アンテナ・伝播研究会
(July 29, 2022)

静電磁界中の
ポインティングベクトルについて

唐沢　好男

あらまし

$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$で表されるポインティングベクトルはアンテナの放射界解析などに重要な働きを持つ。マクスウェルの方程式から導かれるエネルギー保存則（ポインティングの式）の中に、閉領域の表面から単位時間当たり流れ出すエネルギー（すなわち電力）の単位面積当たりの量として現れる。このポインティングベクトルは、閉領域内でのエネルギーが動的に変化する中でのエネルギーの出入りを表す式であるが、それがそのまま静電磁界でも通用しそうな例があるため、静電磁界の全般に対しても適用できるのではないかとの期待もある。これは一種の拡大解釈であるが、結果として、いくつかのパラドックス（もどき）を生み出しており、現時点においても、まだ議論が続いてように見える。本発表では、静電磁界中のポインティングベクトルの働きについて、発表者の考えを示し、この推論が、本件に関心を持つ皆さんの更なる議論への入り口になれば幸いである。

発表の内容

① 背景:　電磁気学のパラドックス

② ポインティングベクトルに関する議論の整理

③ 対象環境と前提条件

④ 前提条件からの推論

⑤ 導線に流れる直流信号のエネルギー移動

⑥ まとめ（④、⑤からの結論）

電磁気学のパラドックス

1984年6月の信学会の会誌解説記事

安達三郎先生　電磁波工学におけるパラドックス
　　　　　　　～その思い違いを探る～

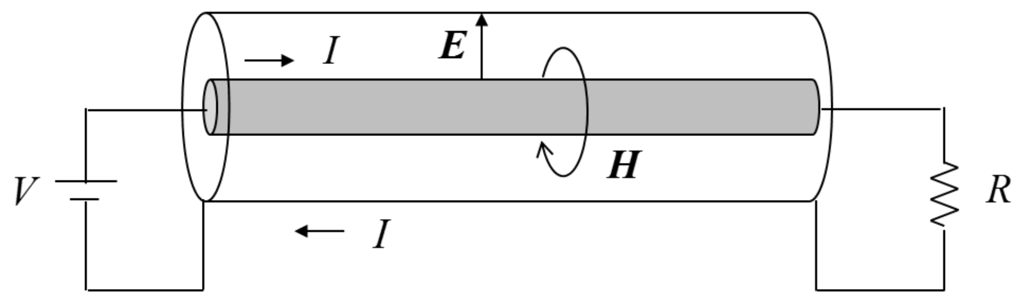
パラドックスと思しき6つの項目（問題提起者は後藤尚久先生）

その中の一つ

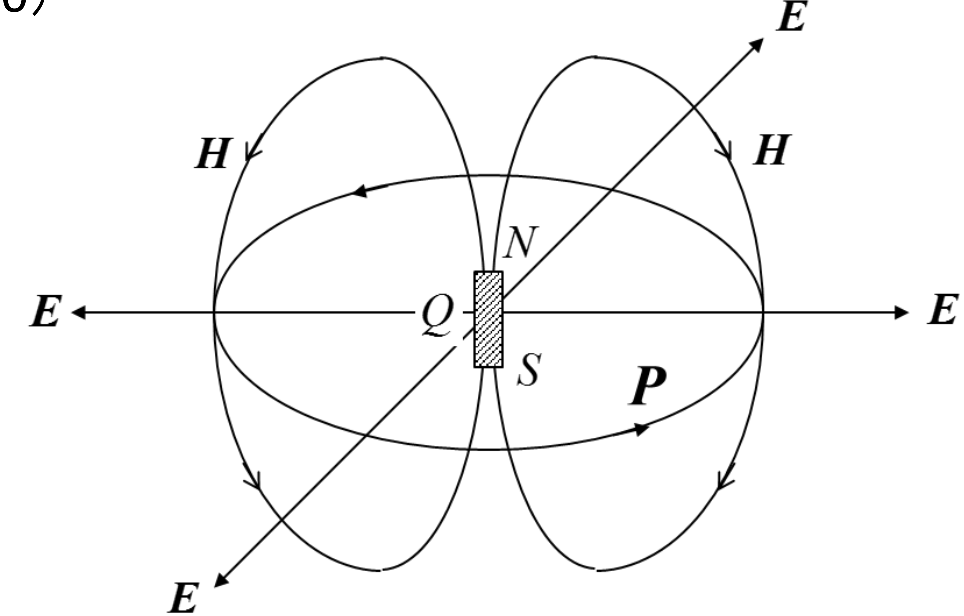
静電界の中の磁石はポインティング電力を発生するか
（この項目の解答担当者は徳丸仁先生）

