

第10章 ポインティングベクトル

～静かなところにもエネルギーの風が吹く～

電磁波の章（第4章）でも述べたように、電磁界のエネルギーの流れを示すものとして、 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ で表されるポインティングベクトル (Poynting vector) がある。電磁界解析の多くの場面に適用できて重宝なものであるが、その適用性に関してはまだ謎が多い。特に、静電磁界におけるポインティングベクトルが示すエネルギーの流れについては、感覚的に受け入れがたい描像が得られるので、教科書レベルでも様々な見解がある。この章では、静電磁界におけるポインティングベクトルの振る舞いについて、著者が抱く描像[1]を述べたいと思う。あくまで、仮定した条件の下での推論であるので正しさが実証されているわけではないが、既知の電磁現象に対して辻褄が合う説明ができる。読者の皆さんには、ここで述べる推論を一つの考え方と受け止め、さらなる深い議論への入り口としていただければ幸いである。 【注: 2024.12 に 10.7 節を追加】

10.1 電磁気学のパラドックス

図 10.1 を見てほしい。静電界と静磁界が直交して存在する電波環境である。例えば、平板コンデンサで作る電界の中に棒磁石を差し込んだとか、そんなイメージである。第4章でも述べたように、電磁波では、電界と磁界が作るポインティングベクトル $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ の方向に、光速で進むエネルギーの流れができ伝搬する。第9章で述べた同軸管内の直流電力伝送でも、 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ がエネルギーを運んでいる。では、図 10.1 に示すように静電界 \mathbf{E} と静磁界 \mathbf{H} が直交して存在する空間において、ベクトル $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ により、図の \mathbf{P} の向きにはエネルギーの流れができているのだろうか？これが問である。静電磁界は時間的に変化するものが何もないからそう呼ばれている。そんなところにエネルギーの風が吹くわけない、と思うだろう。だが、この章を読み終える頃には、きっと、このエネルギーの風の存在を受け入れてくれると信じる。

著者が研究者としてまだ駆け出しのころの 1984 年、信学会の会誌 6 月号に「電磁波工学におけるパラドックス～その思い違いを探る～」と題する解説記事が安達三郎先生によりまとめられている[2]。その中では、6つの項目が質問の形で提起され、それぞれについて解答が述べられているが、そのひとつに「静電界の中の磁石はポインティング電力を発生するか」がある。これはまさに、図 10.1 と同じ範疇の問である。

問いは以下である。「図 10.2 に示すように正電荷を帯びた磁石が有るとすると、電荷による静電界と磁石による静磁界によって作られるポインティングベクトルが図に示すようになり、磁石の周りをエネルギーが循環することになる。本当か?」。この問題を最初に提起したのはヘルツ (1890)と言われている。[2]でのこれに対する解答は、「この問題に解答を与えるのは簡単ではな

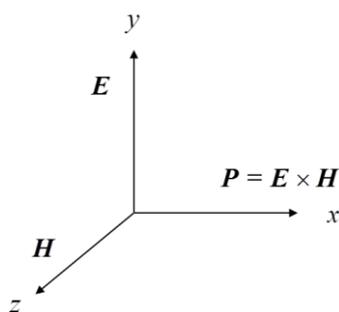


図 10.1 静電磁界中のポインティングベクトル \mathbf{P} はエネルギーの流れを表しているか？

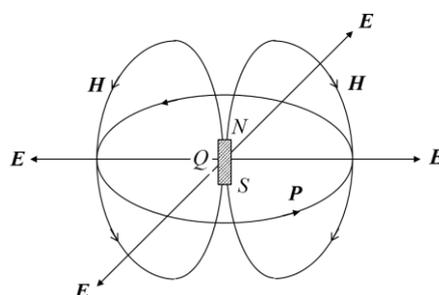


図 10.2 静電界と磁石によるポインティング電力の還流

いように思う」で始まり、三つの考え方（発生する・しない両面からの）がまとめられている。
 （問題提起は後藤尚久先生、解答担当は徳丸仁先生）

図 10.1 の直交静電磁界で考えてみよう。これについての答えは、組み合わせ的に

- ① エネルギーの流れを生む
- ② エネルギーの流れはできない
- ③ できる場合とできない場合がある

である。②は9章で述べた図 9.2 のケースで存在が示されているので×である。③の場合であれば、できる・できないの違いは、何の差でそうなるかが知りたいところになる。

著者が調べた電磁気学の教科書では、[3], [4]は③、[5], [6]は①と読める書き方になっている。[6]のファイマンの物理学 IV(§ 6.5)では、図 10.2 の問題そのものに言及がある。そこでは、「これ（＝エネルギーの還流があるということ）はばかげた話である」で始まっているが、普通の直感には正しくない（＝還流を認める）という論調であり、①に軍配を上げている。こういう両論があり、[2]では「この問題に解答を与えるのは簡単ではないように思う」のまとめになっているのだと推察される。その後の学会論文には、電磁界の運動量に着目し①の立場からの検討結果が発表されている[7], [8]。

著者にはこれらを裁くほどの力量は無いが、10.3 節以降で直感的な推論を行い、答えは①であろうとの確信のもと、この章を書いている。

10.2 ポインティングベクトルとは

はじめに、ポインティング (John Henry Poynting) がマクスウェルの方程式から導いたエネルギー保存則を示す[9]。マクスウェルの方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (10.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{i} \quad (10.1b)$$

の両辺にそれぞれ \mathbf{H} との内積、 \mathbf{E} との内積をとると

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (10.2a)$$

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} \quad (10.2b)$$

となる。ベクトルの公式

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$$

により、(10.2)式は以下のように整理できる。

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (10.3)$$

対象領域 V 、その表面を S として、積分形式に変換すると次式になる。

$$\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} dV = -\int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV \quad (10.4)$$

