\} \quad \text{から見える景色}$$

(自由空間伝搬損)



A_0 : 無指向性アンテナの実効面積

S_p : 距離 d における球面波の広がり面積

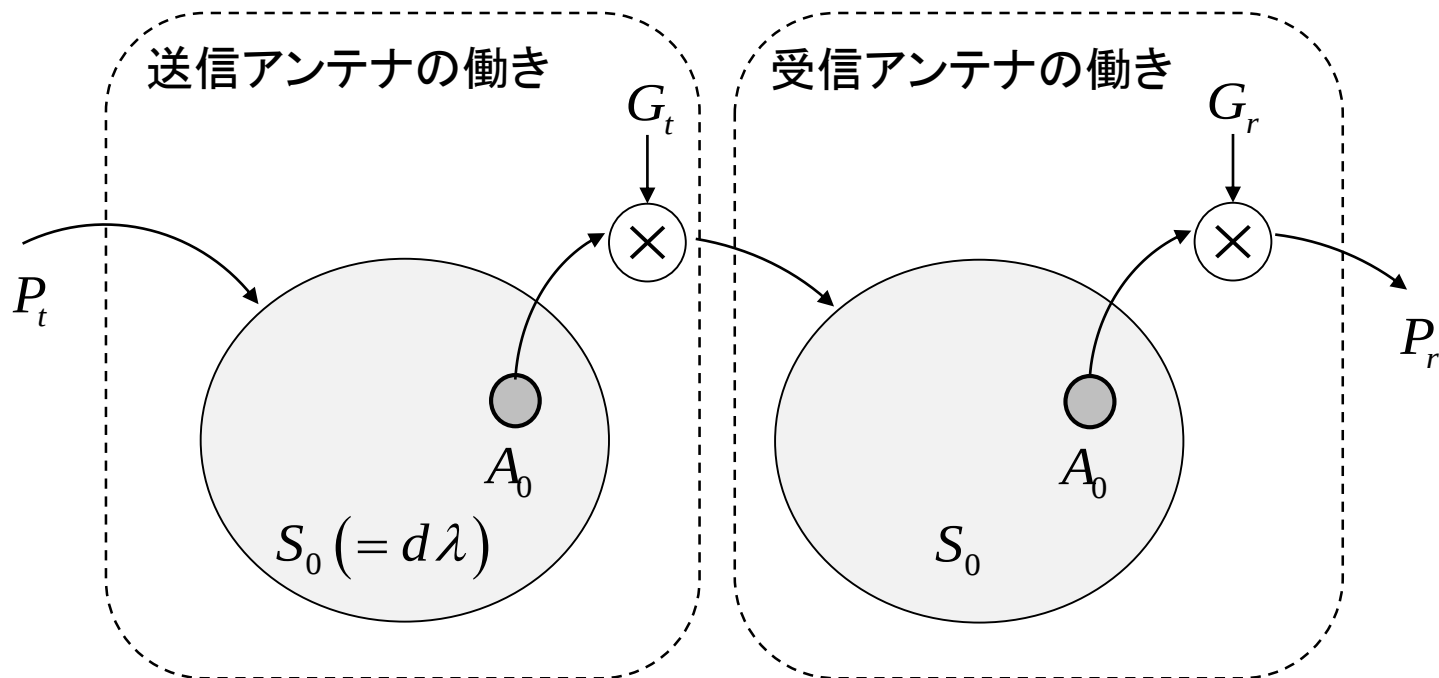
この図からは「アンテナは送・受信で同じ働き」と言う姿が見えてこない

伝送系ダイヤグラム

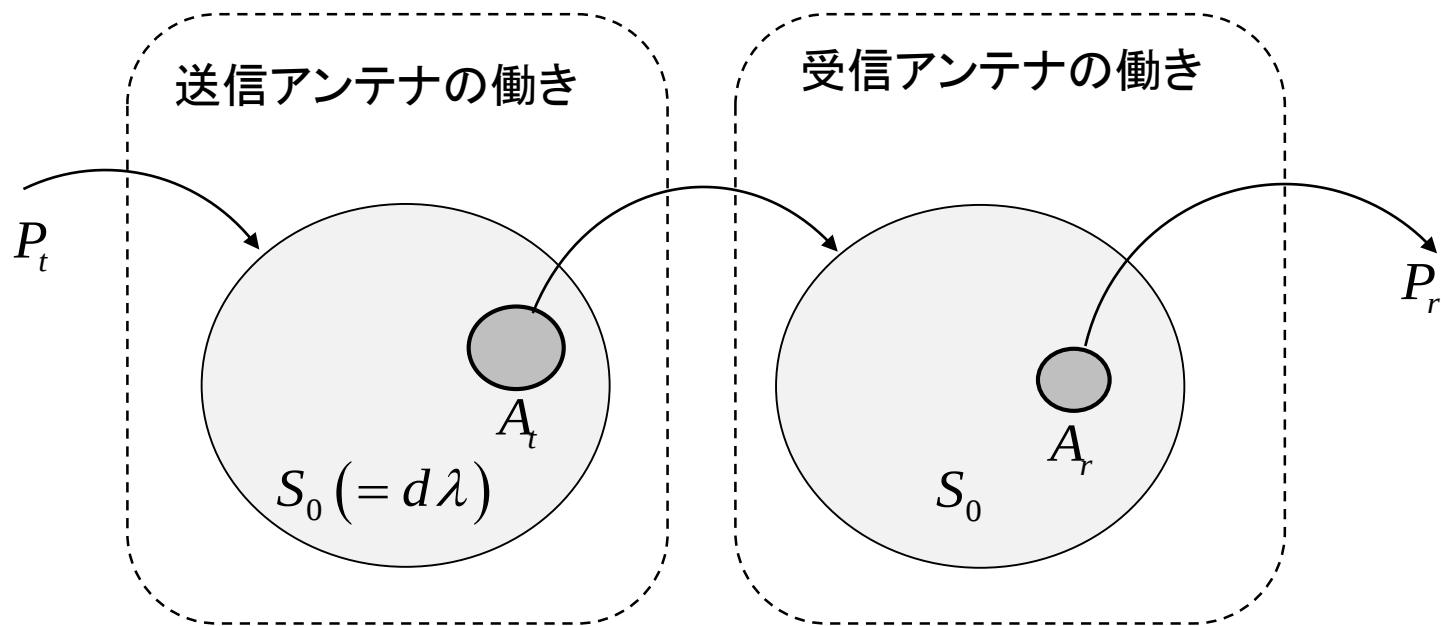
面積 S_0 は無指向性アンテナの実効面積 A_0 と半径 d の球の表面積 S_p の相乗平均

$$S_0 = \sqrt{A_0 S_p} = d\lambda \quad (\text{送受信点間(=電波の通り道)に幅1波長のレッドカーペットを拡げる。そのカーペットの面積})$$

$$A_0 : S_0 : S_p = 1 : \sqrt{L_p} : L_p \quad (\text{三つの面積の関係})$$



さらに、 $G_t A_0 = A_t$, $G_r A_0 = A_r$ なので



これを式で表すと

$$\frac{P_r}{P_t} = \frac{A_t}{S_0} \times \frac{A_r}{S_0} = \frac{A_t A_r}{S_0^2} \quad (S_0 = d\lambda)$$

原典を訪ねる

$$P_r / P_t = \frac{A_r A_t}{d^2 \lambda^2}$$

fairly accurate calculation of the output wave shapes produced.

A comparison of typical laboratory wave shapes with similar field records of lightning surges is given in Fig. 12. By reconnecting the capacitors of the generator in

the possibilities for making a comprehensive study of lightning hazards in relation to aircraft¹⁴ and studies on means of protection to minimize such hazards.

¹⁴ J. M. Bryant and M. Newman, "Lightning discharge investigation—I," University of Minnesota Eng. Exp. Sta., Technical Paper No. 38; April, 1942.

A Note on a Simple Transmission Formula*

HARALD T. FRIIS†, FELLOW, I.R.E.

Summary—A simple transmission formula for a radio circuit is derived. The utility of the formula is emphasized and its limitations are discussed.

