第２章　マクスウェルの方程式

～４つの法則が織り成す電磁気学の不思議な世界～

電磁気学は電界と磁界の関係を定める４つの法則より成るマクスウェルの方程式で理論が組み立てられている。ゆえに電磁気学の授業はこのマクスウェルの方程式を学ぶことにあり、その学習過程はマクスウェル山の頂を目指す登山に例えられる。そのようにして学んだ後にも、多くの不思議やパラドックスが残るのが電磁気学の宿命である。本書はその謎解きを目的としているが、謎が謎として浮き上がるためには、そして、謎解きの醍醐味を味わうためには、電磁気学を一通り学んでいる（＝基本的なことは知っている）と言うことが前提になる。本書はそういう読者を対象としているが、そうは言っても、学びと謎解きを一緒にしたいと言う読者もいるであろう。そのため、この章で、マクスウェルの方程式が出来上がるまでを一通りまとめておきたいと考えたが、それをしようとすると、結局は電磁気学の教科書を仕上げることになってしまう。しかし、それは分量的に収まりきらないことであり、電磁気学の教科書としての良書も世にたくさんでていることでもあり、その部分は割愛することにした。そこで、本章では、電磁気学のエッセンスとして、マクスウェルの方程式そのものとその背景にある４つの法則に絞って簡潔にまとめている。本書で取り上げる「謎」の導入部にもなっている。

初期公開版に対して、§2.2, §２.5 等で記述強化を行っている（2025.05）

2.1　電磁気学の全貌

図 1.2 の登山地図に従って学ぶことにより、以下の４つの方程式を得ることができる。

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad\text{（電磁誘導の法則）}\tag{2.1a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\qquad\text{（アンペア・マクスウェルの法則）}\tag{2.1b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\qquad\text{（電束密度に関するガウスの法則）}\tag{2.1c}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\qquad\text{（磁束密度に関すガウスの法則）}\tag{2.1d}$$

上記の表記は微分形であり、積分形の表記では

$$\oint_{c}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\int_{S}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\,dS\tag{2.2a}$$

$$\oint_{c}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{S}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}\,dS+\int_{S}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\,dS\tag{2.2b}$$

$$\int_S \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \rho dV \tag{2.2c}$$

$$\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = 0 \tag{2.2d}$$

この４つの方程式が**マクスェルの方程式**と呼ばれ、電磁気学理論の屋台骨である。電磁気学学習の最初に出てくる(2.1c)式は電束密度に関するガウスの法則。電荷は電束の出発点である、と言う意味である。電束は正の電荷で始まり負の電荷で終わるとも読めるが、常に電束の始まりが電荷であると言う意味ではない。電荷のあるところの周囲には必ず電束密度や電界があることは事実である。しかし、動電磁界においては渦状の電界や電束密度が存在するので、出発点に電荷を持たない電束もある。(2.1d)式は磁束密度に関するガウスの法則。磁束には出発点、すなわち、単極磁荷（磁気モノポール）がないことを意味している。磁束自体は存在するので、結局のところ、出発点も終点もない、すなわち、循環している（＝ループになっている）と言うことである。(2.1a)式はファラデーが見つけた電磁誘導の法則。磁界が電界を生み出す現象である。(2.1b)式は、アンペアが見出した電流と磁界の関係（アンペアの法則）に、マクスウェルが別の形の電流、すなわち、変位電流を組み入れたアンペア・マクスウェルの法則である。電流や時間変化する電界が磁界を生み出す関係式である。電磁誘導と変位電流の相互作用で、電荷や電流が無いところにおいても電界と磁界の存在、すなわち、電磁波の存在を予言するものになっている。

重要なことは、この４つの連立方程式が力を合わせることによって、電磁現象として起こる動作を説明できるようになったことである。ただし、なぜ（why）ではなく、どのように（how）の意味である。一つ一つの法則に対してなぜそれが起きるのか、その法則は本当に正しいのかと言うことに関しては、それを言える人は誰もいない。マクスウェルだって、アインシュタインだって誰だってでもある。しかしそれに普遍性があると確信して受け入れ、それを土台にして作り上げられた理論から導かれることに対しては、その仕組み（How）の説明が付くのである。第４章で詳しく述べる電磁波は、まさにそのようなものである。

電磁気学はマクスウェルによって完成に至り、学術論文として 1865 年に発表されたが、非常に複雑な連立方程式群であったらしい。これを、上記４つの方程式に整理したのはイギリスのヘビサイドであり、そのおかげで、今日、我々が学ぶのに非常にすっきりした形になっている（ドイツのヘルツも、独立に同様の整理を行っている。章末のティータイム欄参照）。

マクスウェルの方程式は、電磁界 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}$ とそれを生み出す電荷密度ρと電流密度 $\boldsymbol{i}$ の関係を与えている。また、連立方程式を解くためには、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ の関係を与える以下の式（**構成関係式**と呼ばれる）も必要である。

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\ \ \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \quad （真空中では\ \varepsilon=\varepsilon_0,\ \mu=\mu_0） \tag{2.3a,b}$$

マクスウェルの方程式を電界 $\boldsymbol{E}$ と電束密度 $\boldsymbol{B}$ の関係に整理すると、

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.4a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2.4b}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{i} + \varepsilon\mu \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2.4c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.4d}$$

となる。このように見ると、マクスウェルの方程式は、電界と磁束密度のそれぞれについて、発散と回転の性質を表すものであると読み取れる。

時間的に変動が無い静電磁場では時間微分の項が消え次式になる。

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{0} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \text{静電界に関する性質} \tag{2.5a,b}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{B} &= \mu \boldsymbol{i} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{静磁界に関する性質} \tag{2.5c,d}$$

上式より、時間的に変動が無い静電磁場においては、静電界は発散があって回転が無いベクトル場、静磁界は発散が無くて回転あるベクトル場と捉えられ、両者は独立である。(2.5b)式の静電界の性質からは、2.3 節で述べるクーロンの法則（二つの電荷に働く力は距離の二乗に逆比例する）が導かれる。(2.5c)式の静磁界の性質からは、2.6.1 項で述べるビオ・サバールの法則が導かれる。

一方、電荷や電流が無い状態での動電磁界（自由空間）では

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \text{自由空間における動電磁界の性質} \tag{2.6a,b}$$