領域内に電荷も電流がない自由空間では次式になる。

$$\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) dV \quad (10.5)$$

上式は、領域内でのエネルギーの減少率は、表面の単位面積当たり $(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}$ の電力の流出となることを示している。空間 V に蓄えられた電磁エネルギーの時間変化量はその表面から出入りする $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ の面積分で与えられるということである。このベクトル $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ はポインティングベクトル (Poynting vector) と呼ばれ、本章では

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (10.6)$$

と置く。ベクトル \mathbf{P} の方向がエネルギーの動く方向、大きさ P が単位面を通過する電力である。

静電磁界の場合、上式は

$$\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \tag{10.7}$$

となる。確かに、閉曲面全体での出入りは無いが、面の部分部分では静電界 \mathbf{E} と静磁界 \mathbf{H} が共に存在し、それが同じ向きでなければ、エネルギーの流れができると考えても良さそうに見える。我々の感覚では、ばかげた話に思えるのにそういう結論になってしまうのが、パラドックスと言われる所以である。

電磁気学の教科書の古典 Stratton[9]を見てみよう。そこでは Poynting がマクスウェルの方程式から直接に導いた式を遵守する姿勢を読み取ることができ、非常に慎重な記述がなされている。(10.5)式までは、マクスウェルの方程式からの直接的な帰結なのでこれに問題はない。しかし、ここから、拡大解釈してゆくことに対して Stratton は慎重姿勢なのである。すなわち、(10.5)式は時間的に変化するエネルギーの全体としての出入りのみに適用できるのであって、面の特定の部分に着目することや、静電磁界への拡張は否定的な見解になっている。

10.3 静電磁界におけるポインティングベクトルの推論

10.3.1 対象環境と前提条件

議論を簡明にするため、自由空間に一様な静電界 \mathbf{E} と静磁界 \mathbf{H} が存在する場合を考える。電界 \mathbf{E} の向きを y 軸正方向にとり、磁界は yz 面の任意方向を向いているとする。この議論に際して、次の基本的な考え方（前提条件）を採用してみよう。

- ① 電磁界のふるまい（電磁現象）は電界と磁界によってのみ決まる
- ② 電界と磁界がそれぞれどのような仕組で生成されたかということ（原因）によらない
（要は、電界や磁界には生成原因が識別できる色がついていない。電界は電界、磁界は磁界、それ以上に違うところは何も無い。）

この前提条件が誤りであれば、以下の展開は無意味である。しかし、マクスウェルの方程式も、ローレンツ力を表す式も電界と磁界を含む式で表されていて、そこに、電界や磁界の違いについての使い分けは無いのであるから、この前提条件は、合理的であると確信する（注1）。

注1：1833年、ファラデーは、摩擦電気・ボルタ電池・電磁誘導起電力・電気魚（エイ、うなぎなど）といった種々の電源から得た電気の性質（磁気作用、熱作用、電気分解、火花放電など）を調べた結果「電源によらず、電気の性質はすべて同じである」と言う結論に達したそうである[小山慶太、科学史年表、中公新書、2003]。上記考え方はその延長線上にあるといえる。

10.3.2 静電磁界のポインティングベクトルとエネルギー流

図 10.3 に示すように、自由空間に静電界 \mathbf{E} (y 軸方向に正の値をもつ成分： E_y) と静磁界 \mathbf{H} (z 軸方向成分： H_z) が直交して存在するケースを考える。同図の閉領域空間は単位立方体で、この

静電磁界が立方体を含む十分広い空間に均一に存在しているとする。この単位立方体内のエネルギー、すなわち、エネルギー密度 u_{EM} [J/m³]は次式である。

$$u_{EM} = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E_y^2 + \mu_0 H_z^2) \tag{10.8}$$

この空間にもしエネルギーの流れがあるとすると、 x, y, z 面に対して $S_{x1}, S_{x2}, S_{y1}, S_{y2}, S_{z1}, S_{z2}$ の6つの面 (x 面に対する S_{x1}, S_{x2} のみ図中に表示) から法線方向に流出する単位時間当たり、単位面積あたりのエネルギー、すなわち電力密度 $P_{x1}, P_{x2}, P_{y1}, P_{y2}, P_{z1}, P_{z2}$ [W/m²]は、立方体内部にエネルギーの発散がないことと、その構造の対称性により

$$P_{x2} = -P_{x1}, \quad P_{y2} = -P_{y1}, \quad P_{z2} = -P_{z1} \tag{10.9}$$

となるであろう。この値が決まれば、エネルギーの移動方向と速度 v_{EM} [m/s]も定めることができる。

電磁波に代表される動電磁界では、単位面を通過する電力密度とその方向はポインティングベクトルで表され

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = E_y H_z \mathbf{i} \tag{10.10}$$

となる。ここで、 \mathbf{i} は x 軸方向を表す単位ベクトルである。本章の目的は、静電磁界においても(10.10)式が成立するかどうかを明らかにすることである。

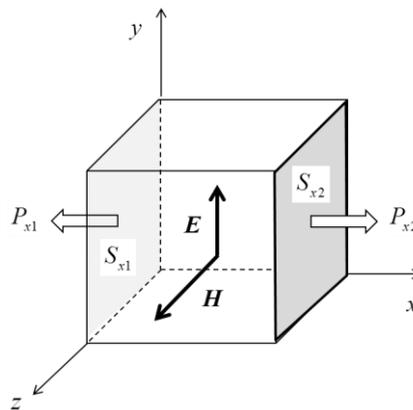


図 10.3 静電磁界におけるエネルギーフローの関係 (図では $S_{y1,2}, S_{z1,2}, P_{y1,2}, P_{z1,2}$ は省略しているが、 x 面の $S_{y1,2}, S_{x1,2}, P_{x1,2}$ と y, z 面について同じルールで)

