

静電磁界中のポインティングベクトルについて [II] ～エネルギー流動メカニズムの描像～

唐沢 好男

概要

本発表は前回発表(2022.07, AP研)の続きである。

$E \times H$ で表されるポインティングベクトルはアンテナの放射界解析などに重要な働きを持つ。マクスウェルの方程式から導かれるエネルギー保存則(ポインティングの式)の中に、閉領域の表面から単位時間当たり流れ出すエネルギー(すなわち電力)の単位面積当たりの量として現れる。このポインティングベクトルは、閉領域内でのエネルギーが動的に変化する中でのエネルギーの出入りを表す式であるが、それがそのまま静電磁界でも通用しそうな例があるため、静電磁界の全般に対しても適用できるのではないかとの期待もある。

前回発表では、前提を決めそこからの推論によって、静電磁界でもポインティングベクトルに従うエネルギーの流動があることを述べた。そして、そこで示したエネルギーの移動速度の式は奇妙な形になった。本発表では、静電磁界をエネルギーが光速で移動する基本成分の集まりと考えることにより、辻褄の合う形で説明できることを示す。

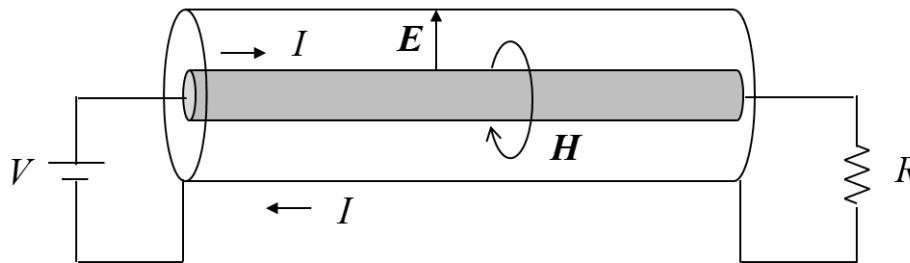
発表の内容

- ① 背景：電磁気学のパラドックス
- ② 前回議論（静電磁界のエネルギー流動）のまとめ
- ③ 流動メカニズムに関する仮定とその合理性
- ④ エネルギー移動速度に関する動電磁界との整合性
 - 平行平板伝送路（交流信号）
 - 導波管伝送（電磁波）
- ⑤ まとめ：エネルギー流動の描像

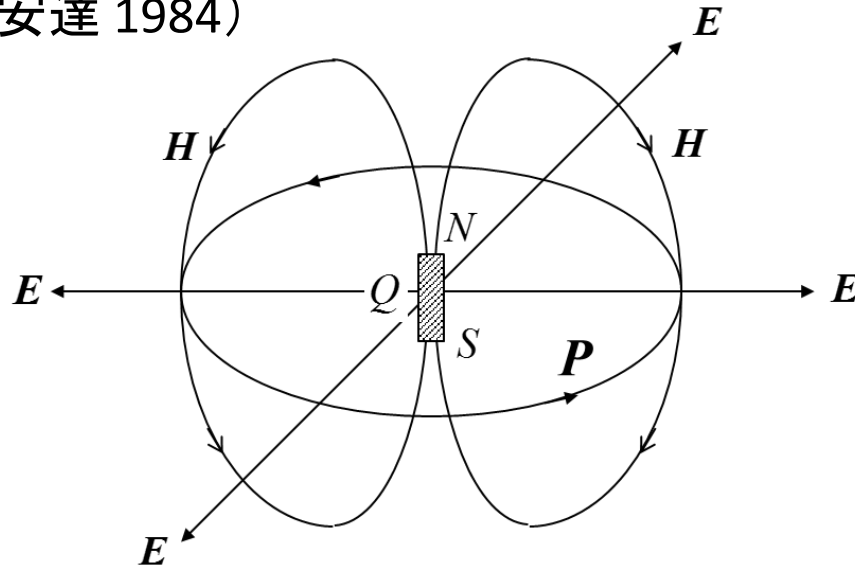
電磁気学のパラドックス

電磁波はポインティングベクトル $E \times H$ がエネルギーの流れを作っている
(電力を運んでいる)

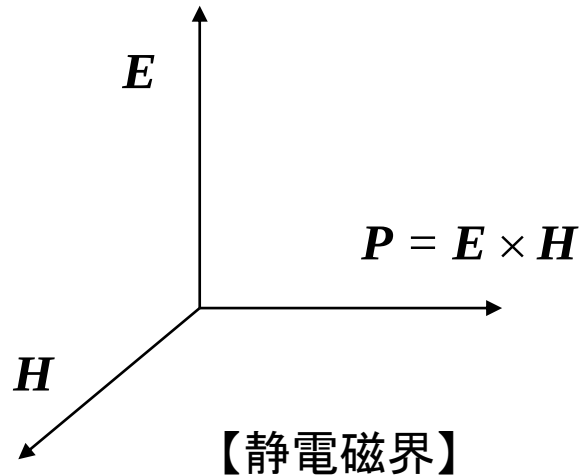
直流電力伝送の静電界においても $E \times H$ が電力を運んでいる



それなら、帯電した棒磁石の周りにエネルギーの還流ができるはず。本当か？
(ヘルツ 1890, 安達 1984)