電磁波はポインティングベクトル $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ がエネルギーの流れを作っている
（電力を運んでいる）

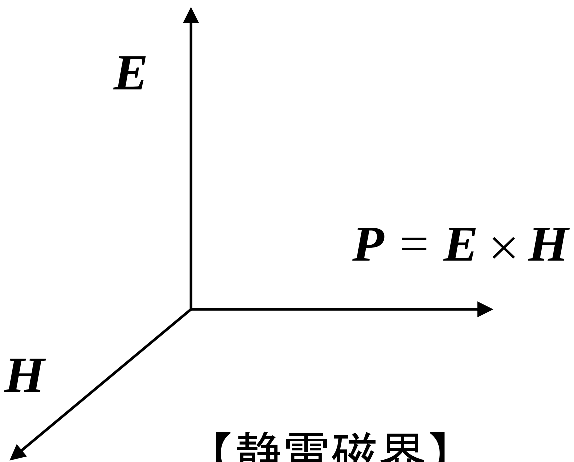
直流電力伝送の静電界においても $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ が電力を運んでいる



それなら、帯電した棒磁石の周りにエネルギーの還流ができるはず。本当か？
（ヘルツ 1890）



静電界と静磁界が直交してある環境において
エネルギーの流れはできるか？



【静電磁界】

三つの答え

ポインティングベクトル $\boldsymbol{P}$ は

①　エネルギーの流れを生む

②　~~エネルギーの流れはできない~~

③　できる場合とできない場合がある

電磁気学の教科書では、①と③の両方の見解がある
ネット上ではこの問題に対するスレッド（Open Forum）が立ち上げられ論争中
電磁界理論研究会での議論もある（研究会技報参照）

信学会記事のこの問題に対する見解：
「この問題に解答を与えるのは簡単ではない」

なぜ決着がつかないか　→①、③ともに一理あり、実験で確かめようが無いから？

ポインティングベクトルのおさらい

マクスウェルの方程式からPoyntingが導いた式

電荷や電流が無い自由空間では

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2\right) dV = \int_S \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n} dS$$

（領域内のエネルギーの変化は、表面からのポインティング電力の出入りに等しい）

【二つの考え方】

静電磁界では

$$\int_S \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n} dS = 0$$

表面からの出入り自体は0とは限らない
（出入りの合計が0だと言うだけ）

積分値が0と言う以上に拡大解釈してはいけない
部分の出入りを議論することは意味が無い

本発表での主張

前提を決めて議論したい

その前提

[1] 自由空間においては電磁界のふるまい（電磁現象）は電界と磁界によってのみ決まる

[2] 電界と磁界がそれぞれどのような仕組で生成されたかということ（原因）によらない

要は、

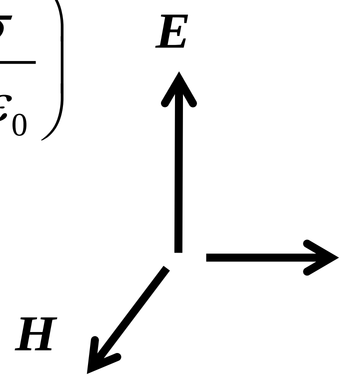
- 電界や磁界には生成原因が識別できる色がついていない
- 電界は電界、磁界は磁界と言う以上のものは無い
- 例えば、ローレンツ力は $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ と表されるが、
  $\boldsymbol{E}$や$\boldsymbol{B}$の素性が問われることは無い