以下、これを具体的に調べてみよう。前節で述べた前提条件に立てば、図 10.3 と同じ静電磁界が現れる具体的な環境を一つ見つけ、そこで、エネルギー移動の有無を調べれば、その結果を図 10.3 の環境にそのまま適用して良いと言う理屈が成り立つ。任意の静電磁界が存在する環境は無数にあるが、解析の容易さと直感的な分かりやすさと言う点において図 10.4 の平行平板伝送線路が良いであろう。

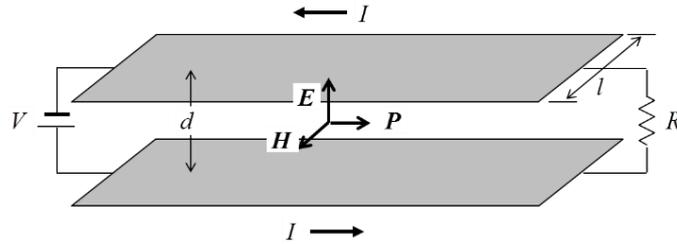


図 10.4 平行平板伝送線路による直流電力伝送回路と内部に存在する静電磁界環境

図 10.4 は幅 l 、間隔 d で $d \ll l$ の平行平板伝送線路を用いた直流電力伝送回路で、直流電圧 V 、負荷抵抗 R に対して、電流 I と負荷抵抗への供給電力 W は、次式である。

$$I = \frac{V}{R}, \quad W = VI = \frac{V^2}{R} \quad (10.11a,b)$$

伝送線路の単位長さあたりの自己インダクタンス L [H/m]、静電容量 C [F/m]、線路の特性インピーダンス R_0 [Ω] は、それぞれ、

$$L = \frac{\mu_0 d}{l}, \quad C = \frac{\epsilon_0 l}{d}, \quad R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{d}{l} Z_0 \quad \left(Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 [\Omega] \right) \quad (10.12a,b,c)$$

である。ここで、 Z_0 は自由空間の固有インピーダンスである。

この平板間の空間には直交静電磁界が存在しており、電界 E_y と磁界 H_z 、及び、その比で定義される電磁界の特性インピーダンス Z [Ω] の大きさは次式である。

$$E_y = \frac{V}{d}, \quad H_z = \frac{I}{l} = \frac{V}{Rl}, \quad Z = \sqrt{\frac{E_y}{H_z}} = \frac{Rl}{d} = \frac{R}{R_0} Z_0 \quad (10.13a,b,c)$$

これより、

$$E_y H_z l d = \frac{V^2}{R} = W \quad (10.14)$$

となる。この結果は、第9章でも述べたように、直流回路の電力伝送においては、電力は導線内を運ばれるのではなく、導線間の空間を電磁界が運ぶと言う解釈の根拠となっている。これより、(10.10)式で示した P_{x2}, P_{y2}, P_{z2} に関しては

$$P_{x2} \mathbf{j} = \mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad P_{y2} = P_{z2} = 0 \quad (10.15)$$

としてよいことが分かった。この結果は周知の事実である。しかし、ここでこれを持ち出したのは、先前提条件に立てば、この結果を汎用的な性質として用いて良いと言う論理を貫きたいためである。ここでは静電磁界に限定してはいるものの、そのときの $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は、環境がどのようなものでも同じ性質を示すはずという主張である。

ここで P_{x2} を P_{EM} と置きなおすと、 $P_{EM}=E_y H_z$ なので、 x 方向へのエネルギーの流れる速度は次式で算定される。

$$v_{EM} = \frac{P_{EM}}{u_{EM}} = \frac{2E_y H_z}{\epsilon_0 E_y^2 + \mu_0 H_z^2} = \frac{2c}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} \quad (c: \text{光速}) \quad (10.16)$$

図 10.4 の回路のパラメータで書き換えると

$$v_{EM} = \frac{2c}{\frac{R}{R_0} + \frac{R_0}{R}} \quad (10.17)$$

である。負荷抵抗が線路の特性インピーダンスに等しい整合負荷の場合にはエネルギーの移動速度は光速となり、不整合負荷では、光速よりは遅くなることを意味している。

以上をまとめると、電界と磁界が直交する静電磁界環境において、

- エネルギーの移動がある
- 単位面を通過する電力（すなわち電力密度）は $E_y H_z$ で与えられるポインティング電力である
- エネルギーの移動速度は式(10.16)で与えられ、 $R=R_0$ 、すなわち、 $Z=Z_0$ のとき光速になる

ここまでは、電界と磁界が直交する環境について述べた。直交しない環境については、図 10.4 のような解析のお手本になる環境がないが、電界と磁界を挟む角度を θ とするとき、以下のようになるだろうことは容易に推測できる。

$$P_{EM} = E_y H_z = |\mathbf{E}| |\mathbf{H}| \sin \theta \quad (10.18)$$

$$v_{EM} = \frac{2 \sin \theta}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c \quad \left(Z \equiv \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} \right) \quad (10.19)$$

以下、次節では、この非直交を場合も含めてこのような振る舞いする静電磁界のメカニズムを考えてみよう。

10.4 電磁エネルギー流動のメカニズム

10.4.1 電界と磁界が直交している場合

エネルギーの動きを表す式(10.16)～(10.19)から、どのような電磁界のメカニズムが見えてくるかを示したい。前節にならって、まずは直交する静電磁界について考える。唐突であるが、以下のような仮説を立ててみよう。番号は先の①、②に続けて、