となって、電界と磁界が相互に作用して持続する電磁波が生まれる構造を持つ。電磁波の詳細は第４章で学ぶが、不思議な性質を一つ述べる。(2.6)式の連立方程式を解くと、様々な電磁波の姿が浮かび上がるが、その一つに、波面が平面になって、一定方向に減衰せずに進む波がある。平面波である。この平面波は速度は $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ （すなわち光速 c）となる性質が導かれる。その空間に存在する平面波の速度は全て光速であって、それ以外を許さないと言う性質である。地上で平面波を見ている人がいて、その平面波は向こうから速度 v で向かって来る電車の中を通り抜けてゆくとする。地上の人も電車の中の人も自分が見た平面波の速度は c だと言う。ニュートンは言うだろう。「地上で速度 c なら、電車の中に人が見る速度は c+v では？もし、同じだと言うなら、電磁気学は近似理論に違いない」と。その近似の汚名を払ってくれたのはアインシュタインであるが、続きは第６章を見てほしい。

(2. 1)式より分かるように、ヘビサイドによって整理された方程式は、電界と磁界の関係（＝場の関係）を表す式である。一方、電磁気学は電荷や磁石に働く力学、すなわち、電磁力学として構築されてきた歴史的経緯の中にあって、力の働きが見えなくなっている。そこで、電荷 q に働く力と場 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ の関係を表す方程式、ローレンツ力の式

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{2.7}$$

も加えておきたい。右辺第１項は電荷が電界から受けるクーロン力、第２項は磁界中を速度 $\boldsymbol{v}$ で動くときに受ける力（アンペアの力）であり、その合力を**ローレンツ力**と言う（第２項をローレンツ力という場合もある)。

ここに挙げている４つの方程式(2.1a~d)とローレンツ力の式(2.7)は、空間と時間よりなる４次元世界で例外なく成立する。さらに、相対性理論が要請する慣性座標系でのローレンツ変換に対する共変性（定速直線移動する座標系（慣性系）では、同じ式で法則が成立する）も満たしている（詳細は第６章で）。ゆえに、この５つの式は、物理の真実を表していると認められている（＝証明されているわけではない）。

2.2　電界と磁界

2.2.1　電磁気学の基本物理量：$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$

電磁気学は、電荷が荷電粒子として存在すると言うというところからスタートする。点電荷の概念である。荷電粒子はすなわち電子（や電子が飛び出した後の原子）のことであり、量子力学が教えるとおり、電子は波のように、あるいは雲のように漠然としていて、存在位置は確率的にしか捕らえられない。しかし、これを少し離れたところから見れば、荷電粒子が特定の一点にあるように見える。電磁気学では、その荷電粒子から生み出される電磁現象が扱われる。

電子のもつ負の電荷の絶対値 e は電荷の最小単位で**電気素量**と呼ばれ、その値は 1.602 176 634×10^{-19} [C]（国際単位系（SI）での定義値（＝数値固定））である。金属などの物質は原子や分子の結合状態によって、その中の電子が自由に動き回ることができ、これが負の電荷を持つ荷電粒子（自由電子）である。電子が飛び出した後の原子や分子は正の電荷を持つ荷電粒子として振舞う。この電荷には、「発生や消滅は、必ず正・負等量の電荷で起こり、正あるいは負の電荷が単独で発生したり消滅したりすることは無い」、すなわち、「閉じられた系における総電荷量は常に一定である」という**電荷保存則**が成り立つ。

電界と磁界は電磁気学の主役である。ただし、電界＝電気的性質を持つ場、磁界＝磁気的性質を持つ場、の意味である。具体的な場としては、前者には電界($\boldsymbol{E}$)と電束密度($\boldsymbol{D}$)が、後者には磁束密度($\boldsymbol{B}$)と磁界($\boldsymbol{H}$)がある。この整理でも分かるように、磁界には、磁束密度を含めて広い意味での磁場として使う場合と、磁界($\boldsymbol{H}$)に限定するかで混乱が生じ、使い方に注意が必要である。この節では、「磁界」を広い意味に用い、磁束密度もふくめてそのように呼ぶことにする。以下は $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ を用いて話を進める。

電界と磁界を、電荷 q に力の作用をもたらす場という視点で見てみよう。式(2.7)で表されるロ

ーレンツ力の右辺第１項を電気力、第２項を磁気力として、それぞれを $\boldsymbol{F}_e, \boldsymbol{F}_m$ で表すと

$$\boldsymbol{F}_e = q\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{2.8a,b}$$

である。電界は電荷そのものに力をもたらす場、磁界は動く電荷に力をもたらす場と理解できる。歴史的には、磁界は電流に対する力（アンペアの力）の源として認識されるものであるが、電荷を共通にしてみるのが分かりやすいと思う。

動く電荷から見ると、力は電界も磁界も区別がつかない電磁場 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ から受けていると感じるであろう。電荷が受ける力のもとを電界とすると、等価的な意味で $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ も電界であるということになる。ある電磁力学現象を観測している二人がいて、一人は静止、もう一人は一定方向に動いているとしよう（地上にいる人と電車に乗っている人のような関係）。二人にとって、式(2.8)式の速度 $\boldsymbol{v}$ は異なるものとなり、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ の関係が異なったものになるであろう。その場合、起きている現象は同じものであるのに、動く観測者（＝異なる慣性系にいる観測者）には電磁界の景色（＝電界と磁界の関係）が違ってくること意味し、このことは第６章の相対論と電磁気学との関係で学ぶ。

2.2.2　*E-H* 対応と *E-B* 対応

電気の場（フィールド）を表す物理量に電界 $\boldsymbol{E}$ と電束密度 $\boldsymbol{D}$ があり、磁気の場では磁界 $\boldsymbol{H}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ がある。電気と磁気にはかなりの部分で対称性があり、それらを表す物理量には対応関係がある。電気の場を表す電界に対して、磁気の場に対応するものを磁界であるとするのが *E-H* 対応、磁束密度であるとするのが *E-B* 対応である。どちらを対応を採るかによって、電磁気学授業への入り方も異なってくる。どちらが正しいかということではなく、電磁界をどう見るかという問題になる。

用語を見れば、電界（$\boldsymbol{E}$）と磁界（$\boldsymbol{H}$）、電束密度（$\boldsymbol{D}$）と磁束密度（$\boldsymbol{B}$）であるのだから $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{B}$ が対応していると考えるのが当たり前そう。しかしことはそれほど単純ではない。理由は以下の点にある。

① 電気は単極電荷があるのに対して、磁気には単極磁荷がなく、この部分が非対称である
② 電場は電荷から、磁場は（磁荷ではなく）電流から生まれると言う物理的な発生原因に違いがある
③ 誘電体内の電場の性質（電気分極）については、電束密度を基準にして誘電体内の電界の違いが述べられ、磁性体内の磁場の性質（磁荷）については、磁界を基準にして磁性体内の磁束密度の違いが述べられる。
④ 電気の研究は摩擦電気から、磁気の研究は永久磁石から始まり、後者の方が歴史が古く、現在の電磁気学が更地に構築されたわけではない（電磁界の名前の付け方に歴史上の事情がある）

