第１章　電磁気学を学ぶための準備

～マクスウェル山への登頂を目指して～

本書は電磁気学の不思議に焦点を当て、その魅力を発掘することに力を注いでいる。電磁気学の知識そのものが不足していると発掘の楽しみを味わうことができない。その電磁気学はマクスウェルの方程式と呼ばれる４つの連立方程式で構成される。マクスウェルの方程式はベクトルの微分方程式で表されているので、それを理解するための数学的な準備が必要になる。本章は、電磁気学の学びを山登りに例え、その備えとなる基礎的な事項を簡潔にまとめている。

1.1　物理法則とは

電磁気学は電気と磁気に関するいくつかの物理法則の上に理論が組み立てられている。では、この法則とはどういう位置づけになるのだろう。同じような言葉で、定理や原理もあるが、何が違うのだろう。ここでは、電磁気学の根底を与える定理と法則、および、それに関連する公理や原理のそれぞれの定義をまとめる。

公理（axiom）

公準とも言われる。命題（真偽の判断の対象となる文章または式）を導きだすための前提として導入される最も基本的な仮定。他の結果を導きだすための議論の前提となるべき論理的に定式化された（形式的な）言明。真実であることが明らかな自明の理が採用されるとは限らない。
例：平面上で直線外の１点を通って、この直線と交わらない直線がただ１本存在する（ユーグリッド幾何学）

定理（theorem）

公理を前提として演繹手続きによって導きだされる命題。その正しさは、公理に基づき数学的に証明される。
代表的な例：ピタゴラスの定理（三平方の定理）、フェルマーの最終定理
電磁気学で使われる定理の例：ガウスの発散定理、ストークスの定理

法則（law）

ある物事と他の物事との間に一定の関係があるときに、その関係を表す言葉あるいは式。その関係が必然性や普遍性を持つと認められたとき、法則と呼ばれる。観測や実験から帰納されたもので、数学的に証明されるものではない。自然科学に対する法則に対しては、自然界はそのような仕組みになっていると素直に受け入れるしかない。法則に当てはまらない物事が見つかると、新たな法則に置き換えられたり、廃棄されたりする。例えば、クーロンの法則は「二つの電荷の間には距離の２乗に反比例する力が働く」であるが、距離の２乗に反比例することの正しさを証明することはできない。距離の 1.999 乗かもしれないし 2.001 乗かもしれない。しかし、２乗と

することの反証は無く、故に法則と認められている。
電磁気学に現われる法則の例：クーロンの法則、オームの法則、電荷保存の法則（電荷保存則）、ガウスの法則、アンペアの法則、ビオ・サバールの法則、電磁誘導の法則

原理（principle）

自然科学、特に物理学で用いられる基本的な命題。法則とほとんど同義だが、それよりもう少し定性的概念的なもの。法則と同様、観測や実験から帰納されたもので、数学的に証明されるものではない。
例：重ね合わせの理（重ね合わせの原理）

1.2　ベクトル解析

電磁気学に出てくる法則等は数式によって表現される。特に大事なものは３次元空間の幾何学を扱うベクトル解析で、その知識が求められる。ベクトル解析そのものは専門の教科書で学んで欲しいが、そのエッセンス（必要最小限の知識；主に本書に現われるのも）を以下に整理する。

スカラー関数とベクトル関数

・スカラー関数：　$\phi(x,y,z)$
・ベクトル関数：

$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k} \qquad \text{（直角座標）}$$

$$\boldsymbol{A} = A_r \hat{\boldsymbol{r}} + A_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} + A_z \hat{\boldsymbol{z}} \qquad \text{（円筒座標）}$$

$$\boldsymbol{A} = A_r \hat{\boldsymbol{r}} + A_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad \text{（球座標・極座標）}$$

内積と外積

・内積

角度差 θ の二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ に対して、以下で定義されるスカラー量。

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

・外積

角度差 θ の二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ に対して、以下で定義されるベクトル量。

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$
$$= \left(A_y B_z - A_z B_y\right)\boldsymbol{i} + \left(A_z B_x - A_x B_z\right)\boldsymbol{j} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\boldsymbol{k}$$

$$\left|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right| = \left|\boldsymbol{A}\right|\left|\boldsymbol{B}\right|\sin\theta$$

（sinθが負の値になるとき、ベクトルの大きさと言う意味では、$|\sin\theta|$）

微分演算子（ナブラ）

$$\nabla \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{（直角座標）}$$

$$\nabla \equiv \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{（円筒座標）}$$

$$\nabla \equiv \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \qquad \text{（球座標）}$$

勾配（gradient, グラディエント）

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k} \qquad \text{（直角座標）} \qquad (1.1a)$$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \text{（円筒座標）} \qquad (1.1b)$$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad \text{（球座標）} \qquad (1.1c)$$

発散（divergence, ダイバージェンス）

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \text{（直角座標）} \qquad (1.2a)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(rA_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \text{（円筒座標）} \qquad (1.2b)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \qquad \text{（球座標）} \qquad (1.2c)$$