- ③ 電界と磁界が直交し、その大きさの比率の絶対値 $|Z|$ が Z_0 であるものを基本成分とする。基本成分は2種類あり、 $Z=Z_0$ では、エネルギーは x 軸正方向に光速で動く。もう一つの基本成分は $Z=-Z_0$ で、エネルギーの移動方向は反対になる。ここでは、便宜上、前者を正の基本成分、後者を負の基本成分と呼ぶ。
- ④ 任意の直交電磁界は2つの基本成分（＝正負の基本成分）に分解でき、エネルギーの動きは、反対方向に動く二つの成分の合成である。

図 10.5 は直交静電磁界を正負の二つの基本成分(添字 1, 2 を付している)に分けたものである。二つの基本成分が生まれる環境の例として xz 面下部に電荷面密度 σ_1, σ_2 [C/m²]の無限大シートを置き、それぞれが x 軸の正負方向に光速で動いている様子を示している。二つの成分への分解には、電荷シートの移動の話を加えるのは余計なものであるが、エネルギーが光速で動くという理解には役立つのではと思つてのことである。

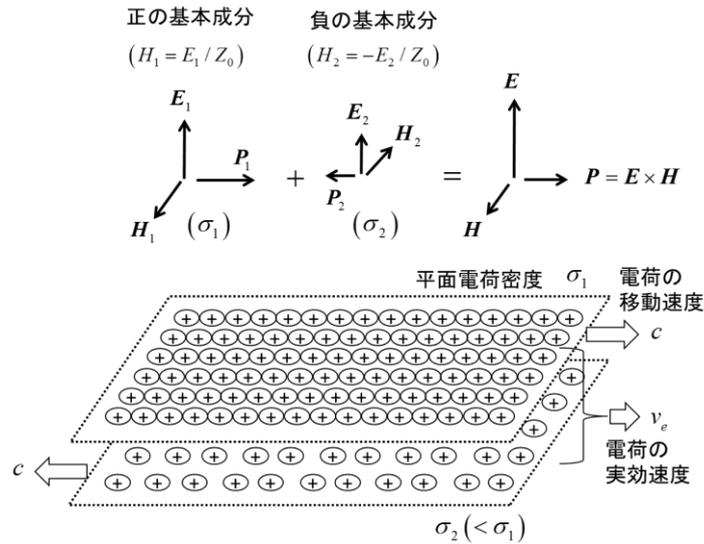


図 10.5 直交静電磁界の二つの基本成分への分解

二つの基本成分 E_1, H_1 と E_2, H_2 は

$$E = E_1 + E_2, \quad H = H_1 + H_2, \quad E_1 / H_1 = -E_2 / H_2 = Z_0 \tag{10.20a,b,c}$$

より、次式のように定まる。

$$E_1 = \frac{1}{2}(E + Z_0 H), \quad H_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{E}{Z_0} + H\right) \tag{10.21a, b}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}(E - Z_0 H), \quad H_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{E}{Z_0} - H\right) \tag{10.21c, d}$$

これより、両成分のエネルギーを求めて足し合わせると次式となって、辻褃が合う。

$$\begin{aligned} u_{EM,1} + u_{EM,2} &= \frac{\epsilon_0}{4} \left\{ (E + Z_0 H)^2 + (E - Z_0 H)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = u_{EM} \end{aligned} \quad (10.22)$$

同様に、単位面積を通過する電力（単位時間当たりのエネルギー）も2成分合わせて

$$\begin{aligned} P_{EM,1} + P_{EM,2} &= (u_{EM,1} - u_{EM,2})c \\ &= \frac{\epsilon_0}{4} \left\{ (E + Z_0 H)^2 - (E - Z_0 H)^2 \right\} c \\ &= \epsilon_0 Z_0 E H c = E H = P_{EM} \end{aligned} \quad (10.23)$$

となり、これも辻褃が合う。ゆえに、合成速度も

$$\begin{aligned} \frac{u_{EM,1} - u_{EM,2}}{u_{EM,1} + u_{EM,2}} c &= \frac{2EH}{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2} \\ &= \frac{2}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c = v_{EM} \end{aligned} \quad (10.24)$$

となり、(10.16)式の意味が説明できる。参考までに、電荷シートの実効速度は

$$v_e = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} c = \frac{H/c}{\epsilon_0 E} = \frac{Z_0}{Z} c \quad (10.25)$$

となる。

図 10.5 では、電荷密度 σ_2 を正の値で描いているので、この仕組みで実現できる環境は $Z \geq Z_0$ である。 $Z < Z_0$ については、電荷シートの動く方向を維持したまま σ_2 を負の値（ただし、 $|\sigma_2| < \sigma_1$ ）にすればよい。このようにしても、式(10.22)~(10.24)の最終辺に変わりが無く、上記の考え方は、 Z の値の全範囲で成立する。一方、式(10.25)のみ、 $v_e = (Z/Z_0)c$ に変わる。

以上により、電界と磁界が直交する場合、本節の最初に挙げた仮説③、④に不合理なことは見つからず、受け入れを拒む理由はない。

10.4.2 電界と磁界が非直交の場合

次に、電界と磁界が直交しない場合を見てみよう。その電磁界を以下のように表そう。

$$\mathbf{E} = E\mathbf{j}, \quad \mathbf{H} = H \sin \theta \mathbf{k} + H \cos \theta \mathbf{j}, \quad Z \equiv E/H \quad (10.26)$$