なお、文献[1]では、広い視点でこの議論が行われており、深いことはそこで学んでほしい。以下、簡単にこの対応関係の違いを見てみよう。

（１）電場は電荷から、磁場は磁荷から（*E*-*H* 対応）

電荷 Q による電界を $\boldsymbol{E}$、磁荷 Q_m による磁界を $\boldsymbol{H}$、距離方向の単位ベクトルを $\hat{\boldsymbol{r}}$ とすると、

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, \quad \boldsymbol{H} = \frac{Q_m}{4\pi\mu_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

であり、この電磁界の中に電荷 q、磁荷 q_m が置かれると、夫々に働く力 $\boldsymbol{F}_e, \boldsymbol{F}_m$ は

$$\boldsymbol{F}_e = q\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{F}_m = q_m\boldsymbol{H}$$

となる。*E*-*H* 対応で、電界と磁界がきれいな対称性をもつ。難点は、単独磁荷（Q_m, q_m）が存在しないと言うことにある。

（２）電場は電荷から、磁場は電流から（*E*-*B* 対応）

磁場の捉え方が（１）と異なる。z 軸方向に無限に長い直線状導線に流れる電流 I_0 によって生まれる磁気的な場を $\boldsymbol{B}$（磁束密度）、距離 r 離れて I_0 と平行に流れる電流 I の長さ l 当たりに働く力を $\boldsymbol{F}_m$ とすると、

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \boldsymbol{F}_m = -BIl\hat{\boldsymbol{r}}$$

である。電流は電荷の移動を意味するので、速度 $\boldsymbol{v}$ で動く電荷 q に対する力は、以下の一般式で表される。

$$\boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

このように、電場の発生原因を電荷、磁場の発生原因が電流であるとするのが *E*-*B* 対応である。

（３）媒質（誘電体・磁性体）内での電磁界（対応は見方によって様々）

真空中の電磁気現象については、$\boldsymbol{E}$ か $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$ か $\boldsymbol{B}$ のどちらかだけで議論ができる（もう一方は、ε_0, μ_0 で結び付けられる）。二つの量の違いを意識しなくてはいけなくなるのは、誘電体や磁性体での電磁気現象を扱うときになる。媒質として、$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$ に対しては誘電体を、$\boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}$ に対しては磁性体を考え、図 2.1 のような 2 層媒質での境界条件を見てみよう。

マックスウェル方程式の $\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0$（誘電体内では$\rho$=0），$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ より、$\boldsymbol{D}$ も $\boldsymbol{B}$ も面と垂直方向（単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ 方向）の成分は等しい（電束も磁束も特性が異なる媒質（誘電体、磁性体）の境界の法線方向を連続的に貫いて行くイメージ）。同様に、$\nabla\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$（静電界）、$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$（静磁界で、かつ、磁性体内での伝導電流無し）より、面の接線成分方向（単位接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ 方向）の成分は等しい。この結果、角度θ_1 とθ_2 の関係も自動的に定まる。これらは、以下の電気・磁気間対応になる。

$$\boldsymbol{D}_1\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{D}_2\cdot\boldsymbol{n} \leftrightarrow \boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{B}_2\cdot\boldsymbol{n}$$

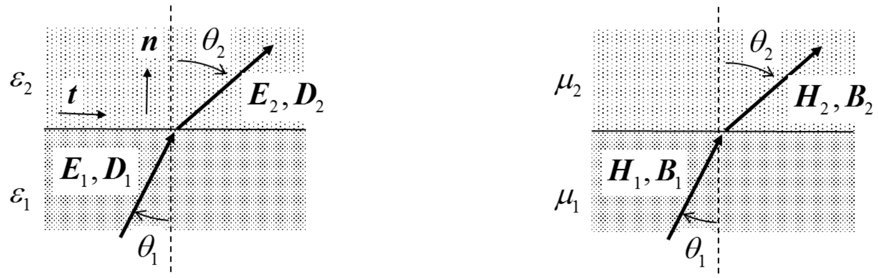
$$\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{t} = \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{t} \leftrightarrow \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{t} = \boldsymbol{H}_2 \cdot \boldsymbol{t}$$

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \leftrightarrow \frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

均一媒質内の $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ の対応については、電気の分極ベクトル $\boldsymbol{P}$、磁気の分極ベクトル（磁化ベクトル）$\boldsymbol{P}_m$ を用いて、以下のように表せる。

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon \boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{P}_m = \mu \boldsymbol{H}$$

これらのことより、媒質内の電界・磁界の振る舞いでは、$\boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D} \leftrightarrow \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{P} \leftrightarrow \boldsymbol{P}_m$, $\varepsilon \leftrightarrow \mu$ となり、*E*-*H* 対応での対称性がはっきりしている。



(a) 静電界　　　　　　(b) 静磁界

図 2.1　2 層媒質中の電磁界

別の視点から見てみよう。平行平板コンデンサがあり、両極板に正負等量の電荷が帯電している。この時の電界を $\boldsymbol{E}_0$, 電束密度を $\boldsymbol{D}_0$ とすると、$\boldsymbol{D}_0 = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0$ である。帯電した平板コンデンサ中に誘電体を充てんしたときには、誘電体内で電気分極が起きる。誘電体内では $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$（$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$）であり、$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_0$ として、E が誘電体の比誘電率 ε_r によって変わる。一方、励磁電流 I が流れるソレノイド（単位長さ当たりの巻き数 n）内の磁場を見てみよう。ソレノイド内が真空のとき、磁界 H_0 は $H_0 = nI$、磁束密度 B_0 は $B_0 = \mu_0 H_0$ である。ソレノイドの中に磁性体を充てんすると磁性体の磁化により磁場が変化する。この時のソレノイド内部の磁場を H, B とすると、$B=\mu H$（$\mu=\mu_r\mu_0$）である。この場合、$H=H_0$ として、B が磁性体の比透磁率 μ_r によって変わる。この場合は、媒質によって変わらないものが D と H、変わるものが E と B になり、*E*-*B* 対応になる。

このように媒質内の電磁界では、何に着目するかで対応が変わっており、どちらか一方には決めにくい。

（４）電磁波（*E*-*H* 対応）

第４章で詳しく述べるように、電磁波解析では、マクスウェルの方程式の以下の形から出発することが多い。

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},\qquad \nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

この連立方程式から電界と磁界を解いてゆくと､電界と磁界で対称性の良い式表現が得られる。

（５）単位を見る（対応はどちらともいえない）

電磁気学に現われる物理量のうち、$E, D, H, B, Q, Q_m, \varepsilon, \mu, R$（抵抗、インピーダンス）の組立単位は第１章の表 1.1 に与えられている。その単位[ ]でみると、次の関係がある。

$$\left[\frac{E}{H}\right]=\left[\frac{B}{D}\right]=\left[\frac{Q_m}{Q}\right]=\left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\right]=[R]=[2,1,-3,-2]$$