回転（rotation, ローテーション）

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \qquad \text{（直角座標）} \qquad (1.3a)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \text{（円筒座標）} \qquad (1.3b)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,A_{\varphi}\right)-\frac{\partial A_{\theta}}{\partial\varphi}\right)\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_{\varphi}\right)\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_{\theta}\right)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\qquad\text{（球座標）}\qquad(1.3\text{c})$$

よく使う公式

$$\nabla\cdot\nabla\phi=\nabla^2\phi\qquad\text{（ラプラシアン）}$$

$$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\qquad\text{（直角座標）}$$

$$\nabla^2\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\qquad\text{（円筒座標）}$$

$$\nabla^2\equiv\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\qquad\text{（球座標）}$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}=0$$

$$\nabla\times\nabla\phi=\boldsymbol{0}\qquad(\boldsymbol{0}\text{: ゼロベクトル})$$

$$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}$$

$$\nabla\times\left(\nabla\times\boldsymbol{A}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

線積分と面積分

（１）線積分

３次元空間に横たわる経路 c 上の値 A の積分。経路上の線素を ds とすると

$$\int_{\mathrm{c}}Ads$$

電磁気学に現れる線積分の大部分はベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の経路の接線方向成分。接線方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{t}$ とすると

$$\int_{\mathrm{c}}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}ds$$

経路 c が閉曲線のときは

$$\oint_{\mathrm{c}}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}ds$$

電磁気学において､ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ に入る代表的な物理量は電界 $\boldsymbol{E}$ [単位:V/m]や磁界 $\boldsymbol{H}$ [A/m]。

（２）面積分

３次元空間に横たわる曲面 S 上の値 *A* の積分（２重積分）。面上の面素を ***dS*** とすると

$$\int_{\mathrm{S}} A dS$$

電磁気学に現れる面積分の大部分はベクトル関数 ***A*** の面上の法線方向成分。法線方向の単位ベクトル（単位法線ベクトル）を ***n*** とすると

$$\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} dS$$

電磁気学において、ベクトル関数 ***A*** に入る代表的なものは電束密度 ***D*** [C/m^2]や磁束密度 ***B*** [Wb/m^2]。

（３）体積積分

３次元領域内 V にある関数 *A* の領域内での積分（３重積分）

$$\int_{\mathrm{V}} A dV$$

電磁気学では、ベクトル関数 ***A*** の発散の体積積分がよく現れる。

$$\int_{\mathrm{V}} \nabla\cdot\boldsymbol{A} dV$$

積分定理

（１）ガウスの発散定理

閉曲面 S で囲まれた内部空間 V がある。ガウスの発散定理（ガウスの定理、発散定理とも呼ばれる）は、対象空間内で定義されるベクトル関数 ***A*** の内部空間 V での性質とその表面（閉曲面）S での性質を等式で結びつけたものであり、以下の式で表される。

$$\int_{\mathrm{V}} \nabla\cdot\boldsymbol{A} dV = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} dS \tag{1.4}$$

このような、積分変換で表される定理は積分定理と呼ばれる。定理であるから、その正しさは数学的に証明されている。その証明についてはここでは割愛し（ベクトル解析の教科書を見てほしい）、式が意味するところだけを簡潔に述べる。

３次元空間の全体に亘ってベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$が存在する。同式の左辺は、内部空間 V にあるベクトル関数 ***A*** の発散（＝湧き出し）を全部集めたもの（＝湧きだしの総量）である。一方、右辺は、表面 S から、その面に垂直に向かうベクトル関数 ***A*** の成分（流束と言う言葉が使われる）を面全体で積分したものであり、表面から出てゆく量（流束）の全体に当たる。

ガウスの発散定理を一言で言えば、「内部で湧き出す量（左辺）は、表面からあふれ出る量（右辺）に等しい」であり、至極当然と言う気持ちで受け入れることができると思う。ただし、この式には時間要素が入っていない。いわゆる時間変化がない定常状態を前提としている。時間変化

がある場合には、内部空間に起きる発散の変化が閉曲面に作用するまでには時間が必要になる（物理で言えば光の速度で伝播する）ためである。

（２）ストークスの定理

ループをなす経路 c で囲まれた任意の曲面 S を考える（任意の曲面 S があり、その縁を c とすると読み替えても良い）。ストークスの定理は、曲面 S 上でのベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の回転の面積分値と閉曲線 c 上での $\boldsymbol{A}$ の線積分値との関係を与える積分定理で以下の式で表される。

$$\int_{\mathrm{S}} \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS = \oint_{\mathrm{c}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{1.5}$$

先ず、式の意味を考える。

同式の左辺は、曲面 S 上におけるベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の回転（＝捩れの力；ベクトルの向きは回転軸の方向）の面に垂直な方向の成分を全部集めたもの（＝回転の総量）である。一方、右辺は、面の縁をなす経路（ループ）c 上でのベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の経路方向成分を経路全体で積分したものであり、ループに働く渦（c に沿った循環）。式の左右の量が等しい、という定理である。