INTRODUCTION

THIS NOTE emphasizes the utility of the following simple transmission formula for a radio circuit made up of a transmitting antenna and a receiving antenna in free space:

$$P_r / P_t = A_r A_t / d^2 \lambda^2 \quad (1)$$

where

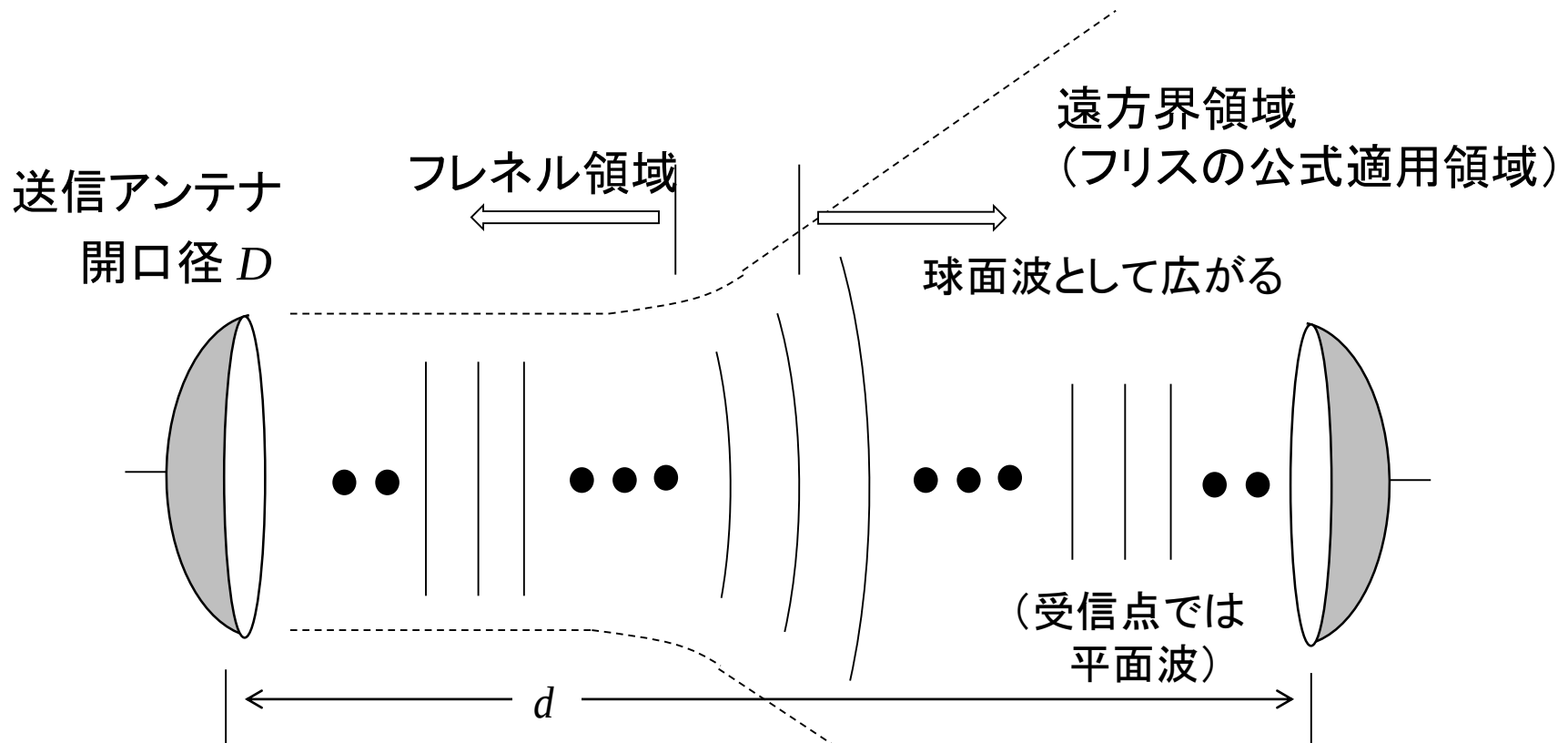
* Decimal classification: R120. Original manuscript received by the Institute, December 6, 1945.

† Bell Telephone Laboratories, Holmdel, N. J.

P_t = power fed into the transmitting antenna at its input terminals.	} Same units of power
P_r = power available at the output terminals of the receiving antenna.	
A_r = effective area of the receiving antenna.	} Same units of length
A_t = effective area of the transmitting antenna.	
d = distance between antennas.	
λ = wavelength.	

The effective areas appearing in (1) are discussed in the next section and this is followed by a derivation of the formula and a discussion of its limitations.