静電界と静磁界が直交してある環境において
エネルギーの流れはできるか？



三つの答え

ポインティングベクトル P は

- ① エネルギーの流れを生む
- ~~② エネルギーの流れはできない~~
- ③ できる場合とできない場合がある

前提を決めて議論したい

その前提

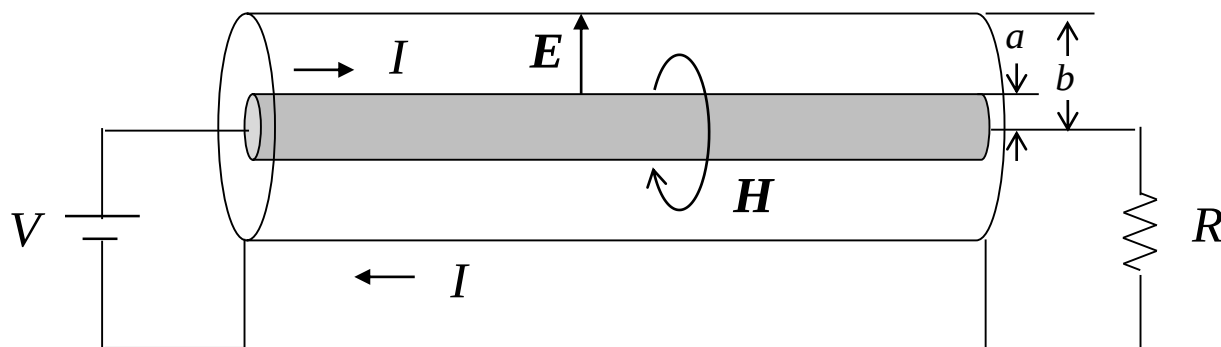
- [1] 自由空間においては電磁界のふるまい(電磁現象)は電界と磁界によってのみ決まる
- [2] 電界と磁界がそれぞれどのような仕組みで生成されたかということ(原因)によらない

直流送電を調べる

なぜなら、そこに静電磁界ができています

電界と磁界の相互作用は、その生まれ方(素性)に因らない、という前提条件から、ここで得られる電磁現象の性質は、一般的に通用する(という論理)

円筒同軸線路



$$I = \frac{V}{R}$$

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)r} \\ H_\phi &= \frac{I}{2\pi r} \end{aligned} \right\}$$

管内のインピーダンス Z は管内で一様

$$Z = \frac{E_r}{H_\phi} = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} R \quad \longrightarrow \quad \frac{R}{R_0} = \frac{Z}{Z_0}$$
$$\left(R_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)$$

エネルギー移動に関する諸量の関係

伝送路の同軸空間単位長さあたりに蓄えられているエネルギー u_G

$$u_G = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_b^a (\epsilon_0 E_r^2 + \mu_0 H_\phi^2) r dr d\phi = \frac{\epsilon_0 \pi V^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad [\text{J/m}]$$