ストークスの定理を一言で言えば、「面上の微小部分に存在する回転（左辺）が、その外側に渦を作り（右辺）、面内の回転の総量は面のふちを経路とするループの循環に等しい」であり、ガウスの発散定理の直感的理解のしやすさに比べると、少し分かりにくいように思う。

道具として利用すると言う目的であれば、ここまでの理解でよい。少し拘りを持った説明を第３章で行っているので、そこで理解を深めてほしい。この定理もガウスの発散定理と同様、時間変化がない状態(回転の時間変化がループに到達する時間を無視できる状態)を前提としている。

1.3　物理量と単位

電磁気学の学びは山登りに例えられるが、その展開は大河ドラマに近い。場面が進む毎にいろいろな人物が現れ、それらがお互いに関わりあってドラマが展開し、最後は大団円を迎える。ここでは、電磁気学に登場する役者（物理量）を簡単に紹介する。また、物理量には単位がある。電磁気学に関連する物理量は MKSA 単位系による４つの基本単位（m, kg, s, A）で組み立てられるが、その物理量に特化した単位（物理単位：例えば、電圧のボルト、電荷のクーロンなど）も定められている。物理量の理解のためには、単位を知ることが重要であり、物理単位と組立単位（MKSA 単位）の関係を整理して示す。なお、物理量の詳細な性質や他の物理量との関係は、この後の章で詳しく述べてゆく。

1.3.1　電磁気関係の物理量

電荷（q, Q）（カッコ内の記号は代表的に使われる文字）

電気力を引き起こす源。万有引力の源になる質量に対応。電荷は質量と違って正負の２種類(すなわち極性）がある。電荷の根源は全ての物質を構成している原子に求めることができる。電荷の最小単位（電気素量）は電子一つ分で、その絶対値 e は、単位をクーロン[C]として e $=1.602176634\times10^{-19}$ [C]である（この項の最後に述べる絶対定数）。通常の原子は、陽子と電子の

数が等しく、電気的には中和している（電気的性質を示さない）。何らかの理由によって原子から飛び出した電子が負の電荷を持つ粒子となる。また、負の電子が飛び出した後の原子は正の電荷を持つ粒子として振舞う。量子力学によれば、電子は位置が定まった固体としてではなく、確率的に分布している波の性質をもつもの（シュレーディンガーの波動方程式により）として表されるが、電磁気学では、それを巨視的に見て、定まった位置に電荷があるとみなして扱う。電荷は電磁気学の出発点を与える。

電荷密度（ρ）

単位体積当たりの電荷の量を電荷密度と呼び、単位は[C/m^3]である。なお、平面状に分布する電荷密度を扱う場合には単位は[C/m^2]、線上に分布する電荷密度を扱う場合には[C/m]である。

電界（$\boldsymbol{E}$）

荷電粒子（電荷）に対して力を生み出す場を電界と呼ぶ。電気的歪を持つ場。場に時間的変化が無いときの電界は電荷が発生源になる。大きさと向きを持つベクトル場である。単位は[V/m]。

電束（Φ）

電荷 Q から、（仮想的な意味ではあるが）Q 本の電気力線が放射状に生み出されているとみなし、この一つ一つを電束と呼ぶ。Q そのものは通常 1 より小さい値であり、整数値で数えられる本数と言うよりは、均一の分布で無限の数の電気力線が出ていて、その全体が Q であるとみなす。故に、$\Phi=Q$ であり、単位は[C]である。

電束密度（$\boldsymbol{D}$）

単位面積当たりの電束の量。大きさと向きを持つベクトル量。単位は[C/m^2]。

電位（スカラーポテンシャル）（ϕ, V）

空間に存在する電気的ポテンシャル。スカラー量。電位はスカラーポテンシャルとも呼ばれる。また、電気回路では電圧と呼ばれる。空間の２点 P_1、P_2 の電位が ϕ_1、ϕ_2 であるとき、電位差 ϕ_2-ϕ_1 は、点電荷を P_1 から P_2 まで運ぶときに外力がなす単位電荷当たりの仕事である。単位は[J/C]であるが、[V（ボルト）]で表す。電界の空間領域での線積分量である。

電流（I）

１秒間に当該面積を通過する電荷の量。単位は[C/s]であるが、[A（アンペア）]で表す。

電流密度（$\boldsymbol{i}$）

単位面積当たりの電流。大きさと向きを持つベクトル量。単位は[A/m^2]。

誘電率（ε_0, ε）

誘電率 ε は電界と電束密度のそれぞれの大きさの比 D/E。真空の誘電率 ε_0 の値は、次のように定められる。1 [C]の電荷量を持つ二つの点電荷を真空中に 1 [m]離して置いたときのクーロン力は測定値より換算して 8.9876×10^9 [N]になる。$F=K_eQ_1Q_2/r^2$ とする比例定数 K_e を $K_e=1/(4\pi\varepsilon_0)$

[Nm^2/C^2]と置くと、ε_0 =8.854×10^{-12} [$C^2N^{-1}m^{-2}$]となる。単位は[F (ファラッド)/m]でも表される。誘電体では分極によって誘電率は$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$に変化する。$\varepsilon_r$は比誘電率（$|\varepsilon_r|\geq 1$）と呼ばれ、媒質に依存した値を持つ。（注：$\varepsilon_0$の値については本項最後の絶対定数参照）