非直交の場合、正負の基本成分では表せない成分が必ず残り、上記の例では、直交成分から差し引いた $H \cos \theta \mathbf{j}$ がそれである。ここで、エネルギーの移動に関して、前節③、④の仮定に加えて、以下の仮定を加える。

⑤ 電界のみ、または磁界のみの環境ではエネルギーは静止している。

この環境でのエネルギー密度 $u_{EM,total}$ を、直交成分を $u_{EM,1}$ 、 $u_{EM,2}$ に分け、残りの成分を $u_{EM,0}$ とすると

$$u_{EM,total} = u_{EM,1} + u_{EM,2} + u_{EM,0} = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \quad (10.27)$$

である。エネルギーの移動速度 v_{EM} は③～⑤の仮定より、次式で算定できる。

$$\begin{aligned} v_{EM} &= \frac{u_{EM,1} - u_{EM,2}}{u_{EM,total}} c \\ &= \frac{\frac{1}{4} \epsilon_0 \left\{ (E + Z_0 H \sin \theta)^2 - (E - Z_0 H \sin \theta)^2 \right\}}{\frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)} c \\ &= \frac{2Z_0 E H \sin \theta}{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2} c \\ &= \frac{2 \sin \theta}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c \end{aligned} \quad (10.28)$$

これにより、(10.19)式が③～⑤の仕組みで得られていたことが分かる。また、単位面積を通過する電力 P_{EM} は次式となり、(10.18)式を説明づけることができる。

$$\begin{aligned} P_{EM} &= u_{EM,total} v_{EM} = (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \frac{\sin \theta}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c \\ &= EH \sin \theta = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| \end{aligned} \quad (10.29)$$

なお、非直交の電磁界を直交成分と残りの1成分に分ける方法は、上述のように電界の方向を基準として分ける仕方とは別に、磁界を基準にする方法もある。どちらの方法をとっても、式(10.28)、(10.29)の結果に変わりがないことが確認できる。

静電磁界のエネルギーの動きに関して、③～⑤の三つの仮説を立て、それに基づく推論を行った。その結果、考えられる動作に対して辻褃の合う説明ができ、この仮説は正しいものと確信している。繰り返しにはなるが、静電磁界が持つ性質は以下のようにまとめられる。

- i) $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$ の電磁界（電界のみ、磁界のみ、あるいは、両成分の向きが同じ）ではエネルギーは静止している
- ii) 電界と磁界が直交し、その大きさの比率の絶対値 $|Z|$ が Z_0 であるものを基本成分とする。基本成分は2種類あり、 $Z=Z_0$ （正の基本成分）では、エネルギーは $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 方向に光速で動く。もう一つの基本成分は $Z=-Z_0$ （負の基本成分）で、反対方向に光速で動く。
- iii) 電界と磁界が直交する電磁界は2つの基本成分（＝正負の基本成分）に分解される。この電磁界でのエネルギーの動きは、逆方向に光速で動く二つの成分の合成である。
- iv) 非直交電磁界（ $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$ を除く）は、正負の基本成分よりなる直交電磁界と、電界または磁界どちらか1成分のみの、計3成分よりなり、エネルギーの移動（方向と速度）は、それぞれの成分の移動の合成である。

10.5 交流信号に対する分布定数回路では

ここまで、静電磁界の性質として話を進めてきたが、電磁界の性質は、電界と磁界によって一意に決まると言う大前提に立てば、ポインティングベクトル $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ に限ってみても、上記の i)～iv) の性質は時間変動のある動電磁界に対しても、その時間の瞬間瞬間において同様に適用できると期待できるであろう。ここでは、交流伝送路から直流伝送路への連続的な接続という視点でポインティングベクトルの性質を見てみたい。

図 10.6 に示す無損失な平行平板伝送路を考える。伝送路の形は何でもよいのであるが、[図 10.4](#) で直流エネルギー伝送を説明したので、それに合わせているだけである。この伝送路では、交流信号に対して x の正方向へ進む進行波と負の方向に進む後進波があり、それぞれの電圧と電流を、 V_1, I_1 および V_2, I_2 、その合成したものを V, I とする。 x 軸の基準点 $x=0$ を、伝送線路の終端（＝実抵抗負荷 R がある場所）に置く。この回路の位置 x における電流と電圧を、時間変動 $e^{j\omega t}$ を除いた部分について表すと、

$$V_1(x) = V_{10} e^{-j\beta x}, \quad I_1(x) = \frac{V_1(x)}{R_0} = \frac{V_{10}}{R_0} e^{-j\beta x} \quad \left(\beta = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{2\pi f}{c}, V_{10} \equiv V_1(0) \right) \tag{10.30a,b}$$

$$V_2(x) = V_{20} e^{j\beta x}, \quad I_2(x) = \frac{V_2(x)}{R_0} = \frac{V_{20}}{R_0} e^{j\beta x} \quad (V_{20} \equiv V_2(0)) \tag{10.31a,b}$$

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) = V_{10} e^{-j\beta x} + V_{20} e^{j\beta x} \tag{10.32a}$$

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) = \frac{1}{R_0} (V_{10} e^{-j\beta x} - V_{20} e^{j\beta x}) \tag{10.32b}$$