上式の最初の２辺の等式を分子・分母の対応関係で見るか、分子同士・分母同士の関係で見るかにより、*E-H, B-D* 対応ともいえるし、*E-B, H-D* 対応ともいえ、ここからは、目的の答えは見えてこない。

（６）教科書等では

では、大学等の授業（あるいは教科書）では電磁気学はどう教えられているのであろうか。図 2.2 は一般的な教科書の進み方を図にしたもので、この形（①から順番での）での授業が主流であろう。（図 2.2 は、電磁気学授業のうちの静電界と静磁界の部分で、かつ、本資料では ***E*,*D*,*H*,*B*** に絞って議論しており、その他の大事な法則（ガウスの法則、電荷保存則、アンペアの周回積分の法則）や物理量（スカラーポテンシャル、ベクトルポテンシャルなど）は省いている）。

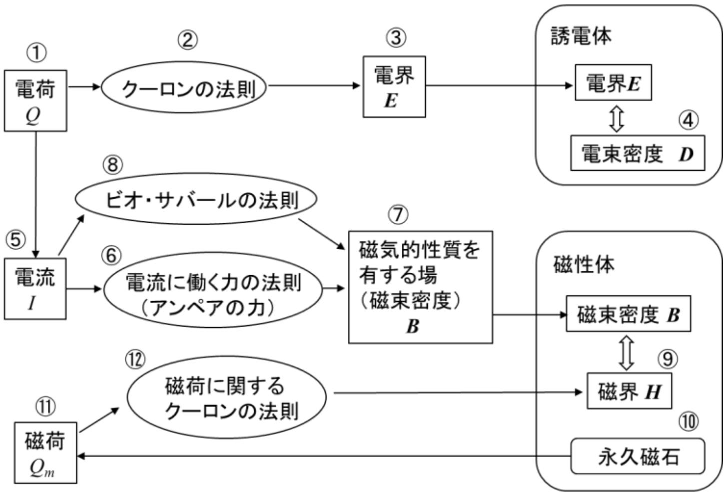


図 2.2　一般的な教科書に見る電界・磁界諸量の位置づけ（数値は現われる順番）

結局は、仮想的なものとは言え、磁荷を丁寧に説明して磁界（***H***）の説明の出発点とするか、磁荷は実態が無いものとしてほとんど素通りにするかで、***E***,***D***,***H***,***B*** の関係の説明のしかたが分かれる（前者が ***E-H*** 対応、後者が ***E-B*** 対応）。電磁気学の授業において、どちらの立場を取るか、凡そ半々と言われているが、どうであろうか。いずれにしても、どちらが正しいかとか、どちらかに決めなくてはいけない、と言う問題ではなく、考え方が整理できていれば、それでよい。

ティータイム　　　電磁気学は砂上の楼閣？

中学校の理科では、陽子や中性子よりなる原子核の周りを電子が回転していると言う「素朴な原子モデル」を習う。長岡半太郎が 1903 年にアイデアとして唱え、イギリスのラザフォードが 1911 年、アルファ線の散乱実験から導き出した原子モデルである。太陽（＝重い陽子）の周りを回る地球（＝軽い電子）のイメージである。電気引力（クーロン力）と遠心力が等しくなる半径で円運動が持続できる。ところが、マクスウェルの方程式では、荷電粒子が円運動のような加速度運動をするとそこから電磁波が放射され、エネルギーを失った電子はやがて陽子に衝突し消滅してしまう。衝突するまでの時間を計算してみると 10^{-11} 秒程度になる。なんと、電子の寿命は一瞬。そんな電子がもつ電気量（電荷）を理論の出発点におく電磁気学は、砂上に楼閣を建てているようなものでは？という心配である。

この窮地を救ったのが、デンマークのボーアである。師と仰ぐラザフォードの原子モデルには何か安定する仕組みがあるはずと確信していたボーアは、思索の果てにある仮説にたどり着いた。1913 年のことである。その仮説とは、「電子の角運動量の大きさがちょうど定数 $\hbar$（プランク定数 h を 2πで割ったもの；エイチバー）の整数倍のときだけ、電子は安定した軌道を保っていられる」である。（この発想に至るボーアの思考遍歴は[2]で詳しく語られていて興味深い）。当時としては突拍子も無い仮説であったが、後に量子力学の基盤を確たるものにしたシュレーディンガーの波動方程式（1926 年）から導かれる結果と一致するのである。すなわち、ボーアの仮説は、量子力学的に正しかったのである。波動方程式からの解釈では、電子を波動（量子）と見るとき、周方向 1 周分に対して定在波の状態になっていて、この定在波状態が維持できる波動のみが安定に存在できる、ということである。素朴な電子モデル自体に問題があったと言うことになり、量子力学が電磁気学の土台（＝安定した電子の存在）を支えてくれていたのである。

2.3　電束密度に関するガウスの法則：$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$

式(2.1c)を、真空中における電界についてのガウスの法則として表すと次式である。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.9}$$

これを、積分形式で表すと次式になる。

$$\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_{\mathrm{V}} \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV \left(= \frac{Q}{\varepsilon_0} \right) \qquad (Q \text{ は領域 V 内の電荷の総量}) \tag{2.10}$$

先にも書いたように、(2.9)式の微分方程式は、時空の４次元（空間の３次元を $\boldsymbol{r}$、時間を t で表す）での $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)$, $\rho(\boldsymbol{r},t)$に対して成立する（として、それを破るようなことはこれまで起きていない）。しかし、物理空間では領域内部の変動は、その影響が境界面 S に届くまでには光速とは言え時間がかかるのであるから、積分形式の(2.10)式は、少なくとも表面への到達時間が無視できる条件で成り立つと理解してほしい。以下では、(2.10)式が成立するとして考える。

点電荷 Q が原点にある場合を考えてみよう（ケース１）。(2.10)式より電界 $\boldsymbol{E}$ は球座標の径方向に成分 E_r を持ち、「半径 r の球の表面から外に向かう電界の総量($4\pi r E_r$) = 球内部の電荷量(Q)/誘電率(ε_0)」より次式で求められる。

$$\rho = \delta(\boldsymbol{r})Q \quad \rightarrow \quad E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \text{(Case 1)} \tag{2.11}$$