と言うことである

この前提条件が誤りであれば、以下の議論は無意味である。

任意の大きさの電界と磁界が直交する環境を生み出す例

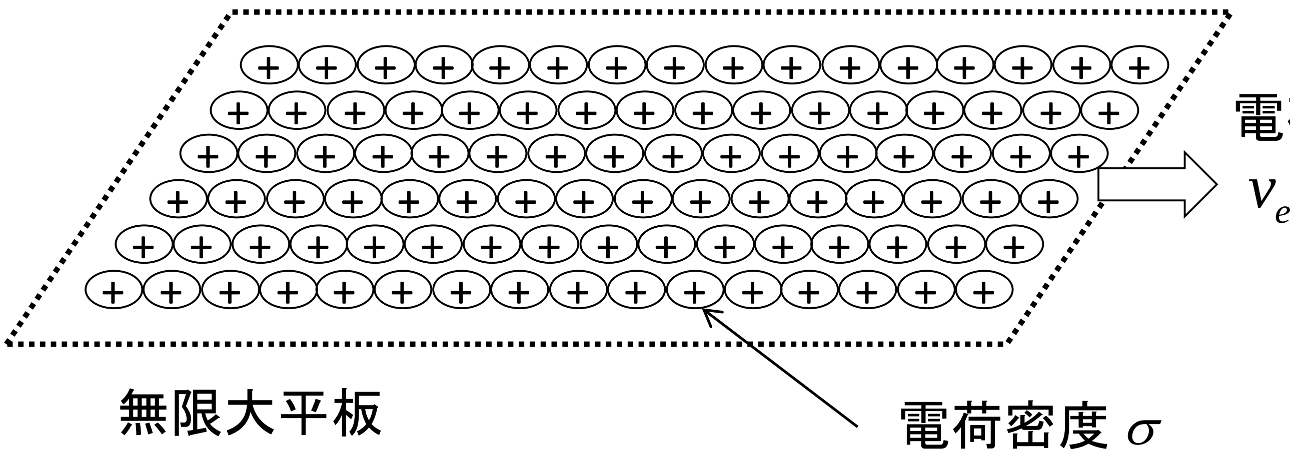
$$\left(E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \right)$$