磁荷（q_m）

時間的に変化の無い場において、電界が電荷によって発生したと同じ考えの下での磁界の発生源と考えられた物理量。しかし、磁界を作り出す磁束（磁力線）は電流から生み出されることが明らかになり、単極磁荷（磁気モノポール）の存在は否定されている。磁気による力の説明に仮想的な磁荷を用いることはある。また、微小電流ループの等価回路として磁気双極子（極性が反対の二つの磁荷のペア）も用いられる。単位は[Wb（ウェーバ）]。

磁束（Φ_m）

磁力線と等価。ガラスの板の上に鉄粉を撒き、下から磁石を当てると磁力線の形に相当する模様ができる。磁束は始めも終わりも無く、ループになっている。単位は磁化と同じ[Wb]。

磁束密度（$\boldsymbol{B}$）

単位面積当たりを通過する磁束の量。大きさと向きを持つベクトル量。単位は[Wb/m^2]であるが、[T（テスラ）]で表される。電流の周囲にできる磁気的な性質を持つ渦状の場、場内にある電流に対して力が働く。

磁界（$\boldsymbol{H}$）

磁気の力に関するクーロンの法則から定義された磁気的歪の場を表すベクトル量。単位は[A/m]。磁束密度と同様に磁場の強さを表す量であるが、単位の違いから分かるように、二つは異なる物理量。

ベクトルポテンシャル（$\boldsymbol{A}$）

空間に存在する磁気的ポテンシャルを表すベクトル量。磁束密度$\boldsymbol{B}$に対して$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$で定義され、単位は[Tm]である。電流の周囲に電流に寄り添うように発生する場、場の向きと直交する方向に対する強度のずれが捻れとなって磁場（磁束密度、磁界）を生み出すと解釈できる。（第５章で、その本性に迫る）

透磁率（μ_0, μ）

透磁率μは磁界と磁束密度のそれぞれの大きさの比B/H。真空の誘電率μ_0の値は、μ_0=4π×10^{-7} [H（ヘンリー）/m]である。磁性体では磁化によって透磁率は$\mu=\mu_r\mu_0$に変化する。μ_rは比透磁率（$|\mu_r|\geq 1$）と呼ばれ、媒質に依存した値を持つ。マクスウェルの方程式により、真空中の光の速度cは$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$となることが明らかになっている。

絶対定数（c, ε_0, μ_0, e）

第６章では電磁気学と相対性理論の関係を説明する。その中では、一定速度で直線的に移動する座標系、すなわち、慣性系での物理現象が議論される。以下の量は、そのあらゆる慣性系にお

いて同じ値を持つ定数（絶対定数）である。

・光速 c: 299,792,458 m/s　この値は、今後、光速の測定精度が上がって、有効桁が増えてゆくと言うものではなく、国際単位系として決められた定義値である。現在は、これを基準にして長さ等を決めるというルールになっている。

・真空中の透磁率 μ_0: $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ [H（ヘンリー）/m]

・真空中の誘電率 ε_0: $\varepsilon_0\mu_0=1/c^2$ より $\varepsilon_0=8.854\cdots\times10^{-12}$ [$C^2N^{-1}m^{-2}$]

・電気素量 e: 1.602 176 634 $\times10^{-19}$ [C]　電荷の最小量。光速と同様、定義値であり、測定精度が上がって有効桁が変わってゆくと言うものではない。

1.3.2　MKSA 単位系と組立単位

物理学では､物理量の単位を理解することが物の本質を捉える意味において重要である｡また､単位に目が行き届くようになれば､単位が違う物理量を等号で結んだり､足し合わせたりというような初歩的な誤りを避けることができる。

現在の国際単位系（SI 単位と呼ばれる）では７つの基本単位を定めていて、個々の物理量の単位はこの基本単位の組み合わせ（組立単位）で表される。７つの基本単位は、長さ[m]、質量[kg]、時間[s]、電流[A]、熱力学温度[K]、物質量[mol]、光度[cd]である。このうち、長さ・質量・時間の３つで構成される単位系は MKS 単位系、電流を加えた単位系は **MKSA 単位系**と呼ばれる。電磁気学に現われる物理量は MKSA 単位系で表すことができる。

表 1.1 は、電磁気学に現われる物理量とその単位をまとめている。以降、MKSA 単位系での組立単位の表記 [$m^{p1}kg^{p2}s^{p3}A^{p4}$]を、簡略化して[$p_1,p_2,p_3,p_4$]とする。例えば、電圧は、[2,1,-3,-1]であり、組立単位が[$m^2kg/(s^3A)$]であることを示している。電圧に与えられた固有の単位はボルト[V]であって、それを使えば便利であるが、物理量同士の関連が見えなくなってしまっている。マクスウェル山登山の道中には、いろいろの物理量が出てくるが、この表に示している組立単位に立ち返って考えれば、次元の闇に迷い込むことは無い。例えば、クーロンの法則（法則自体は後に学ぶ）では、電荷 q_1 が距離 r にある電荷 q_2 に及ぼす力 F とその組立単位は、以下のように表される（物理量の割り算は組立単位の計算では引き算になる）。

$$F=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \rightarrow [1,1,-2,0]=2[0,0,1,1]-[-3,-1,4,2]-2[1,0,0,0]$$