となり、電界の強度は距離の２乗に反比例する。**クーロンの法則**（電荷 Q と q に働く力）

$$F = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = E_r q$$

から導かれる結果を与える。

次に、電荷 Q が半径 a の球の表面上に均等に分布する場合を考えてみよう（ケース２）。この場合も、電界は容易に解けて次式となる。

$$E_r = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r \geq a) \\ 0 & (r < 0) \end{cases} \qquad \text{(Case 2)} \tag{2.12}$$

これより、球の外では、電荷 Q を原点においたケース１と同じになり、球内では電界が存在しないと言うことが分かる。

この例以外にも、電荷の分布が点や線に対して対称構造であれば、電界の分布を簡易に求めることができる。ガウスの法則は、任意の閉曲面 S に対して成立するということが驚くべき特徴なのであるが、上記例のように対称構造の場合には簡易な計算で電界が求められるメリットが大きい。実際、ケース２について、ケース１の式（すなわちクーロンの法則）を用いて、面積分により求めれば、当然、同じ結果になるが、その手間は結構大変である（そういう煩雑な積分計算が電磁気学を嫌いにしてしまうように思える）。

2.4　磁束密度に関するガウスの法則：$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$

電荷と同じように、磁束の出発点である磁荷があれば、電荷の場合と同形式の次式で表されるであろう。

$$\int_{S}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\int_{V}\rho_m dV\left(=Q_m\right)$$

しかし、これまで、磁荷に関しては N と S が必ずペアでしか現れてきておらず、N だけとか S だけの単極磁荷（磁気モノポール）は存在しない（＝まだ見つかっていない ; 章末のティータイム欄参照）。ゆえに

$$\rho_m=0\ \rightarrow\int_{S}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=0\ \rightarrow\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{2.13}$$

である。現在の電磁気学では、2.6 節でも述べるように、磁界は電流によって生まれると理解されており、単極磁荷の存在を必要としない組立になっている。

2.5　電磁誘導の法則：$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$

1820 年、エルステッドが電気（電流）の磁気作用を発見した。その後、多くの研究者によって磁石から電気を生み出す試みがなされたがうまく行かず、ついに、その扉を開いたのはイギリスのファラデー、1831 年であった（アメリカのヘンリーも同時期に発見したことが知られている）。図 2.3 のように、磁石のそばでコイルを動かす、あるいは、コイルのそばで磁石を動かすときだけ検流形が振れるのに気付いたのである。ファラデーの発見によるこの現象は**電磁誘導**と呼ばれる。その後、ドイツのレンツにより、コイルに発生する起電力の向きに関するレンツの法則、すなわち、「電磁誘導によって生じる電流（**誘導電流**）の向きは、変化する磁力線の密度の変化を妨げる方向になる」を発見した（1834 年）。さらに、イタリアのノイマンは、ループに生じる起電力（**誘導起電力**）V とループを貫く磁束 Φ_m の関係を、以下の式で示した。

$$V=-\frac{d\Phi_m}{dt}\qquad\left(\Phi_m=\int_{S}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS\right) \tag{2.14}$$

面積分する曲面 S（$\boldsymbol{n}$：単位法線ベクトル）はループ c を縁とする任意の形状で良い。

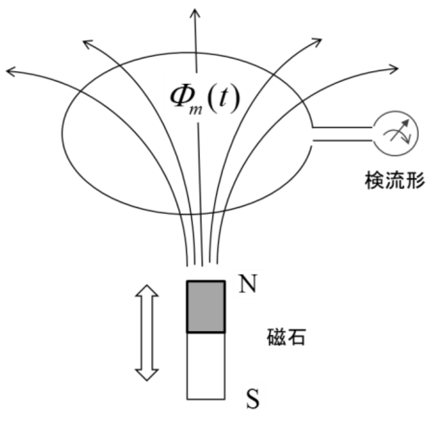


図 2.3　電磁誘導

(2.14)式は以下のように変形できる。

$$V = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} - \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial z}\frac{dz}{dt} \right) = V_1 + V_2 \tag{2.15}$$

$$V_1 \equiv -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}, \qquad V_2 \equiv -\left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial z}\frac{dz}{dt} \right)$$

このように起電力 V を V_1 と V_2 に分けると、夫々は以下のような意味をもつ。

V_1: ループが空間に固定されている状態において､磁界が時間的に変化するときに生まれる起電力

V_2: 磁界が空間に固定されている状態において、ループが時間的に変化する（＝動く）時に生まれる起電力

上記のように、起電力 V を V_1 と V_2 に分けると、(2.2a)式は V_1 を表す式になっている。これにより、起電力 V_1 と V_2、及び V は、電磁界の **E** と $\boldsymbol{B}$ 及び経路の動き $\boldsymbol{v}$ を用いて以下のように与えられる（V_2 導出の詳細は[3]の p. 291 等に）

$$V_1 = -\int_{\mathrm{S}} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \oint_{\mathrm{c}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{2.16a}$$

$$V_2 = \oint_{\mathrm{c}} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{2.16b}$$

$$V = V_1 + V_2 = \oint_{\mathrm{c}} \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \right) \cdot d\boldsymbol{l} \tag{2.16c}$$

起電力 V_2 は動く経路が $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ の電界を感じた結果であるとも言えるし、導体経路の場合には導体中の自由電子に $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ のローレンツ力が働いた結果とも解釈できる。

(2.16.a)式の右辺にストークスの定理を適用すると、

$$\oint_{\mathrm{c}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\mathrm{S}} \nabla \times \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \qquad \text{（式(2.2a)の再掲）}$$

であるので、電磁誘導の法則の微分形は次式で表される。

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \text{（式(2.1a)の再掲）}$$

この式から、電磁誘導は以下のように読み解ける。「磁束密度（あるいは磁界）の時間的変化があるところでは、その場所に電界の回転というベクトル場が生まれている」。さらに、ストークスの定理によって次のように展開できる。「そのようにして生まれている場の周囲には渦状の電界が現われている。その中に、導線を置くと、その導線はその場の電界を感じ取って起電力を生む」。

以下の例題を考えてみよう。

【例題 2.1】　*z 軸方向に向く磁界があり、$\boldsymbol{B}=B_0t\boldsymbol{k}$ に従って時間とともに強くなっている。xy 平面上に原点を中心とするループががあり、その半径 r が $r=v_0t$ で時間と共に大きくなっている。このループに生まれる起電力 V_1, V_2, V を求めよ。*

考え方と略解

この問題は円筒座標で考える方が簡単だが、上式理解のため、xy 座標で考えてみよう。

1) V を(2.14)式より直接に求める。（$V=3\pi B_0v_0^2t^2$）

2) V_1 を(2.15)式、又は(2.16a)式により求める。（$V_1=\pi B_0v_0^2t^2$）

3) V_2 を(2.15)式で求める。（$V_2=2\pi B_0v_0^2t^2$）（dx/dt を求めるときの x は $x=\sqrt{v_0^2t^2-(y(t))^2}$ として）