伝送路の中空部の断面積を通過する電力 P_S

$$P_S = \int_0^{2\pi} \int_b^a E_r H_\phi r dr d\phi = VI \quad [\text{W}]$$

電気回路で送られる電力 VI に等しく
なっており、単位面積当たりポインティ
ング電力 P とする算定に合致

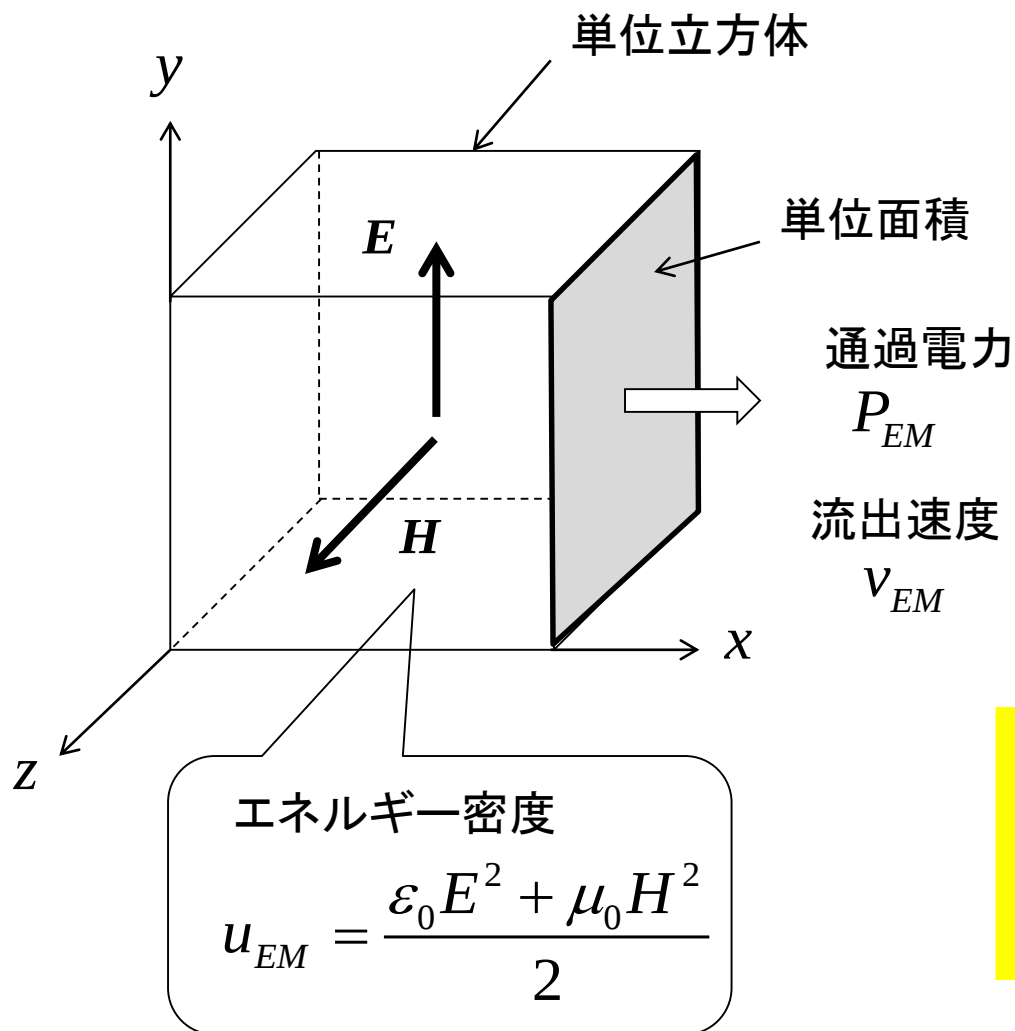
同軸線路の中空部分が担うエネルギーの伝送の速度 v_G

$$v_G = P_S / u_G = \frac{VI}{\frac{\epsilon_0 \pi V^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2c}{\frac{R}{R_0} + \frac{R_0}{R}} = \frac{2c}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} \leq c$$

($R=R_0$ のとき光速 c)

インピーダンス Z
が決まれば
エネルギーの
移動速度は
この式で決まる

静電磁界のエネルギー移動(前回AP研発表のまとめ)



エネルギー移動の基本式

$$u_{EM} v_{EM} = P_{EM}$$

単位面積を通過する電力
(=ポインティング電力)

$$P_{EM} = E_y H_z$$

エネルギーの移動速度

$$v_{EM} = \frac{2}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c \quad \left(Z \equiv \frac{E_y}{H_z} \right)$$

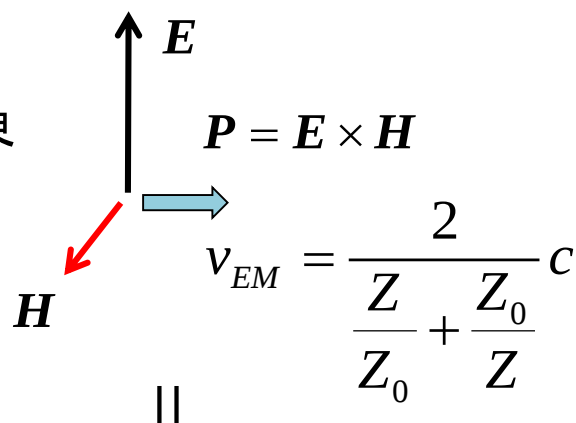
この式の意味は？

静電磁界の動作に関する仮定

- (1) 電界と磁界が直交し、その大きさの比率の絶対値 $|Z|$ が Z_0 であるものを基本成分とする。基本成分は2種類あり、 $Z=Z_0$ では、エネルギーは x 軸正方向に光速で動く。もう一つの基本成分は $Z=-Z_0$ で、負方向に光速で動く。ここでは、便宜上、前者を正の基本成分、後者を負の基本成分と呼ぶ。
- (2) 任意の直交電磁界は2つの基本成分(=正負の基本成分)に分解される。この電磁界でのエネルギーの動きは、反対方向に動く二つの成分の合成である。
- (3) 電界のみ、または磁界のみの環境ではエネルギーは静止している。

直交静電磁界がある環境でのポインティングベクトルとエネルギー流動

直交電磁界



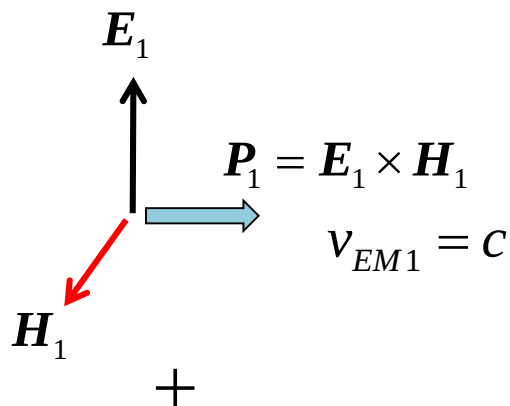
動電磁界と言えども
微小時間・微小空間でみれば
そこは静電磁界

$$E = E_1 + E_2$$

$$H = H_1 + H_2 = \frac{1}{Z_0} (E_1 - E_2)$$

$$P = E \times H = P_1 + P_2$$

正の
基本成分

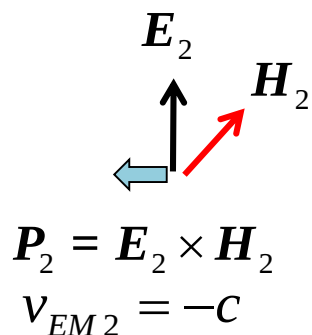


$$E_1 = \frac{1}{2} (E + Z_0 H)$$

$$H_1 = \frac{E_1}{Z_0}$$

電界と磁界がどの
ような関係にあるか
を表したものがマク
スウェルの方程式

負の
基本成分



$$E_2 = \frac{1}{2} (E - Z_0 H)$$

$$H_2 = \frac{E_2}{Z_0}$$

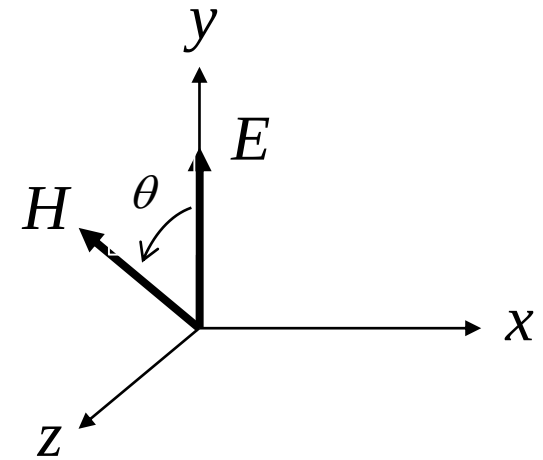
電界と磁界がある
時、それがどのよう
な働きをしているか
はマクスウェルの方
程式からは陽には
見えない