遠方界(フラウンホーファー領域)通信のためのアンテナ条件



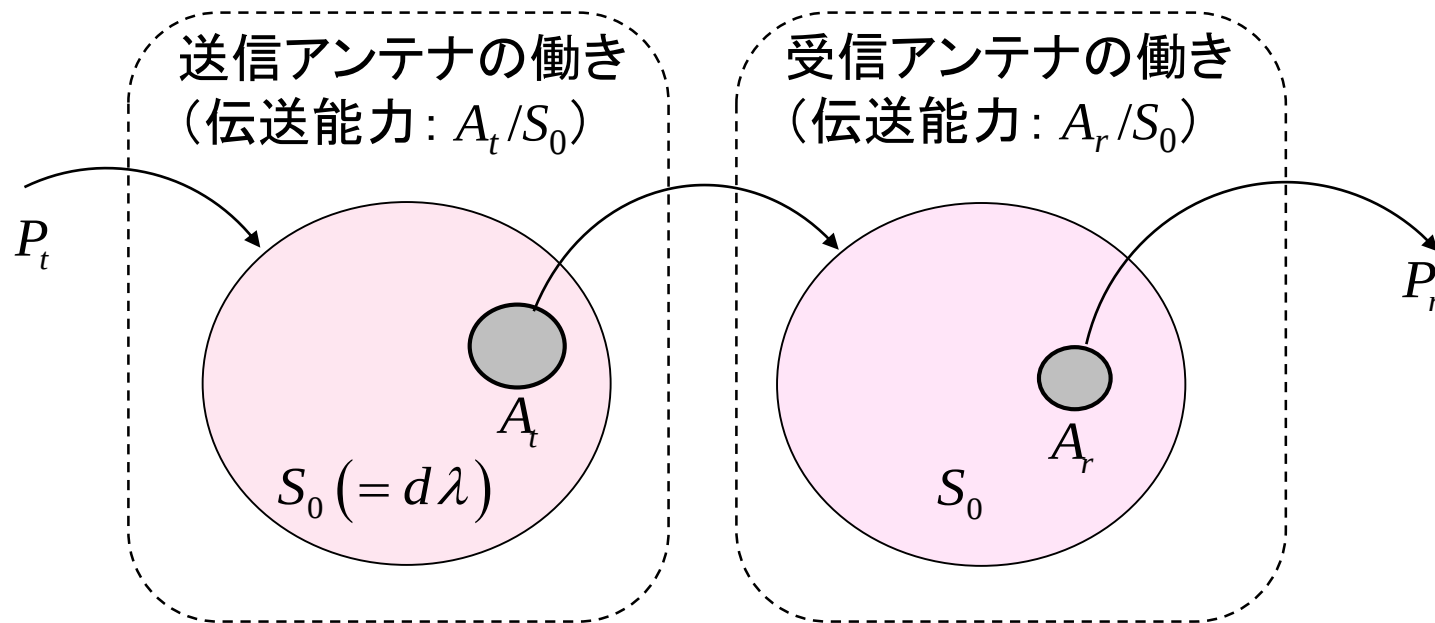
遠方界領域の距離条件 $d > 2D^2/\lambda$

アンテナ開口面積は(大雑把な目安値として)
 $d\lambda$ (すなわち S_0) より小さくしなければならない



$A_t = A_r = S_0$ のとき、
伝送損失が0となり、
最強の無線伝送

伝送系ダイアグラムの物理的な意味は？



低損失伝送(究極の無線伝送)

→送受信アンテナのそれぞれの開口面積を $S_0 (=d\lambda)$ に近づける

例 宇宙太陽光発電衛星システム (SPS)

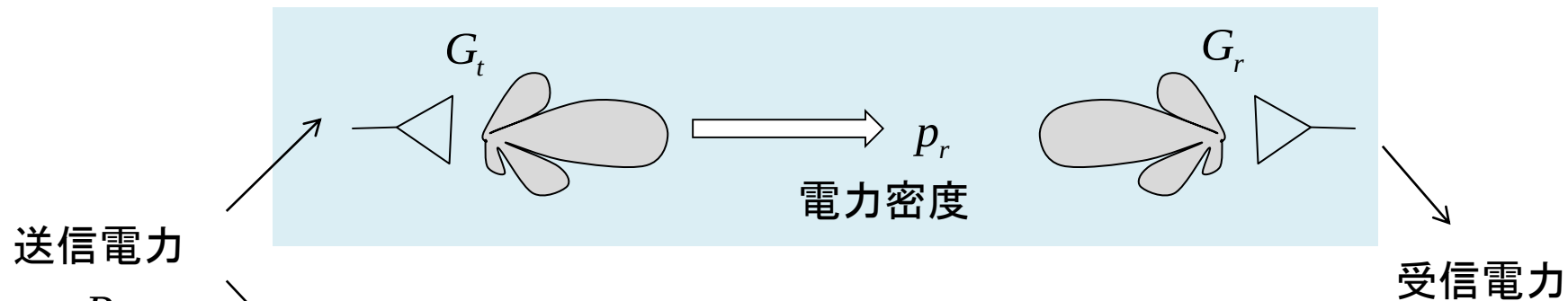
周波数 2.5GHz ($\lambda = 0.12$ m)