4) V_2 を(2.16b)式で求める。（$V_2=2\pi B_0v_0^2t^2$）

5) V_1+V_2 が 1)の V になることを確認する。。

2.6　アンペア・マクスウェルの法則：$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$

磁界は電流の各素片から生まれることを示すビオ・サバールの法則、電流と磁界の関係を表すアンペアの法則（アンペアの周回積分の法則）、電流と電荷の関係を表す電荷保存則、アンペアの法則と電荷保存則の矛盾から見出された変位電流、それを組み入れてアンペアの法則を拡張したアンペア・マクスウェルの法則についてまとめる。主役は磁界である。

2.6.1　ビオ・サバールの法則

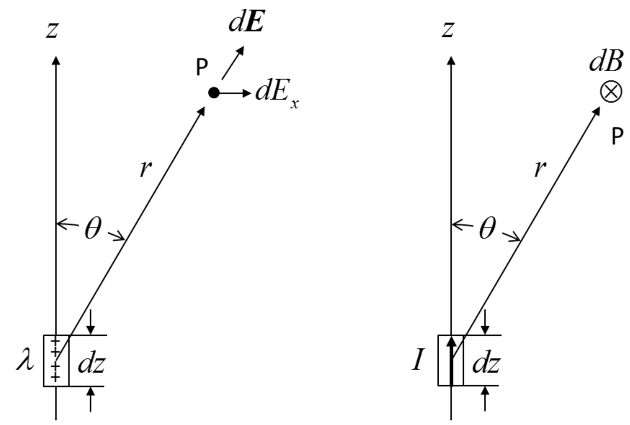
ビオ・サバールの法則は、電流素片が、それに対応する磁場（磁束密度や磁界）を作ることを示す法則である。この法則から、磁場の全体は、電流の領域全体の積分になると言う描像を与えてくれる。（注：ここでいう電流は導体を流れる真電流、すなわち、伝導電流であり、この後述べる変位電流は含まれていない。変位電流と磁界の関係については第８章で議論している）。

電荷が作る電界についておさらいをする。図 2.4(a)で、z 軸上の微小区間 dz に電荷が電荷密度 λ [C/m]で分布している。このとき、図の P 点における電界の z 軸と直交する方向成分 dE_x は、クーロンの法則より、

$$dE_x=\frac{\lambda dz\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

である。同図(b)に示す微小区間 dz を流れる電流素片 I により、P 点に発生する磁束密度 dB は、同じように、

$$dB=\frac{\mu_0 I dz\sin\theta}{4\pi r^2} \tag{2.17}$$



(a) クーロンの法則　　　　　　(b) ビオ・サバールの法則

図 2.4　電界と磁束密度の発生の類似性

と推定してもよいであろう。この二つの式より、電気と磁気の間には $\boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{B},\ \lambda \leftrightarrow I,\ 1/\varepsilon_0 \leftrightarrow \mu_0$ の対応関係が有る。

ビオ・サバールの法則は実験で確認することが困難である。それは連続で流れる電流の微小部分だけを取り出すことができないためである。しかし、(2.17)式が正しいとして、理論値が得られる設定（例えば無限直線状導線（例題 2.2））から積分等で求めた結果が、理論値や測定値に一致すれば、その正しさの確認にはなる（証明ではないことに注意）。そのような種々の検証の結果、(2.17)式による推定を誤りとする事例は無く、故に法則と認められ、発見者（J. B. Biot と F. Savart）に因んで**ビオ・サバールの法則**と呼ばれている。この法則は、任意の形状に流れる電流（時間的に変化しない定常電流）に対して、磁束密度を積分で計算できる（通常は数値計算）ので、非常に有用な式である。ビオ・サバールの法則をベクトルで表すと以下である。

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I d\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{r}}{4\pi r^3}$$

電流の方向は任意なので、$d\hat{\boldsymbol{z}} \to d\boldsymbol{l}$ として、一般的に表すと、

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{4\pi r^3} \tag{2.18}$$

となる。

以下、ビオ・サバールの法則が適用できる一例を示す。

【例題 2.2】　*図 2.4(b)の座標系において z 方向無限直線状導線に流れる電流 I が P 点（z 軸からの距離 a）に作る磁束密度を求めよ。*

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 a I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^{3/2}}dz$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]_0^{\infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

■

2.6.2　アンペアの周回積分の法則

無限直線状電流 I に対する、距離 r における磁界は、

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi r} \qquad \to \quad \int_0^{2\pi} H_\varphi r d\varphi = I$$

である。半径 r の円周に沿って磁界の経路方向成分の積分を行うと I になる。この値は、半径 r の大きさによらない。ここから、電流を中に含む任意の閉路 c を考え、その経路で磁界の経路方向成分に対して周回積分を行えば、I になるのではないかと推測できる。重ね合わせの理から、さらに一般化し、複数の電流に対して以下の仮説が立てられる。

$$\oint_{\mathrm{c}} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \sum_{i=1}^{n} I_n$$

この仮説は、時間的な変動のない静磁界において成立しており、**アンペアの周回積分の法則**、あるいは**アンペアの法則**と呼ばれる。言葉で表すと、「静磁界において、任意の閉路 c を考えるとき、経路上の磁界の経路方向成分を経路に沿って周回積分を行うと閉路 c の内部を貫通する電流の和になる」である。電流が面内に連続的に分布している場合には、閉路 c で囲まれる任意の曲面 S において、以下の式が成り立つ。

$$\oint_{\mathrm{c}} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{2.19}$$

ストークスの定理より左辺は

$$左辺 = \oint_{\mathrm{c}} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\mathrm{S}} \nabla\times\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

であるので、(2.19)式は

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} \tag{2.20}$$

と微分形で表記できる。一切の無駄が無いエッセンスと感じられる。ただし、この式はマクスウェルの方程式ではない。

アンペアの法則は、電界を求めるときのガウスの法則と同様、対称構造の電流に対する磁界を求めたいときにその有用性が発揮される。例えば、例題 2.2 に適用すれば、たちどころに答えが得られる。

【例題 2.3】　*図 2.5 に示すような単位長さ当たりの巻数 n の無限ソレノイドに電流 I が流れているときの磁界を求めよ。*

略解

対称性より、磁界の方向はソレノイドの中心軸方向であり、大きさは軸方向に一定である。ソレノイドの内部と外部をつなぐ形で、図のような軸に平行な矩形 ABCD よりなる閉路 c をとると、c 上で

$$\oint_c \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = H_{AB}l - H_{DC}l = nlI$$