(この仮定に不合理なことは見つからない)

電界と磁界が直交しない場合

電磁界

$$\mathbf{E} = E\mathbf{j}, \quad \mathbf{H} = H \sin \theta \mathbf{k} + H \cos \theta \mathbf{j}, \quad Z \equiv E / H$$



エネルギー密度

$$u_{EM,total} = u_{EM,1} + u_{EM,2} + u_{EM,0} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)$$

エネルギー移動速度

($EM,1$: 正の基本成分、 $EM,2$: 負の基本成分
 $EM,0$: 静止成分)

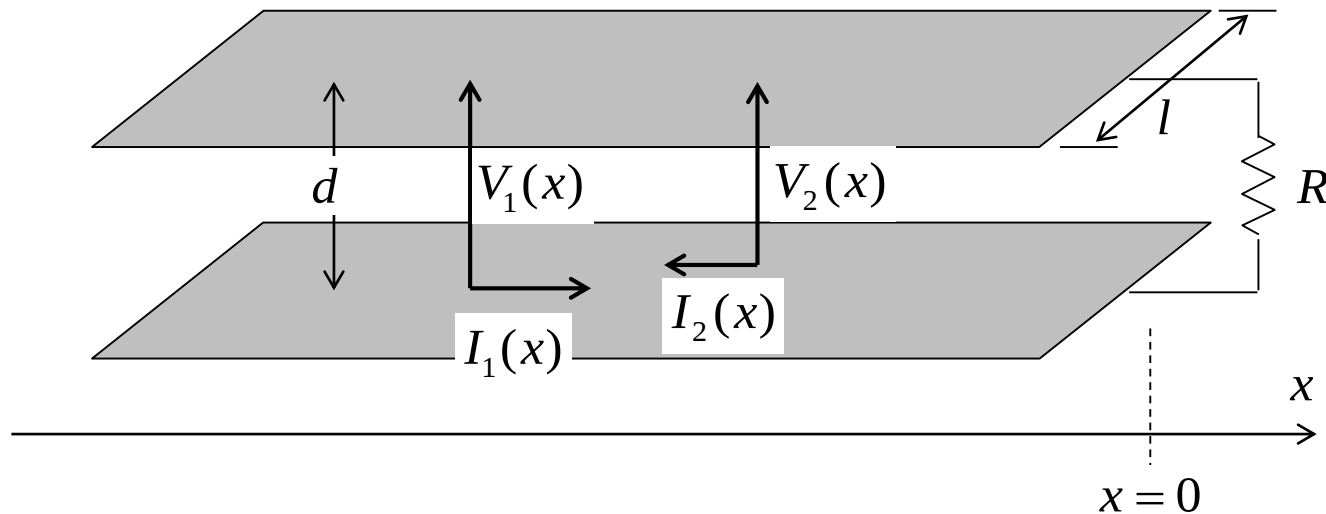
$$v_{EM} = \frac{u_{EM,1} - u_{EM,2}}{u_{EM,total}} c$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \epsilon_0 \left\{ (E + Z_0 H \sin \theta)^2 - (E - Z_0 H \sin \theta)^2 \right\}}{\frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)} c = \frac{\frac{2 \sin \theta}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}}}{c} c$$

単位面積当たりの通過電力

$$P_{EM} = u_{EM,total} v_{EM} = (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \frac{\sin \theta}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c = EH \sin \theta = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}|$$

動電磁界では:(ケース1) 交流信号の分布定数回路伝送



伝送路特性

$$L = \frac{\mu_0 d}{l}, \quad C = \frac{\epsilon_0 l}{d}$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{d}{l} Z_0$$

進行成分

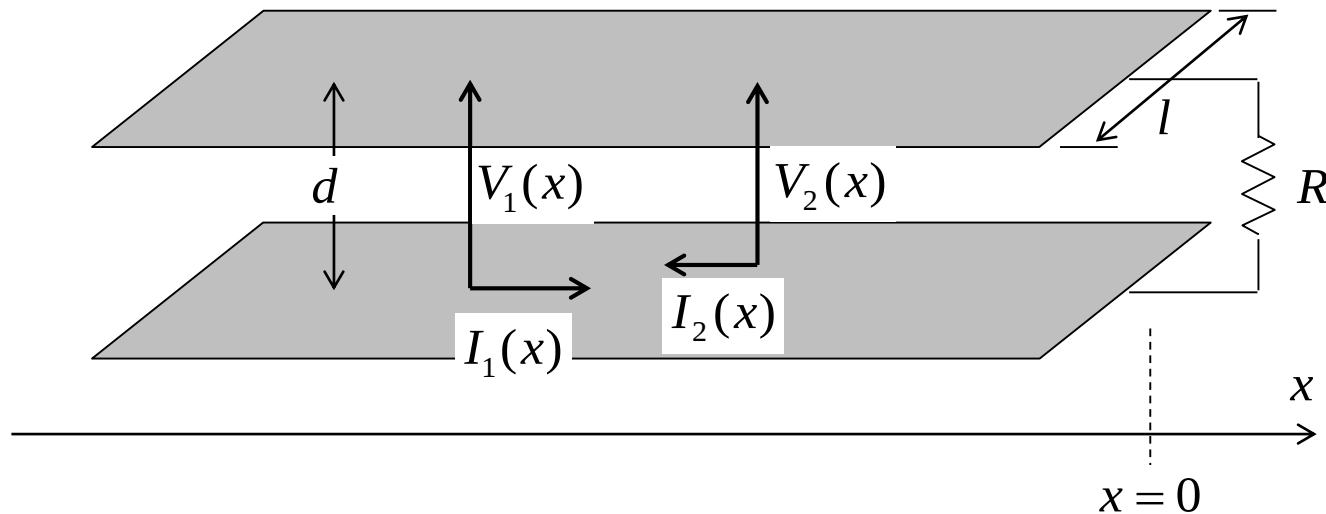
$$V_1(x) = V_{10} e^{-j\beta x}, \quad I_1(x) = \frac{V_1(x)}{R_0} = \frac{V_{10}}{R_0} e^{-j\beta x}$$