$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$$

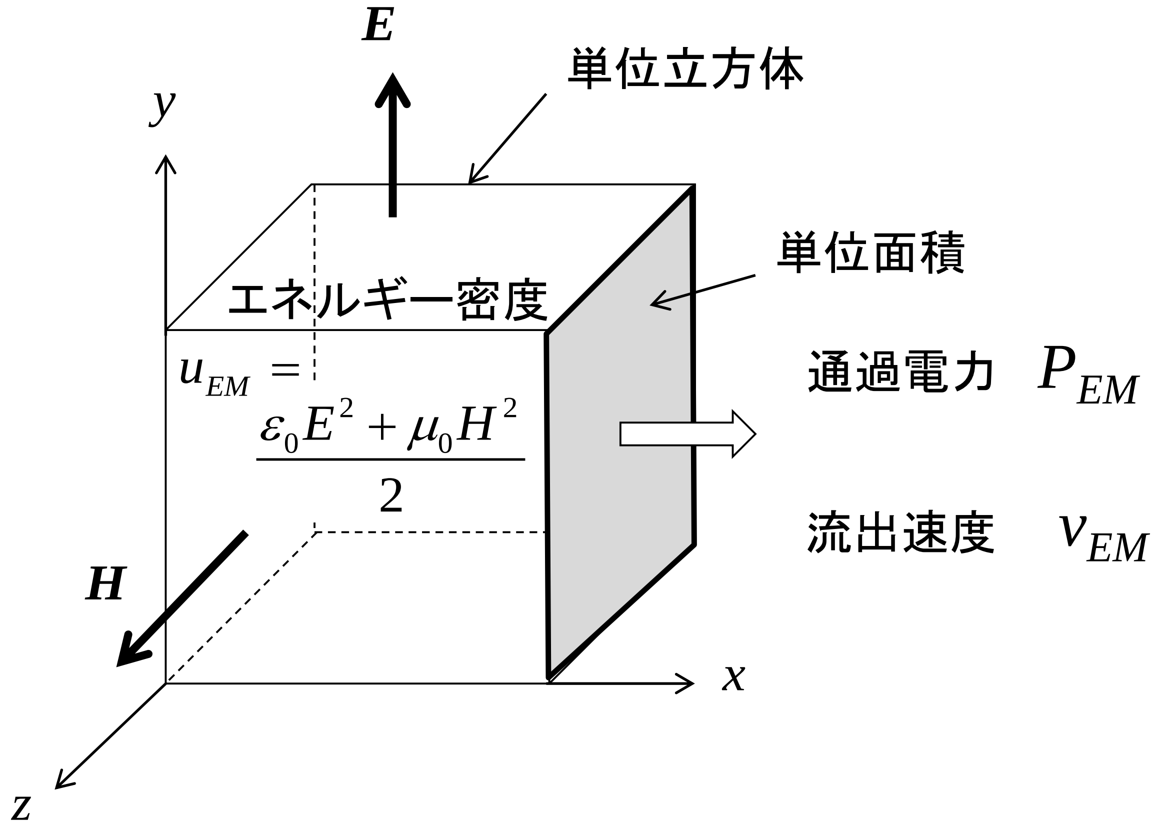
$$\left(H = \frac{\sigma V_e}{2} \right)$$

この環境なら、
エネルギーも右方向に
動いていても
おかしく無さそう



- 電界強度は電荷密度で調整できる
- 磁界強度(＝電界と磁界の比)は電荷の移動速度で調整できる
  ただしこの構成では、$E/H > Z_0$ (Z_0 : 自由空間の固有インピーダンス)

電磁エネルギーが動くとしたら



基本式 $u_{EM} v_{EM} = P_{EM}$

$$u_{EM} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E_y^2 + \mu_0 H_z^2\right)$$

基本式　$u_{EM} v_{EM} = P_{EM}$　　$u_{EM} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E_y^2 + \mu_0 H_z^2\right)$

⇩　（v_{EM}とP_{EM}はこの段階では分からない
分かっている量v_eとPを用いて書き直し）

$$u_{EM} v_e = \eta P$$

ポインティング電力　$P=E_y H_z$

電荷の移動速度

等式が成立するための補正係数

$$v_e = \frac{1}{\varepsilon_0 Z} = \frac{Z_0}{Z} c$$

$$E_y = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad H_z = \frac{\sigma v_e}{2}$$

$$Z = \frac{E_y}{H_z} = \frac{1}{\varepsilon_0 v_e}, \quad |Z| \geq Z_0 \left(= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \right)$$

$|Z| \geq Z_0$ の環境における電磁界の基本式

$$u_{EM} v_e = \eta P$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\varepsilon_0 Z^2 + \mu_0\right) v_e - 2\eta Z = 0 \qquad \rightarrow \left(\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}\right) v_e - 2\eta = 0$$

$$v_e = \frac{1}{\varepsilon_o Z} = \frac{Z_0}{Z} c \quad \left(\left|Z\right| \geq Z_0\right)$$

$$\eta = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{Z_0}{Z}\right)^2\right\}$$

$|Z| \le Z_0$ の環境における電磁界の基本式

$$u_{EM} v_e = \eta P$$

$$\downarrow$$

$$\left(\varepsilon_0 Z^2 + \mu_0\right) v_e - 2\eta Z = 0 \qquad \to \quad \left(\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}\right) v_e - 2\eta = 0$$