である。ここで、l は辺 AB、DC の長さ、H_{AB}、H_{DC} は、それぞれの辺上の磁界の大きさを表している。図で、辺 DC を固定し、矩形を保ったまま辺 AB をソレノイドのどの位置に動かしても上式右辺に変化は無いため、H_{AB} はソレノイド内で均一である。次に、辺 AB を固定した状態で辺 DC を動かしても上式に変化が無く、ゆえに、H_{DC} はソレノイドの外で均一である。このとき、辺 DC がソレノイドから無限に遠方にあれば、H_{DC} は 0 であることが自明であるので、ソレノイドの外では磁界は 0 ということになる。以上のことを論理的にまとめると、次の結論になる。

$H = nI$ （ソレノイド内部、向きは軸方向）

$H = 0$ （ソレノイド外部）　■

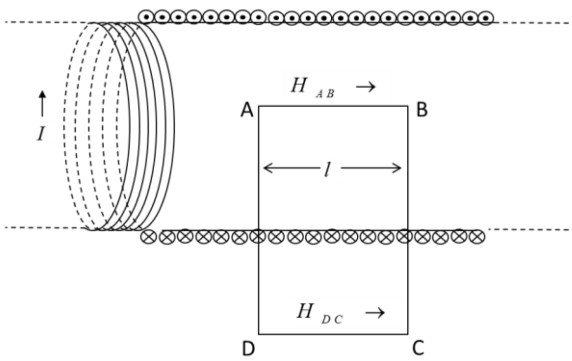


図 2.5　無限ソレノイド内外の磁界

2.6.3　電荷保存則

2.2 節でも述べたように、電荷には「発生や消滅は、必ず正・負等量の電荷で起こり、正あるいは負の電荷が単独で発生したり消滅したりすることは無い」、すなわち、閉じられた系における総電荷量は常に一定であるという**電荷保存則**が成り立つ。電流は電荷の動きで表される量であり、かつ電荷の動きも連続的であるため、電流も不連続に変化することはない。分岐や合流、あるいは反射などにおいて、不連続に見えるが、全体としてみれば、その大きさに不連続はない（例

えば、I_1 が I_2 と I_3 に分岐する場合は $I_1=I_2+I_3$ が保たれ）。故に、電荷保存則は**電流連続の法則**と読み替えることができる。

以下、個々の電荷がばらばらに動いている環境（**非定常電流界**）における電荷保存則を数式で表す。図 2.6 に示すように、閉曲面 S の内部に多数の電荷があり、それらが動き回って、内部から外部に出て行く状態を考える。ある時点 t での内部の電荷量を $Q(t)$とし、微小時間 dt の間に dQ が外部に出たとする。このとき、面から流れ出た電流は以下の式で表される。

$$I=\int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=-\frac{dQ}{dt}$$

ここで、

$$Q=\int_{\mathrm{V}}\rho\,dV \qquad (\rho:\ 電荷密度\ \ [\mathrm{C/m^3}])$$

より、

$$\int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=-\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathrm{V}}\rho\,dV\right) \quad\to\quad \int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=-\int_{\mathrm{V}}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV$$

ガウスの発散定理より、上式の左辺は

$$左辺=\int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\int_{\mathrm{V}}\nabla\cdot\boldsymbol{i}\,dV$$

であるので、電荷保存則は以下の微分方程式にまとめられる。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{i}=-\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{2.21}$$

(2.21)式で表される性質（すなわち電荷保存則）は、次項で述べるように、アンペアの法則（2.20)式の不備を顕在化し、マクスウェルが変位電流を導き出す動機を与える重要な意味を持つ。

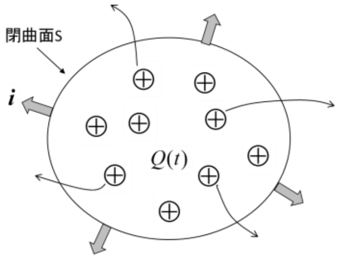


図 2.6　閉曲面 S を越えて電荷が動く場合

2.6.4　変位電流

マクスウェルは､それまでに得られている種々の法則から電磁気学理論の構築を目指していた。しかし、これらをどのように組み合わせても、思わしい結果が出てこなかった。既存の法則だけでは何かが足りなかったのである。それは何であろうか。

これまでにでてきた法則を見ると次の関係に矛盾が見られる。

・アンペアの法則：　$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}$　　((2.20)式の再掲)

・電荷保存則：　$\nabla\cdot\boldsymbol{i}=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$　　((2.21)式の再掲)

なぜなら､(2.20)式の両辺の発散をとると、左辺は、ベクトル公式より、$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}=0$となって、$\nabla\cdot\boldsymbol{i}=0$が導かれてしまうためである。これは(2.21)式を満たさない。これより、アンペアの法則には足りないものがあるということが予想されるのである。

マクスウェルは、このとき、電流とは何かと言うことを突き詰めていった。以下、図 2.7 に示す RC 回路に流れる電流を考えてみたい。コンデンサの電荷 0 の状態でスイッチを入れるとコンデンサを充電するために導線を電流が流れ､やがて電荷の飽和に至る。この電流を $I(t)$と置く（図の回路では電流は解析的に求まるが、今はその必要はない）。図で導線に流れている電流 I は**伝導電流**と呼ばれている。コンデンサの電極間には電荷の移動がないが、それゆえ、ここには電流（１秒間に通過する電荷量で定義されている）が流れていないといってよいかどうかという問題である。

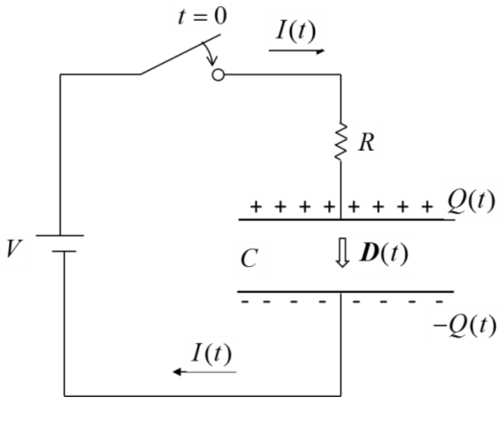


図 2.7

もし、電流を伝導電流だけだとするとアンペアの法則は以下の矛盾をはらんでいる。図 2.8 に示すようなコンデンサを含む回路にアンペアの法則を適用する｡アンペアの法則の積分形は以下で表される。

$$\oint_{c}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{S}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