反射成分

$$V_2(x) = V_{20} e^{j\beta x}, \quad I_2(x) = \frac{V_2(x)}{R_0} = \frac{V_{20}}{R_0} e^{j\beta x}$$

$$\left(\beta = \omega \sqrt{LC} = \frac{\omega}{c}, \quad V_{10} \equiv V_1(0), \quad V_{20} \equiv V_2(0) \right)$$

進行成分と反射成分の関係(電圧と電流)



合成信号

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) = V_{10}e^{-j\beta x} + V_{20}e^{j\beta x}$$

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) = \frac{1}{R_0} (V_{10}e^{-j\beta x} - V_{20}e^{j\beta x})$$

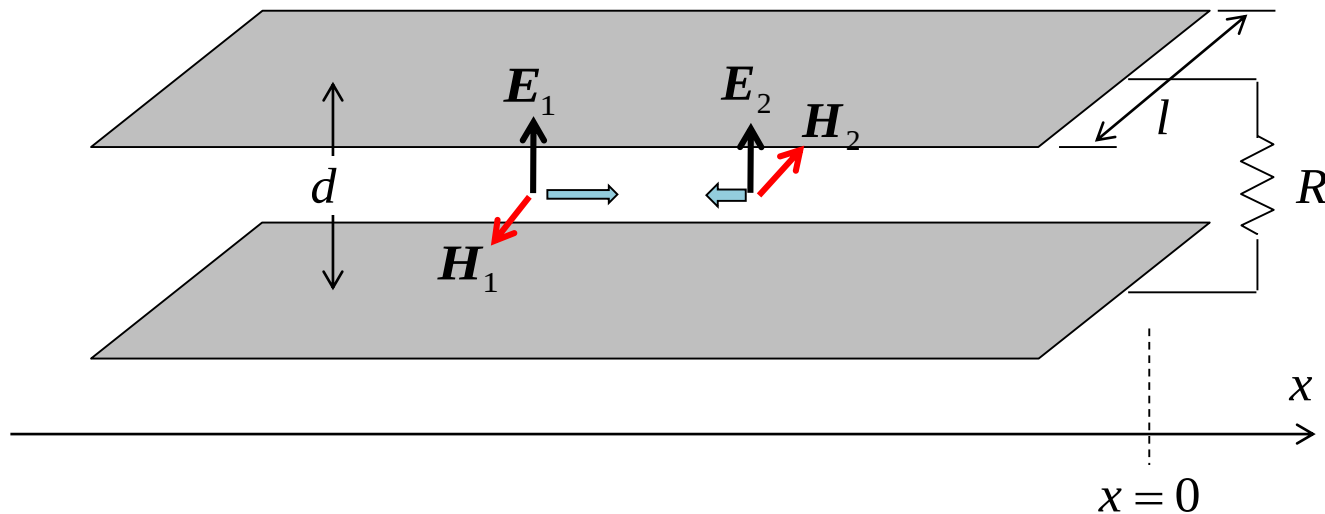
反射係数

$$\Gamma_0 \equiv \frac{V_{20}}{V_{10}} = \frac{R - R_0}{R + R_0}$$

電力(やエネルギー)の平均伝送速度

$$v_{ave} = \frac{1 - \Gamma_0^2}{1 + \Gamma_0^2} c = \frac{2}{\frac{R}{R_0} + \frac{R_0}{R}} c$$

進行成分と反射成分の関係(電界と磁界)



$$E_y(x) = \frac{V(x)}{d} = \frac{1}{d} (V_{10}e^{-j\beta x} + V_{20}e^{j\beta x}) \equiv E_{y,1}(x) + E_{y,2}(x)$$

$$H_z(x) = \frac{I(x)}{l} = \frac{1}{lR_0} (V_{10}e^{-j\beta x} - V_{20}e^{j\beta x}) \equiv H_{z,1}(x) + H_{z,2}(x)$$

$$Z_1(x) \left(\equiv \frac{E_{y,1}(x)}{H_{z,1}(x)} \right) = -Z_2(x) \left(\equiv \frac{E_{y,2}(x)}{H_{z,2}(x)} \right) = \frac{lR_0}{d} = Z_0$$