線路の終端 $x=0$ での反射係数 Γ_0 は整合負荷 R_0 を用いて次式になる。

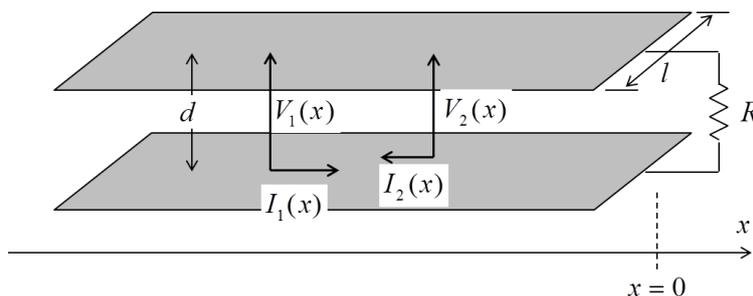


図 10.6 交流信号の分布定数回路での伝送 (V_1, I_1 : 進行波成分、 V_2, I_2 : 後進波成分)

$$\Gamma_0 \equiv \frac{V_{20}}{V_{10}} = \frac{R - R_0}{R + R_0} \tag{10.33}$$

この伝送路では、進行波成分(V_1, I_1)が、すなわちその周囲にできる電磁界(E_1, H_1)がエネルギーを x 軸の正方向に光速で運び、後進波成分(V_2, I_2)が、すなわちその周囲にできる電磁界(E_2, H_2)がエネルギーを負方向に光速で運ぶ。その大きさの比率は $1:\Gamma_0^2$ であるので、両方向を合わせたエネルギーの実効移動速度 v_{ave} は

$$v_{ave} = \frac{1 - \Gamma_0^2}{1 + \Gamma_0^2} c = \frac{2}{\frac{R}{R_0} + \frac{R_0}{R}} c \tag{10.34}$$

となる。(10.13c)式で示したように

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{Rl/d}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} = \frac{R}{R_0} \tag{10.35}$$

であるので、この速度は、

$$v_{ave} = \frac{2}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c = v_{EM} \tag{10.36}$$

となり、静電磁界で導いたエネルギーの移動速度 v_{EM} と一致している。これより、先の i)~iv)の続き番号として、以下のように整理できる。

- v) 直流伝送路の動作は、交流伝送路において省いていた時間変動も含めた $t=0, x=0$ の特性が、直流伝送路の入力側までの全空間・全時間に亘って、そのまま存在している
- vi) エネルギー移動の実効速度（交流信号の場合は進行波と後進波のエネルギーをまとめたもの）は、同じである

10.6 導波管内の電磁界とエネルギー伝送

電磁波伝送の例として導波管での伝送を取り上げる。前述の考え方を応用し、導波管内に生まれる電磁界を微視的に見る。そのことによってエネルギーの伝送速度が群速度になることを示す。

導波管伝送では、管内を壁面で反射しながら斜めに伝搬する平面波が導波管壁での境界条件を満たすよう角度を定めて定在波モードを作る(4.2節参照)。ここでは、図10.7に示す矩形導波管の中で最も基本であるTE₁₀モードに着目する(他のモードも式が複雑になるだけで適用性確認の目的では共通である)。TE₁₀モードの遮断波長は $\lambda_c=2a$ であり、これより高い周波数において、電磁界と群速度 v_g は以下の式で表される。

$$E_y(z, x) = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} z\right) e^{-jk_x x} \quad (10.37a)$$

$$H_z(z, x) = \frac{E_0 k_x}{Z_0 k} \sin\left(\frac{\pi}{a} z\right) e^{-jk_x x} \quad (10.37b)$$

$$H_x(z, x) = -j \frac{\pi E_0}{Z_0 k a} \cos\left(\frac{\pi}{a} z\right) e^{-jk_x x} \quad (10.37c)$$

$$\frac{k_x}{k} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} = \cos \theta \quad (\theta: \text{平面波の } x \text{ 軸方向に対する伝搬角度})$$

$$Z \equiv \frac{E_y}{H_z} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (H_x \text{ を除いている定義であることに注意}) \quad (10.37d)$$

$$v_g = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} c \quad (10.37e)$$

電磁界三成分の平均エネルギーの比率は次式である。

$$\epsilon_0 \langle |E_y|^2 \rangle : \mu_0 \langle |H_z|^2 \rangle : \mu_0 \langle |H_x|^2 \rangle = 1 : 1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 : \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 \quad (10.38)$$

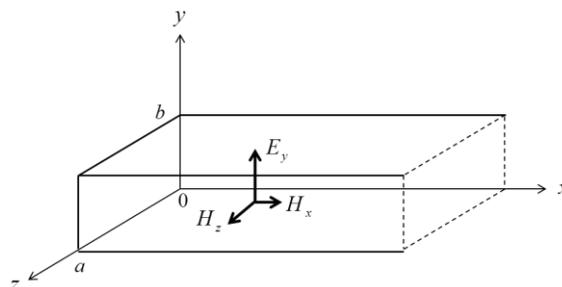


図10.7 矩形導波管 TE₁₀モードの伝送

ここからが本題である。導波管内の電磁界を微視的に見てみよう。 E_y と H_z の比は一定なので、この二つの成分で作る電磁界のエネルギーの伝送方向はポインティングベクトルが示す x 軸正方向であり、導波管内の場所によって電界と磁界の大きさは違うものの、その速度は一定で、(10.24)式より次式である。

$$v_{E_y+H_z} = \frac{2}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c = \frac{2\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}{2-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} c \quad (10.39)$$

これに H_x が加わることにより、エネルギーの瞬時的な意味での動く方向は z 軸成分が加わって微妙に揺れるが、 x 軸方向の速度には影響がない。ゆえに、 x 軸方向への速度は3成分のエネルギー比による加重平均をとると

$$v_{EM} = \frac{\epsilon_0 \langle |E_y|^2 \rangle + \mu_0 \langle |H_z|^2 \rangle}{\epsilon_0 \langle |E_y|^2 \rangle + \mu_0 \langle |H_z|^2 \rangle + \mu_0 \langle |H_x|^2 \rangle} v_{E_y+H_z} = \sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} c = v_g \quad (10.40)$$