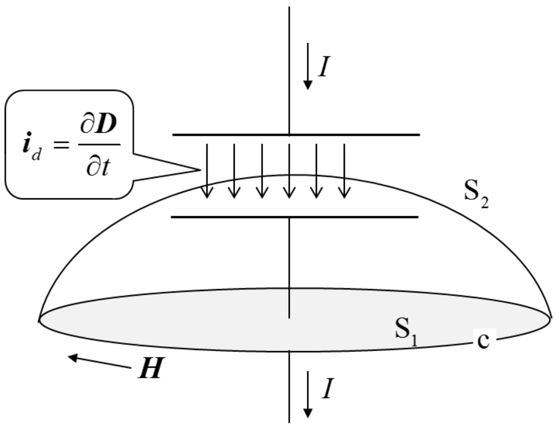


図 2.8

閉路 c を図のような位置にとって、それを固定とする。それを縁とする任意の面 S に対して上式は常に成立する。図のように、導線と差交する面を S_1、コンデンサの電極間を通る面を S_2 とする。そうすると

$$\int_{\mathrm{S}_1} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_{\mathrm{S}_2} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

が求められるが、

$$\text{左辺} = \int_{\mathrm{S}_1} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}dS = I\,, \qquad \text{右辺} = \int_{\mathrm{S}_2} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}dS = 0$$

となって矛盾する。矛盾を解消するためには、コンデンサの電極間にも I と等価な電流が流れていなければならない。マクスウェルは電束密度の時間変化量（時間微分値）も電流の働きをすると考え、この電流を**変位電流**と呼んだ。

図 2.7 のコンデンサの例で見てみよう。コンデンサに蓄積される電荷 Q は

$$Q(t) = \int_0^t I(t')dt'$$

コンデンサの電極面積を S とすると電荷密度σ は

$$\sigma(t)\left(=D\right) = \frac{Q(t)}{S} = \frac{\int_0^t I(t')dt'}{S}$$

変位電流（密度）i_d は

$$i_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{I(t)}{S}$$

となる。電極間に流れる変位電流の総量は $i_d S = I(t)$ となり、導線を流れる伝導電流とコンデンサの電極間を流れる変位電流の総量が同じ大きさとなり、電荷保存則、すなわち連流連続の法則がコンデンサの電極間も含めて成立していることになる。伝導電流がコンデンサのところで変位電

流に姿を変え、しかし電流としては連続に流れているということである。

変位電流は電流密度でありベクトル量であるので

$$\boldsymbol{i}_d = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2.22}$$

である。（$\boldsymbol{i}_d$は電流密度なので変位電流密度と呼びたいが変位電流の呼び名で定着している）

伝導電流も変位電流も電流として対等とみなしてよいことが分かったのでマクスウェルは(2.20)式のアンペアの法則を表す式の電流密度 $\boldsymbol{i}$ に変位電流の $\boldsymbol{i}_d$ を加え

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad \text{((2.1b)式の再掲)}$$

を得た。これにより、前述の矛盾も

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \cdot \boldsymbol{i} + \frac{\partial \nabla \cdot \boldsymbol{D}}{\partial t} \rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

となって、解消している。

（2.1b）式で表される拡張されたアンペアの法則は、**アンペア・マクスウェルの法則**と呼ばれている。

ここまで読んだ読者は次のように理解するであろう。

１）電流には伝導電流（真電流）と変位電流（仮想的な電流）の２種類がある

２）伝導電流は磁界を作る（アンペアの法則やビオ・サバールの法則）

３）伝導電流と対等な働きをする変位電流も磁界を作る（アンペア・マクスウェルの法則）

しかし、３）については、本当にそうかという疑いがあるのである。これについては、第８章で議論したい。

ティータイム　　マクスウェル・ヘビサイド方程式

幼少の頃より神童で鳴らしたマクスウェルが、才能を生かして電磁気学を作り上げ、その方程式を論文に発表したのが 1865 年[4]、大著「電気磁気論」にまとめて完成させたのが 1873 年である。自らの方程式から電磁波の存在が予言できるところまでを示した。残念ながら、マクスウェルは 48 歳の若さで亡くなってしまい、自らが切り開いた世界を探検することや、後継者を育てることができなかった。そのマクスウェルの論文と著書を独学で学び、自ら後継者たらんとしたのがイギリスのヘビサイド（Oliver Heaviside）である[5]。1.6 節にも記したように、ヘビサイドは正規の大学教育を受けず研究機関にも所属せず､独学で研究を行った孤高の研究者であった。マクスウェルが提示した方程式はベクトル量の成分毎の式であり､スカラーポテンシャルやベクトルポテンシャルを含めて 20 の連立方程式になっていた。この難解で雑多な感のある方程式群から、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを消去して、(2.1)式で表される４つのベク

トル微分方程式に整理した。1885 年のことである。この４つの方程式はヘビサイドの作品であり、マクスウェル・ヘビサイド方程式と呼ぶに相応しい。後の時代の我々が、この整理された式を使って学ぶことができることに感謝すべきであろう。なお、ドイツのヘルツも 1890 年、ヘビサイドとは独立に同様の式を導いている。

ヘビサイドは方程式の美しさを追及し、電界と磁界を対等なものとし、単極磁荷（磁気モノポール）や磁流も導入し、式(2.1a)と(2.1b)、(2.1c)と(2.1d)がそれぞれ同形になるような式も発表している[6]。この式が日の目を見るかどうかは、未来における磁気モノポールの発見にかかっている。磁気モノポールは量子力学・量子電磁気学で活躍したディラック（Paul A. M. Dirac）により、1931 年、その存在が予言されているが、あるとしても宇宙誕生初期（ビッグバン当時）に相当する超高エネルギー下のことのようで、およそ簡単に見つかる話では無さそうである。（磁気モノポール探索の旅にはロマンがあるが、一生を棒に振る覚悟が必要）

参考文献

［1］広瀬立成，*E* と *H*、*D* と *B*，物理学 One Point シリーズ 10，共立出版、1981.

［2］マンジット・クマール（青木薫訳），量子革命，新潮文庫，2017. （文庫本 700 頁の大作。量子力学誕生から完成までの歴史物語で、荒野を切り開いていった主要な登場人物に焦点を絞って深く掘り下げている。本講に関連する原子モデルの話（ボーアの思考軌跡）はその第４章に）

[3] 宇野亨，白井宏，電磁気学，コロナ社, 2010.

[4] J. C. マックスウェル, (訳)井口和基，マックスウェルの電磁気学，太陽書房, 2012.

[5] ナンシー・フォーブス，ベイジル・メイホン, (訳) 米沢富美子，米沢恵美，物理学を変えた二人の男，岩波書店, 2016.（電磁気学を構築したファラデーとマクスウェルの人間性と業績、関連する様々なエピソードを語っているが、ヘビサイドやヘルツ等、マクスウェルの後継者にも光を当てている）

[6] 太田浩一，電磁気学の基礎 II，東京大学出版会, 2012.

目次のページへ戻る