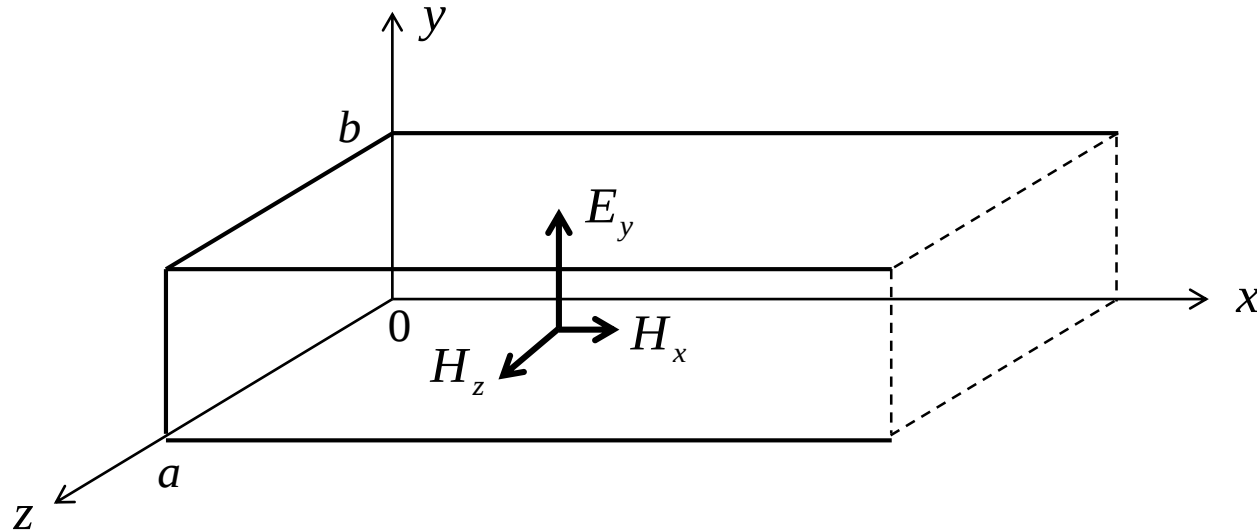
$$\Gamma_0 \equiv \frac{V_{20}}{V_{10}} = \frac{R - R_0}{R + R_0} = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \quad \rightarrow \quad v_{ave} = \frac{1 - \Gamma_0^2}{1 + \Gamma_0^2} c = \frac{2}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c$$

交流伝送では
進行成分と反射
成分が陽に分離
されている

直流伝送では、
この分離が隠れ
ている

分離されている
こと自体は共通

(ケース2) 導波管のエネルギー伝送速度



TE₁₀ モードの管内の電磁界

$$E_y(z, x) = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} z\right) e^{-jk_x x}$$

$$\frac{k_x}{k} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

$$H_z(z, x) = \frac{E_0 k_x}{Z_0 k} \sin\left(\frac{\pi}{a} z\right) e^{-jk_x x}$$

群速度

$$H_x(z, x) = -j \frac{\pi E_0}{Z_0 k a} \cos\left(\frac{\pi}{a} z\right) e^{-jk_x x}$$

$$v_g = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} c$$

導波管内進行波成分の 波動インピーダンス

$$Z \equiv \frac{E_y}{H_z} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad \Rightarrow$$

進行波成分のエネルギーの移動速度

$$v_{E_y+H_z} = \frac{2}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c = \frac{2\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}{2 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} c$$

(場所によらず一定)

三成分の平均エネルギー比

$$\varepsilon_0 \langle |E_y|^2 \rangle : \mu_0 \langle |H_z|^2 \rangle : \mu_0 \langle |H_x|^2 \rangle = 1 : 1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 : \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2$$

エネルギーの平均移動速度(エネルギー比での加重平均)

$$v_{EM} = \frac{\varepsilon_0 \langle |E_y|^2 \rangle + \mu_0 \langle |H_z|^2 \rangle}{\varepsilon_0 \langle |E_y|^2 \rangle + \mu_0 \langle |H_z|^2 \rangle + \mu_0 \langle |H_x|^2 \rangle} v_{E_y+H_z} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} c = v_g$$

(群速度に一致)