以下の例も、単位で追うと物理量の意味が見えてくる。

$$EH\rightarrow[1,1,-3,-1]+[-1,0,0,1]=[0,1,-3,0]\rightarrow[\mathrm{W/m^2}]$$

（単位面積当たりの電力、あるいは、単位面積を１秒当たりに通過するエネルギー）

$$E/H\rightarrow[1,1,-3,-1]-[-1,0,0,1]=[2,1,-3,-2]\rightarrow[\Omega]$$　（抵抗あるいはインピーダンス）

$$1/\sqrt{\varepsilon\mu}\rightarrow-\left([-3,-1,4,2]+[1,1,-2,-2]\right)/2=[1,0,-1,0]\rightarrow[\mathrm{m/s}]$$　（速度）

$$DE \to [-2,0,1,1]+[1,1,-3,-1]=[-1,1,-2,0] \to [\mathrm{J/m^3}]$$

（単位体積当たりのエネルギー；BH も同じ）

$$DE/c^2 \to [-2,0,1,1]+[1,1,-3,-1]-2[1,0,-1,0]=[-3,1,0,0] \to [\mathrm{kg/m^3}]$$

（単位体積当たりの質量（電波の重さ？）；BH/c^2 も同じ）

また、電流によって生まれる磁気的性質を持つ場 B は、磁界ではなく磁束密度と呼ばれるが

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \to [1,1,-2,-2]+[0,0,0,1]-[1,0,0,0]=[0,1,-2,-1]$$

$$=[2,1,-2,-1](\text{磁束}[\mathrm{Wb}])-[2,0,0,0](\text{面積}[\mathrm{m^2}])$$

となり、磁束密度[Wb/m^2]と名づけられた理由が単位を知ると見えてくる。（もちろん、磁界と言う名前は別の物理量に使われていると言う歴史的な経緯もあるが）

表 1.1　電磁気関連物理量の MKSA 単位系での次元（組立単位）と物理単位

（4 つの基本単位の並び順にはいくつかの流儀があるが、本書では MKSA [m, kg, s, A]の順で並べている。）

名称（物理量）	代表的表記	単位名称	物理単位	組立単位			
				M (m)	K (kg)	S (s)	A(A)
力	F	N（ニュートン）	J/m, kgm/s^2	1	1	-2	
エネルギー(仕事)	U	J（ジュール）	Nm	2	1	-2	
電力	P	W（ワット）	J/s, VA	2	1	-3	
電圧	V, ϕ	V（ボルト）	J/C, W/A	2	1	-3	-1
電流	I	A（アンペア）	C/s, W/V				1
電流密度	i		A/m^2	-2			1
抵抗(インピーダンス)	R	Ω（オーム）	V/A	2	1	-3	-2
導電率			1/Ωm	-3	-1	3	2
静電容量	C	F（ファラド）	C/V	-2	-1	4	2
インダクタンス	L	H（ヘンリー）	J/A^2	2	1	-2	-2
誘電率	ε		C^2/Nm^2, F/m	-3	-1	4	2
透磁率	μ		H/m	1	1	-2	-2
電荷・電束	Q, q	C（クーロン）	As			1	1
磁荷・磁束	Q_m, q_m	Wb（ウェーバ）	Nm/A, Tm^2, Vs	2	1	-2	-1
電束密度	D		C/m^2	-2		1	1
磁束密度	B	T（テスラ）	N/Am, Wb/m^2		1	-2	-1
電界	E		V/m	1	1	-3	-1
磁界	H		A/m	-1			1
ベクトルポテンシャル	A		Tm	1	1	-2	-1
周波数	f	Hz（ヘルツ）	1/s			-1	

1.4　場の概念（遠隔作用と近接作用）

現代の物理学は場の理論によっている。**近接作用**の考え方である。近接作用と対比するものが**遠隔作用**である。例えば二つの質量があるとする。地球と私の関係でも良い。私は地球に引っ張られている。私も地球を引っ張っている。万有引力である。このように、相手が直接にこちらに

作用していると考えるのが、遠隔作用の考え方である。一方、私に力が働いているのは、私の周りに力の原因となる場ができていると言う考え方。これが近接作用の考え方である。地球と言う質量の塊が、周囲に重力場を作る。重力場の中にいる私に対して、その場の重力と私の質量に応じた力が働く。重力場を作っている質量が変化すれば、間にある媒質を通じて、その変化が有限速度（重力の場合は光速）で相手方に伝わり、それが私のところに来た時点で私が受ける力も変化する。図 1.1 はこのイメージを示している。電磁気学も同じで、電界や磁界と言う場が近接作用で電荷や電流に作用していると言う考え方が採られている。近接作用の考え方は、電磁気学の成立過程において、電気力線や磁力線のモデルを与えたファラデーによって生み出されたものである。場は空間の位置に対して定められる。その値がスカラー量であるならスカラー場、ベクトル量であるならベクトル場である。点(x,y,z)でのベクトル場 $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A}(x,y,z)$で表される。これが時間的に変化するとき、時間変数 t を加えて $\boldsymbol{A}(x,y,z,t)$で表される。