伝送距離 $d = 40,000$ km

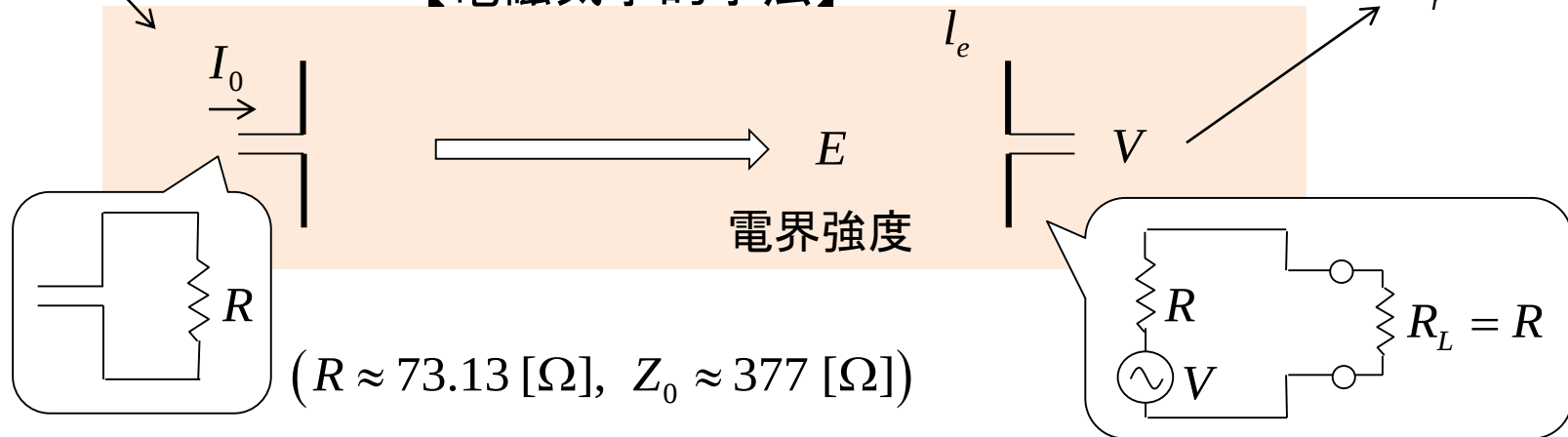
→ 円形開口 直径 約 2.5km

送受信：半波長ダイポールアンテナ対向リンクの場合

【フリスの伝達公式】



【電磁気学的手法】



フリスの伝達公式
$$\frac{P_r}{P_t} = 1.64 \times 1.64 \times \left(\frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 \approx 0.017 \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2$$

電磁気学的手法
$$\frac{P_r}{P_t} = \frac{1}{16R^2} \left(\frac{\lambda Z_0}{\pi^2 d} \right)^2 \approx 0.017 \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2$$

両方式を結ぶ鍵は

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} A$$

半波長ダイポールアンテナの入力抵抗と放射抵抗

両方式での受信電力算定式を等号で結ぶと

フリスの伝達公式

電磁界解析

放射抵抗

$$1.64 \times 1.64 \times \left(\frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 = \frac{1}{16R^2} \left(\frac{\lambda Z_0}{\pi^2 d} \right)^2 \rightarrow R \approx 73.13 \quad [\Omega]$$

アンテナ入力インピーダンスの実数分(入力抵抗)は
放射抵抗に等しい

まとめ

- フリスの伝達公式は、無線回線設計の基本中の基本
- その基本の中にも「不思議」が有る
- 学生が考える力を身に着ける格好の教材
学生とのディスカッションの中から
逆に教える方が学ぶこともある

本内容の詳しい説明は、ネット公開私製本「[謎解き電磁気学](http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/EM_Wonderland_Chap_11.pdf)」の第11章に

http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/EM_Wonderland_Chap_11.pdf