となり、群速度と一致する。

10.7 動く観測者が見るエネルギー流動

物理法則は定速直線移動するいかなる系（慣性系）の中でも同じように成立しなければならない。この性質は共変性と言われ、第6章で述べたように、ローレンツ変換に対する共変性が相対性理論からの要請である。図10.8に示す静止する座標系 K と x 軸方向に一定速度 v で移動する座標系 K' の二つの慣性系を考える（相対的なことなので、静止と移動を区別することに意味がないが、説明の便宜上そのように呼ぶ）。ここでは最も簡単な例として、静止系 K の空間に y 軸方向を向く一様な静電界 E のみがある環境を考える。当然ながら、エネルギーも静止している。この環境を速度 v で動く K' 系に居る観測者の視点で見てみよう。観測者には、エネルギーが反対方向に速度 v で動くように見えるであろうか。いや、そうはならないのである。

K 系での電界を以下のように置く。

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{j} \quad (10.41)$$

このとき、空間に蓄えられているエネルギーの密度 $[J/m^3]$ は

$$u_0 = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \quad (10.42)$$

である。

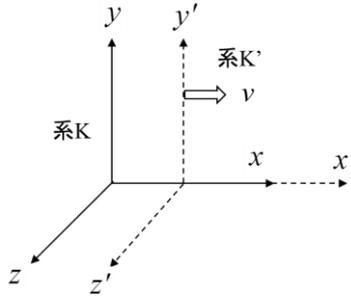


図 10.8 慣性座標系（静止系 K と移動系 K'）

K 系の電界 E_0 を K' 系でみると、その系での電磁界 E'_y, H'_z 、及びその比 Z' はローレンツ変換により次式になる ((6.10) 式より)。

$$E'_y = \gamma E_0 \tag{10.43a}$$

$$H'_z = -\gamma v \epsilon_0 E_0 \tag{10.43b}$$

$$Z' = \frac{E'_y}{H'_z} = -\frac{1}{v \epsilon_0} \rightarrow v = -\frac{1}{\epsilon_0 Z'} \tag{10.43c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (\text{ローレンツ因子})$$

K' 系でのポインティングベクトル \mathbf{P}' (そのスカラー値 P') とエネルギー密度 u' は次式である。

$$\mathbf{P}' = \mathbf{E}' \times \mathbf{H}' \tag{10.44a}$$

$$P' = E'_y H'_z = -\gamma^2 v \epsilon_0 E_0^2 = -2\gamma^2 v u_0 \tag{10.44b}$$

$$u' = \frac{\epsilon_0 E_y'^2}{2} + \frac{\mu_0 H_z'^2}{2} = \frac{\gamma^2 \epsilon_0 E_0^2}{2} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) u_0 = \frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} u_0 \tag{10.45}$$

K' 系に居る観測者には、エネルギーの動く速度 v'_{EM} は次式となる。

$$v'_{EM} = P' / u' = \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{-2c}{\frac{c}{v} + \frac{v}{c}} = \frac{2c}{\frac{Z'}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z'}} \tag{10.46}$$

(10.46)式最終辺より、 K' 系の観測者にとっても、エネルギーの流動速度に関する基本式((10.24)式)がそのまま通用していること、すなわち、電磁界のローレンツ変換に対する共変性が満たされていることが分かる。ところが、エネルギーの流動速度 v_{EM} そのものは、感覚的にそうなるだろうと思う v にはなっていない。 $v \rightarrow c$ の極限においては、光速 c に漸近するが、 $v \ll c$ では、観測者の移動速度の2倍になっている。静止しているものを速度 v で動く人が見ると、反対方向に速度 $2v$ で動いているように見えるのである。不思議に思わないだろうか。電磁界の共変性は(10.46)式で確認できているので、共変性の問題ではない。これは、次のように考えると良いであろう。

$v \ll c$ においては、 K' 系に生まれた磁界の強さは極めて微弱で(すなわち、 $Z' \gg Z_0$)、二つに分解した基本モードの E_1' と E_2' の大きさはかなり近いものになる。故にこの環境は x 軸の正負両方向に光速で動くほぼ同じ強度のエネルギーの合成速度になり、その結果が v_{EM} である。故に、この速度は、何か具体的な一つの実体が、まさにその速度で動いていると言うよりは、異なる動きをする複数のものを全体として見るとその速度になっていると言う意味での合成速度である。 $v \rightarrow c$ の極限においては、基本成分は一つだけになり、その場合は、基本成分の速度 c に漸近し、エネルギーが反対方向に同じ速度で動いているというように見えてくる。

10.8 電磁界の描像

電荷と電流を源とする電界と磁界がどのような関係で存在するかはマクスウェルの方程式が雄弁に語ってくれている。その電界と磁界が織り成すエネルギー流動や運動量についても、マクスウェルの方程式の中に包含されているはずであるが、それが陽に見えてこないところがあって、この部分に謎を残している。図 10.9 は本章で述べた電磁界のポインティングベクトルとエネルギー流動に関する推論の結果をまとめている。この図は、3次元の物理空間 (\mathbf{r}) と時間 (t) で定められる4次元空間に横たわる動電磁界 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ と、その微小領域である時空間の一点 (\mathbf{r}_0, t_0) での電磁界の関係を示している。この微小領域の電磁界は静電磁界を成すものである。静的な界といえば、すべてが凍り付いて時間的な動きがまったく無い世界と捉えたい。しかし、ここでの推論から、電磁界の全体を矛盾無く捉えるためには、その静的な界、すなわち、静電磁界の中に、エネルギーの光速移動が埋め込まれていて、それが、4次元空間全体に敷き詰められ動的な世界を形作っていると言う描像を得たのである。冒頭にも書いたように、この描像はあくまで筆者の推論であり、読者の皆さんのさらなる議論によって理解が深まることになれば幸いである。