以下雑談。地球と月がテレビ電話で結ばれている。会話には 2.6 秒の時間差（光の速度での往復時間）が生じる。念力の達人が画面に映っている人に向けて、エイッと念波を送った。たちどころに転倒したら、これはオカルト。でも３秒後に倒れたら、近接作用の結果として本物かもしれない。

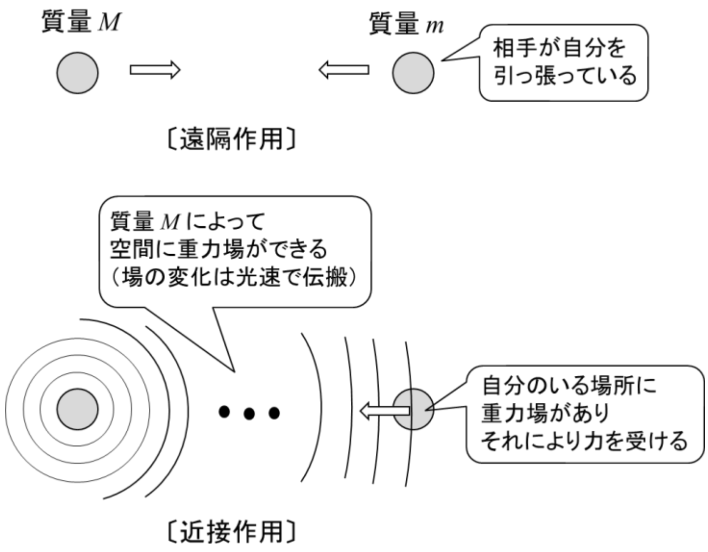

図 1.1　重力を例とした遠隔作用と近接作用の考え方

1.5　マクスウェル山の頂を目指して

電磁気学の勉強を山登りに見立てる。山の名前はマクスウェル山、山道の折々で、４つのマクスウェルの方程式を手に入れる。登山口は「電荷」である。ここから入って、電気や磁気の性質を持つ様々な物理量に出会い、それらの相互の関連を与える法則を学ぶ。道に迷わないためにはコースを記した登山地図が必要である。

図 1. 2 はこの登山地図である。裾野あたりでは、静電気の性質を学ぶ。次に中腹に入り、磁気

的性質を学ぶ。山頂付近には難所が多いが、電気と磁気の相互作用を学ぶ。山頂に至る過程で、①～④で示している４つの方程式を手に入れる。この方程式の相互の関連を読み取ることによって、電磁気学の理論体系を理解することができる。また、山頂からは、マクスウェルの方程式から導かれる電波の世界を眺めることができる。

この登山地図は、山頂目指して本筋の一本道になっていて、少し寄り道をすると楽しめるところを素通りしている。これについては、第４章以降で取り上げている。なお、本書では、電磁気学の理解を難しくし、かつそこに立ち入ることによって本筋を見失って迷子になりやすい媒質内の電磁界の振る舞い、すなわち、誘電体・磁性体・導電体・抵抗体内の電磁気学を避け、主に、真空中（自由空間内）の電磁気学に焦点を絞っている。電磁気学理解の基礎として、第２章で電磁気学の屋台骨であるマクスウェルの方程式のエッセンスをまとめているが、これらマクスウェルの方程式が出来上がるまで、すなわち電磁気学の教科書的記述にはなっていない。電磁気学を幅広く学びなおす際には、本書をヒントにして、一般的な電磁気学の教科書を見てほしい。

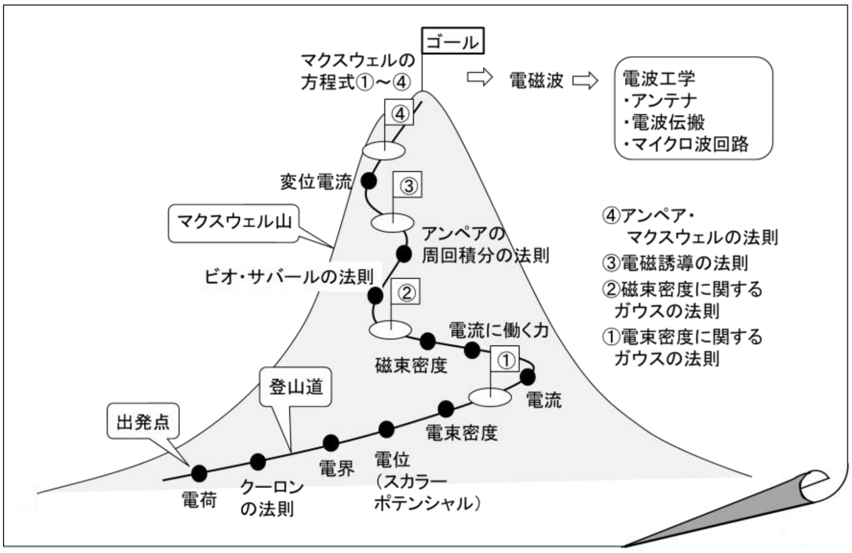

図 1.2　電磁気学習得の歩みをマクスウェル山登山に見立てた登山地図
（太字で囲った４つの法則（①～④）を表す連立方程式（マクスウェルの方程式）を手に入れる）

電磁気学の屋台骨 “**マクスウェルの方程式**”は以下の４つであり、電場（$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$）と磁場（$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$）の性質を定める４つの法則に基づいている。