まとめ

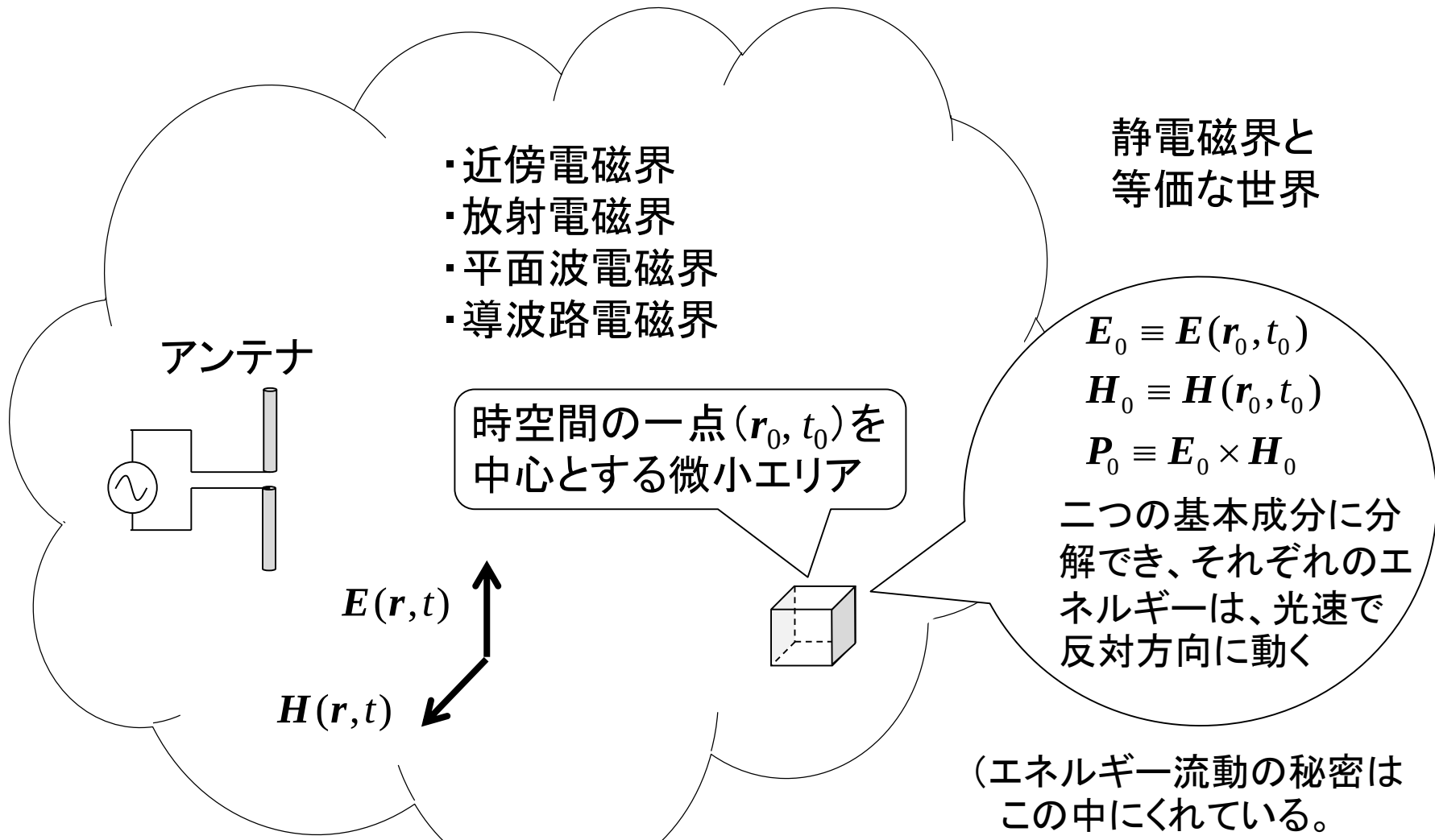
静電磁界では

- 1) $E \times H \neq 0$ の電磁界ではエネルギーは静止
- 2) 電界と磁界が直交し、その大きさの比率の絶対値 $|Z|$ が Z_0 であるものを基本成分とする。基本成分は2種類あり、 $Z=Z_0$ (正の基本成分)では、エネルギーは $E \times H$ 方向に光速で動く。もう一つの基本成分は $Z=-Z_0$ (負の基本成分)で、反対方向に光速で動く。
- 3) 電界と磁界が直交する電磁界は2つの基本成分 (= 正負の基本成分) に分解される。この電磁界でのエネルギーの動きは、反対方向に光速で動く二つの成分の合成である

動電磁界 $E(r,t)$, $H(r,t)$ では、

- 4) 電磁界 $E(r,t)$, $H(r,t)$ は、マクスウェルの方程式によって定められる。
- 5) その動的性質 (エネルギー流動や運動量) は、4次元空間の固定点 (r_0, t_0) の微小領域を静電磁界とみなすとき、その微小領域の性質に内包されている。(静かなところにもエネルギーの風が吹いている)。
- 6) 動電磁界は、静電磁界の性質をもつ微小領域が4次元空間全体に亘って敷き詰められたものである。

マクスウェルの方程式によって定められる電磁界 (時間と空間の4次元世界)



動電磁界は、静電磁界の性質をもつ微小領域が
4次元空間全体に亘って敷き詰められたもの

参考1: 研究会資料の図2

(電荷の動きは今回議論に本質的に関係ないので、発表では不使用)