共通

$$v_e = \frac{Z}{\mu_o} = \frac{Z}{Z_0} c \quad \left(\left|Z\right| \le Z_0\right)$$

$$\eta = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{Z_0}{Z}\right)^2\right\}$$

静電磁界のエネルギー移動に関する基本式（中間的まとめ）

$$\left(\frac{Z}{Z_0}+\frac{Z_0}{Z}\right)v_e - 2\eta = 0$$

$$v_e = \begin{cases} \dfrac{Z}{\mu_0} = \dfrac{Z}{Z_0}c & \left(|Z| \le Z_0\right) \\ \dfrac{1}{\varepsilon_0 Z} = \dfrac{Z_0}{Z}c & \left(|Z| \ge Z_0\right) \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left\{1+\left(\dfrac{Z}{Z_0}\right)^2\right\} & \left(|Z| \le Z_0\right) \\ \dfrac{1}{2}\left\{1+\left(\dfrac{Z_0}{Z}\right)^2\right\} & \left(|Z| \ge Z_0\right) \end{cases}$$

残された疑問

① 単位面を通過する電力はポインティング電力 P か？

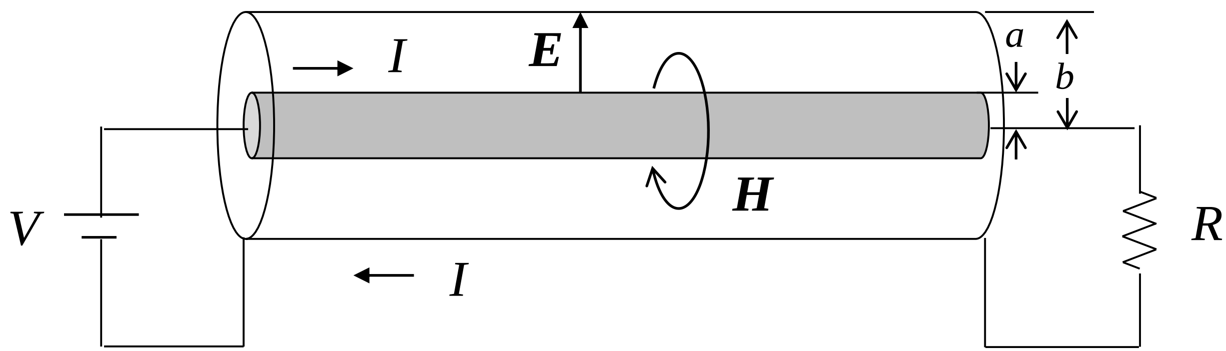
② 電荷の移動速度 v_e とエネルギーの移動速度 v_{EM} の関係は？

③ 補正係数 η はどの物理量に対する補正なのか？

この式は、相対性理論の要請である慣性系に対する共変性を満たしている（技報本文中に記載）

直流送電を調べる

なぜなら、そこに静電磁界ができている
電界と磁界の相互作用は、その生まれ方(素性)に因らない、と言う前提条件から、
ここで得られる電磁現象の性質は、一般的に通用する(と言う論理)



$$I = \frac{V}{R}$$

$$E_r = \frac{V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) r}$$

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi r}$$

管内のインピーダンス Z はどこも一定

$$Z = \frac{E_r}{H_\phi} = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} R \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{R_0} = \frac{Z}{Z_0}$$

$$\left(R_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)$$

エネルギー移動に関する諸量の関係

伝送路の同軸空間単位長さあたりに蓄えられているエネルギー u_G

$$u_G = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_b^a \left(\varepsilon_0 E_r^2 + \mu_0 H_\phi^2\right) r dr d\phi \quad = \frac{\varepsilon_0 \pi V^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \text{[J/m]}$$