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \text{（電磁誘導の法則）} \tag{1.6a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad \text{（アンペア・マクスウェルの法則）} \tag{1.6b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \qquad \text{（電束密度に関するガウスの法則）} \tag{1.6c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \text{（磁束密度に関するガウスの法則）} \qquad (1.6\mathrm{d})$$

重要なことは、この４つの連立方程式が力を合わせることによって、電磁現象として起こるおよそ全ての動作を説明できるようになったことである。

マクスウェルが電磁気学を打ち立てたのは１９世紀の後半（1873 年、電気磁気論として集大成した）である。２０世紀に入りアインシュタインがニュートン力学を書き換える相対性理論を発表している。相対性理論では、慣性系において光速一定の下、二つの定速移動する座標系がローレンツ変換で結ばれることを示した。ガリレイ変換に基礎を置くニュートン力学は、その時点で近似の理論となった。電磁気学が完成したころは、ニュートン力学が完全な理論とみられていて、力学の性質に微妙な違いが有った電磁気学は近似の理論とみなされていた。しかし相対性理論が出て、ニュートン力学が近似の理論となったとき、立場が逆転して、電磁気学は厳密な理論の地位を得た。電磁気学（マクスウェルの方程式((1.6)）には、相対性理論の規範であるローレンツ変換に対する共変性（法則を表す方程式の形が一定方向に定速で動く座標系（慣性系と呼ばれる）によって変わらない性質）が既に具備されていたのである。マクスウェルがそれを意識して式を作ったのではなく、法則を表した式がその性質を備えていたのである。故に、相対性理論が生まれて物理学に一大革命が起きたときでも、電磁気学は無傷でそれを乗り切ることができたのである。さらに言えば、電磁気学は、相対性理論の誕生に大いに貢献したとも言えるのである。この詳細を第６章にまとめている。

1.6　電磁気学創生のパイオニア

時代は１８世紀後半から、１９世紀後半へ掛けてのおよそ百年間（日本の江戸時代後期から幕末のころ）。最後に電磁気学を完成させたのはマクスウェルであるが、そこに至るまでには多くの先人の奮闘がある。ここでは、代表的な名前を挙げるにとどめるが、電磁気学の歴史に興味ある読者は、電磁気学の教科書として含蓄に富む太田先生の本[1]や伝記・科学史[2]～[8]に詳しく語られている。

<u>キャベンディッシュ</u>（Henry Cavendish, 1731-1810, イギリス）。化学者・物理学者。貴族の家の生まれ。電磁気現象を含む幅広い物理・化学実験を実験室で独自に行っていたが、寡黙で人間嫌いな性格であったことから、結果を発表することが少なく，多くの成果は実験ノートに眠っていた。マクスウェルが遺稿を調べた結果、クーロンの法則やオームの法則が、クーロンやオームより早く発見されていたことが分かった。（参考文献[2], [3]）

<u>クーロン</u>（Charles-Augustin de Coulomb、 1736-1806、フランス）。物理学者・土木技術者。1785 年、ねじり天秤を用いて帯電した物体間に働く力を測定し、クーロンの法則を発見した[4]。（歴史的には、電荷に働く力の関係（クーロンの法則）はキャベンディッシュの発見が先のため、クーロンによって再発見されたと言う位置付けになる）

<u>ガウス</u>（Johann Carl Friedrich Gauß、1777-1855、ドイツ）。数学者・天文学者・物理学者。数学界

の巨人として有名。電磁気学分野では、1835 年、クーロンの法則を一般化したガウスの法則を発見した。あらゆる電気現象に対する満足すべき理論を探求したが、天才ガウスをしても思うとおりの結果が得られず、その計画は途中で放棄された [5]。

オーム（Georg Simon Ohm、1789-1854、ドイツ）。高校教師を経て物理学者。ボルタが発明したボルタ電池について研究を行い、独自に試作した装置を用いて、1827 年、導体にかかる電位差とそこに流れる電流には正比例の関係があるというオームの法則を発見した[4]。クーロンの法則と同様、キャベンディッシュがこの法則を先に見つけていた（1781 年）ので、オームの法則はオームによる再発見と位置付けられる。