ティータイム 本当はどうなの？

ポインティングベクトルの謎、どうでしたでしょうか？本書としては、静電磁界においてもポインティングベクトルで表されるとおりのエネルギー移動がある、その動く速さも見えた、を一応の結論としている。ただ、実験でその事実が確かめられるまでは、流動有無の論争は続くと思う。微弱のエネルギーの流動検出はその方法も含めてとても難しいように思われ、いつ決着がつくのかはわからない。

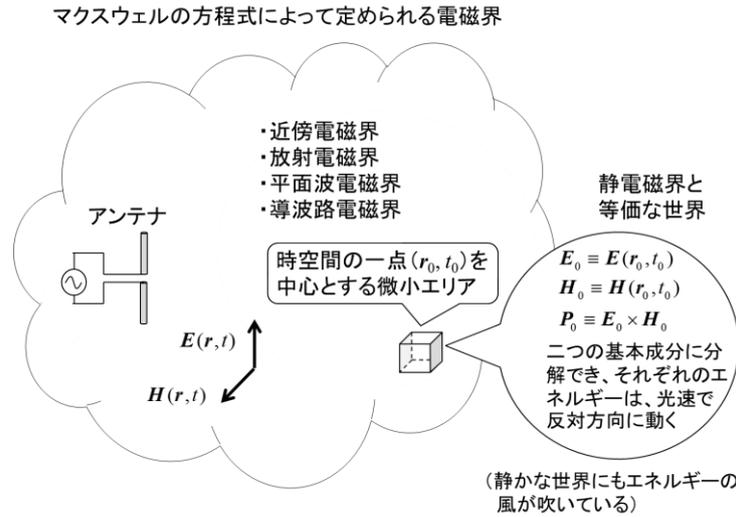


図 10.9 電磁界の描像 (エネルギー流動の種は静電磁界の中に埋め込まれている)

ファインマンの言葉で、「帯電した棒磁石の周りにエネルギーの還流が起きるのはばかげた話、しかし、そう思うその直観が正しくない」とのことであるが、やはり、なるほど、と納得するような理解がしたい。そこで、以下のような思考実験を試みよう。

図 10.2 の状態にある帯電した棒磁石の電荷を取り除くのである。取り除いた状態は電界がないので、エネルギーの還流は無くなる。この作業をするときに感じる力を見てみよう。電荷をピンセットでつまんで (ただし電荷が抜けてしまわないように絶縁に気を配って) 棒磁石と直角方向十分遠方まで、一定速度で動かしたと思ってほしい。感度が抜群でどんな小さな力も感じる事ができるとしよう。運び始めると、動く方向と直角に、すなわち棒磁石の周方向に力を感じるであろう。磁界中を電荷が動くときに生まれるローレンツ力である。軸からの距離 x と直交する力 F_ϕ の積はトルク (あるいはモーメント)、そのトルクを移動中の全時間に亘って積分すると

$$N = \int_0^\infty F_\phi x(t) dt$$

となる。この積分値は動かす速さによらず一定値になる。速く動かすと受ける力は強いが、時間は短い、遅くすると力は弱くなるが、持続する時間が長い。時間領域の積分値は変わらないということである。このように考えると、帯電した棒磁石には回転力が仕舞い込まれていたと理解できるであろう。棒磁石の周りにエネルギーの還流があるということは、電磁エネルギーによる角運動量があるということである。[5] (の 12.9 節) には、この角運動量と上式で示したトルクの総量が等しくなるということが示されている。図 10.2 において、「帯電した棒磁石の周りにはエネルギーの還流ができていないか？」の問いには、「yes」をここでの答えとしたい。

参考文献

- [1] 唐沢好男, “静電磁界中のポインティングベクトルについて,” 信学技報 AP2022-50, pp. 119-124, 2022.07, “同 [II],” 信学技報 AP2022-138, pp. 193-198, 2022.10.
- [2] 安達三郎, “電磁波工学におけるパラドックス: その思い違いを探る,” 信学誌, vol. 67, no. 6, pp. 657-662, 1984.
- [3] 砂川重信, *理論電磁気学* (第3版), 紀伊国屋書店, 1999.
- [4] 宇野亨, 白井宏, *電磁気学*, コロナ社, 2010.
- [5] 太田浩一, *電磁気学の基礎 II*, 東京大学出版会, 2012.
- [6] R.P.ファインマン, R.B.レイトン, M.L.サンズ: (戸田盛和 訳), *ファインマン物理学 IV; 電磁波と物性* (増補版), 岩波書店, 2002.
- [7] 細野俊夫, “Poyntingベクトル, 電磁モーメントおよびAbraham-Minkowski論争について,” 信学論(C), vol. J69-C, no. 9, pp. 1122-1133, 1986.
- [8] 中島将光, “電磁現象の新たな基本概念 (その2); ポインティングベクトルの解明とパラドックスの解消,” 電気学会電磁界理論研究会資料, EMT-91, no. 57-75, pp. 101-110, 1991.10.
- [9] J. A. Stratton, *Electromagnetic theory*, McGraw-Hill, 1941.

[目次のページへ戻る](#)

読者の皆さんへ

本内容を信学会通ソ・マガジンB-Plusに解説論文としてまとめています。

https://www.jstage.jst.go.jp/article/bplus/18/1/18_71/_pdf