$E > Z_0 H$ の場合

正の基本成分

$$(H_1 = E_1 / Z_0)$$

負の基本成分

$$(H_2 = -E_2 / Z_0)$$

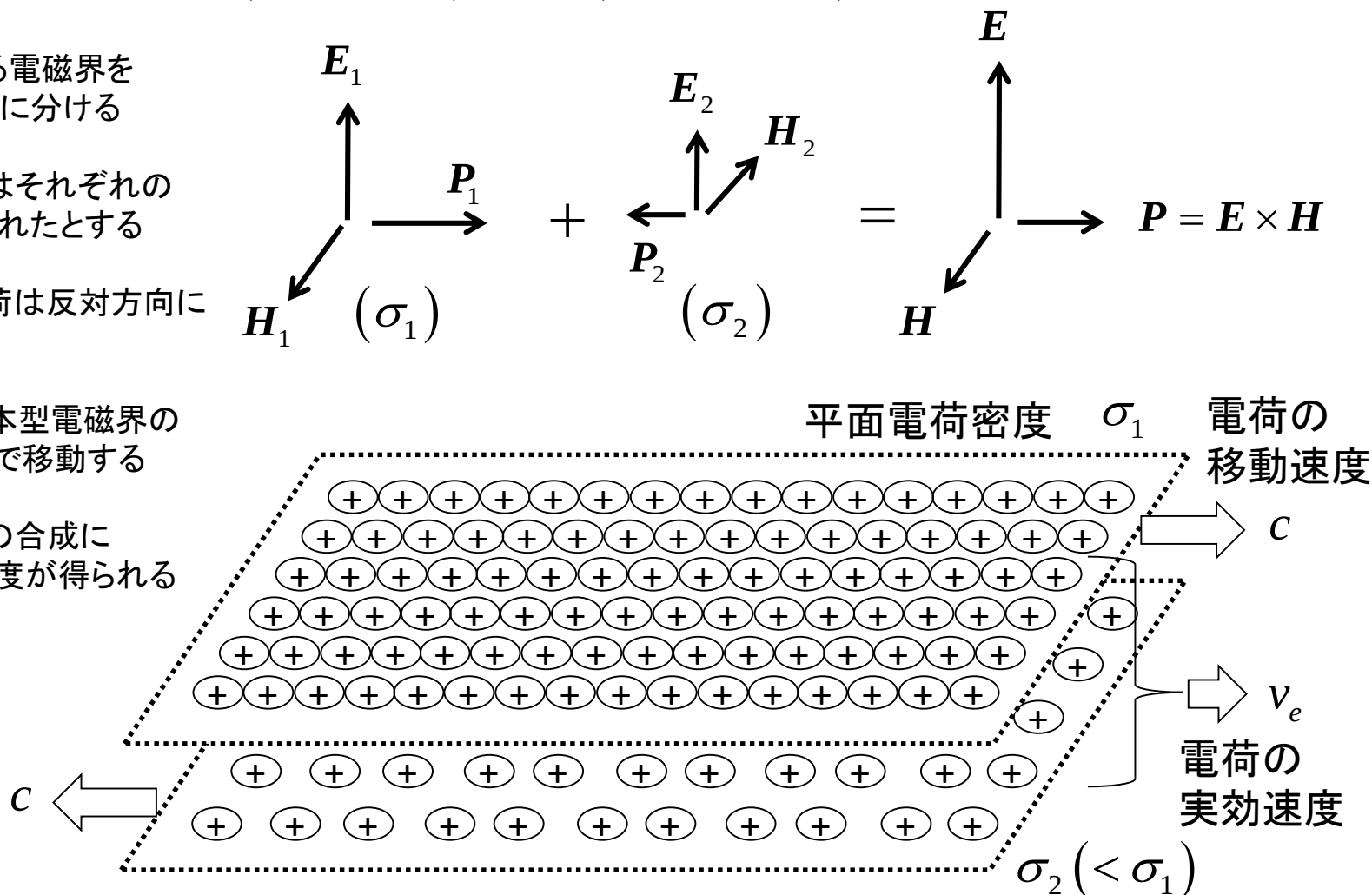
① 任意の直交する電磁界を基本型と反基本型に分ける

② 基本型電磁界はそれぞれの平面電荷から生まれたとする

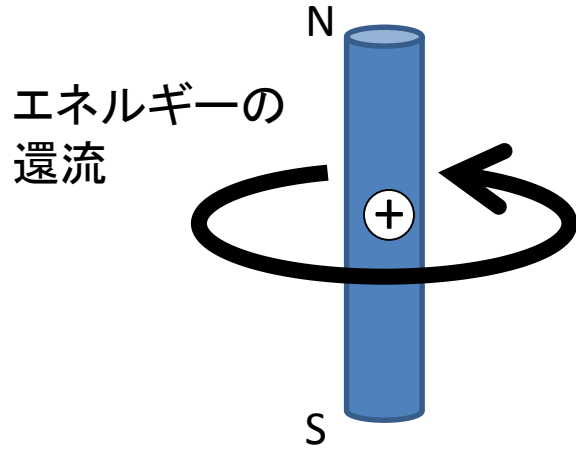
③ 二つの平面電荷は反対方向に光速で移動する

④ 結果として、基本型電磁界のエネルギーも光速で移動する

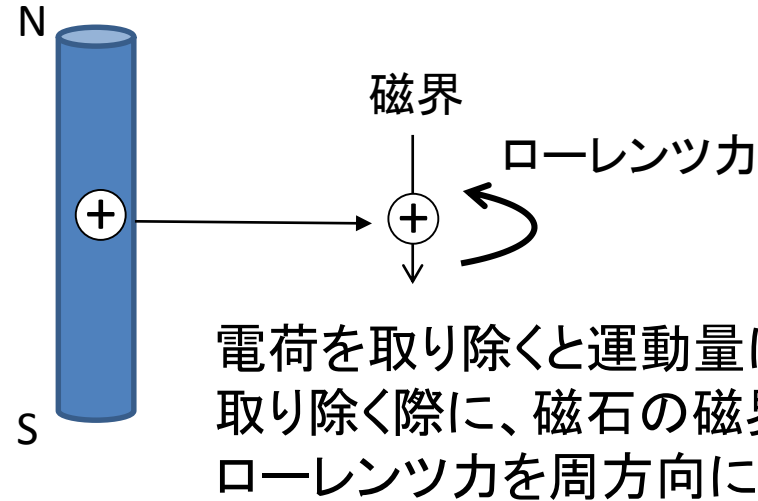
⑤ 両方向の流れの合成により見かけ上の速度が得られる



参考2: 帯電した棒磁石の周りにエネルギーの還流があるか? ある



電磁界の角運動量が
 z 軸に対して存在する



(角運動量と回転力(トルク)の総量は
等しくなる (下記文献参照))

太田浩一、電磁気学の基礎 II, 東京大学出版会. 12.9節 (p. 359)

注: 本発表では前提条件をつけて推論したので、正しさの証明にはなっていない
(採用した前提条件は大丈夫だろうと信じているが...)

角運動量を実測できれば決着がつくが、そのような測定実験を知らない

ファインマン「エネルギーの還流があるということはばかげた話である。しかし、これは、途方も無く奇妙なことでも無さそう...。」(ファインマン物理学IV)

本発表が皆さんの議論の糸口になればうれしい