エルステッド（Hans Christian Ørsted、1777-1851、デンマーク）。物理学者、化学者。1820 年、講義中に実験器具をいじっていたエルステッドは、電池のスイッチを入れたり切ったりするとそばに置いた方位磁針が北でない方角を指すことに気づいた。その 3 カ月後、より集中的な研究を開始し、電流の流れる導線の周囲に円形の磁場が形成されるという発見を公表した。電流の磁気作用の発見についてはイタリアのジャン・ドメニコ・ロマニョージが 1802 年に発見したことがイタリアの新聞に報じられた。しかしロマニョージは科学者ではなかったため、その報道は科学界から見過ごされてしまったという経緯があるらしい[6]。

アンペア（アンペール）（André-Marie Ampère, 1775-1836、フランス）。物理学者、数学者。エルステッドは自分が発見した電流の磁気作用の現象について、充分な説明や数学的な解析を行わなかったが、彼の実験のレポートがアンペアの関心を引き、アンペアによる電流の磁気作用の理論（アンペアの力、アンペアの法則）へと進展した。

ファラデー（Michael Faraday、1791-1867、イギリス）。化学者・物理学者。ファラデーが製本屋の見習いから苦労して研究者になった経歴は良く知られている[2], [3]。数学を学ぶ機会が無かったファラデーは天性の洞察力を生かした実験を得意とし、その業績について、１９世紀にノーベル賞があったら 6 個は取れていたであろうとも言われている[3]。電磁気学の分野では、1831 年に電磁誘導の法則の発見をした。また、電気力線・磁力線と言った場の概念（近接作用）を提唱し、マクスウェルが完成させた電磁気学の基礎を築いた。電磁誘導に関しては、アメリカのジョセフ・ヘンリーが、1830 年、ファラデーより先に発見したが、発表が遅かったため、発見の功はファラデーのものとなっている。(余談:ファラデーは実験を好み、その記録を詳細に残していた。彼の人生最後の実験は、ナトリウムの気体から出る光に磁場をかけ、そのスペクトル変化の観察であった。結果、何も変化は現れず、失敗を記してノートを閉じた。それから 35 年後、ゼーマンがファラデーの失敗実験に再挑戦した。当時の最新装置を用いることによって、スペクトル幅が僅かに広がる現象を見出した。後にゼーマン効果と呼ばれ、ノーベル賞に輝いた。ゼーマンは、「あのファラデーが何かあると睨んで行ったことには、再挑戦してみる価値がある」と語ったと言う。）

マクスウェル（James Clerk Maxwell、1831-1879、イギリス）。理論物理学者。ファラデーによる電磁場理論をもとに、1864 年にマクスウェルの方程式を導いて電磁気学を確立した[7]（電気磁気論をまとめたのは 1873 年）。さらに、この方程式から電磁波の存在を理論的に予言し、その伝搬速度が光の速度と同じであること、および横波であることを示した。「栴檀は双葉より芳し」に例えられ、マクスウェルの神童ぶりを示すエピソードは多い[2], [3]。

ヘビサイド（ヘヴィサイド）（Oliver Heaviside、1850-1925、イギリス）。電気技師、物理学者、数学者。正規の大学教育を受けず研究機関にも所属せず、独学で研究を行った。「ヘビサイドの演算子法」といった物理数学の方法を開発するなど、大きな功績を残した。電磁気学では、難解で雑多なマクスウェルの２０の連立方程式を、今日電磁気学で学ぶ４つの方程式（式(1.6)）に整理した（1884 年）[2]。理論面でのマクスウェルの後継者と言われている。（第２章のティータイム欄参照）

ヘルツ（Heinrich Rudolf Hertz, 1857-1894、ドイツ）。物理学者。マックスウェルの電磁気理論をさらに明確化し発展させた。1888 年に電磁波の放射の存在を、それを生成・検出する装置の構築によって初めて実証した[2]。実験面・理論面でのマクスウェルの後継者として更なる活躍が期待されたが、36 歳の若さで亡くなり、電磁波の無線通信への応用はマルコーニに引き継がれることになった。

電波技術のパイオニア　ヘルツ以降、マルコーニやテスラ等、多くの研究者・技術者が電波工学の黎明期を牽引した。電波技術の研究開発の歴史については、文献[8]を挙げたい。

参考文献

[1] 太田浩一, 電磁気学の基礎 I, II, 東京大学出版会, 2012. （電磁気学の網羅的な歴史は、この教科書の中に多数のエピソードとして語られている）

[2] ナンシー・フォーブス, ベイジル・メイホン, (訳) 米沢富美子, 米沢恵美, 物理学を変えた二人の男, 岩波書店, 2016.

[3] 小山慶太, 光と電磁気, ファラデーとマクスウェルが考えたこと, ブルーバックス B-1982, 講談社, 2016.

[4] 三星孝輝, 原点でたどる電磁気学史, 太陽書房, 2018.

[5] E. T. ベル, (訳)田中勇, 銀林浩, 数学を作った人々(II：ガウスの項), 東京図書, 1962.

[6] Wikipedia, ハンス・クリスティアン・エルステッド.

[7] J. C. マックスウェル, (訳)井口和基, マックスウェルの電磁気学, 太陽書房, 2012.

[8] 徳丸仁, 電波技術への招待, ブルーバックス B-350, 講談社, 1978.

目次のページへ戻る