伝送路の中空部の断面積を通過する電力 P_S

$$P_S = \int_0^{2\pi}\int_b^a E_r H_\phi r dr d\phi = VI \qquad \text{[W]}$$

電気回路で送られる電力 VI に等しくなっており、単位面積当たりポインティング電力 P とする算定に合致

同軸線路の中空部分が担うエネルギーの伝送の速度 v_G

$$v_G = P_S / u_G = \frac{VI}{\frac{\varepsilon_0 \pi V^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad = \frac{2c}{\frac{R}{R_0} + \frac{R_0}{R}} \le c$$

（$R=R_0$のとき光速c）

エネルギー移動に関する諸量の関係（まとめ）

$$\left.\begin{aligned} u_{EM} v_{EM} &= P_{EM} \\ u_{EM} v_e &= \eta P \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & P = P_{EM} = E_y H_z \\ & v_{EM} = v_e / \eta = \frac{2c}{\dfrac{Z}{Z_0} + \dfrac{Z_0}{Z}} \quad |v| \le c \end{aligned}$$

同軸線路の
性質を適用

残された疑問に対する答え

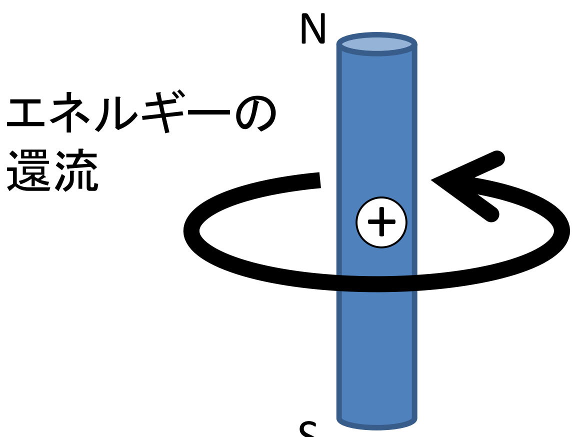
① 単位面を通過する電力はポインティング電力 P か？　→ yes

② 電荷の移動速度 v_e とエネルギーの移動速度 v_{EM} の関係は？
→ 同じではないが、強い関連性がある

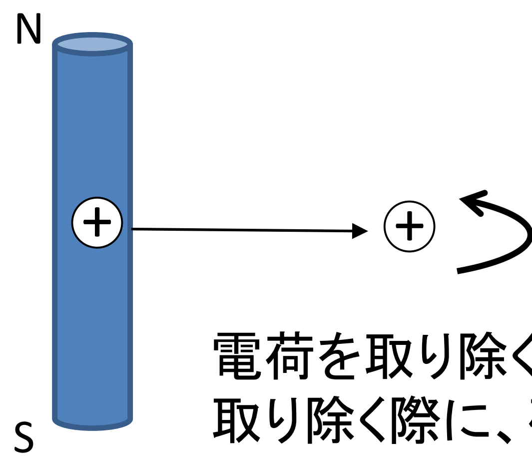
③ 補正係数 η はどの物理量に対する補正なのか？
→ 速度 v_e に対する補正係数。v_{EM} を v_e/η として求める

推論からの結論:　静電磁界でもエネルギーの動きはある

帯電した棒磁石の周りにエネルギーの還流があるか？　ある



電磁界の角運動量が
z 軸に対して存在する



電荷を取り除くと運動量は失われるが
取り除く際に、磁石の磁界により
ローレンツ力を周方向に受ける

（角運動量と回転力（トルク）の総量は
等しくなる　（下記URL参照））

https://www.photon-cae.co.jp/technicalinfo-list/technicalinfo/780/

注：前提条件をつけて推論したので、正しさの証明にはなっていない
（採用した前提条件は大丈夫だろうと信じているが・・・）
角運動量を実測できれば決着がつくが、そのような測定実験を知らない

ファインマン「エネルギーの還流があるということはばかげた話である。しかし、これは、途方も無く奇妙なことでも無さそう・・・。」（ファインマン物理学IV）