# 第３章　数学が支える電磁気学の法則

## “ガウスの発散定理とガウスの法則”, “ストークスの定理とアンペアの法則”にみる定理と法則の関係

電磁気学は電気と磁気に関するいくつかの物理法則の上に理論が組み立てられている。では、この法則とはどういう位置づけになるのだろう。同じような言葉で、定理もあるが、何が違うのだろう。例えば、ガウスの発散定理とガウスの法則、ストークスの定理とアンペアの法則、同じようでもあり、違うようでもあり、微妙な関係に見える。電磁気学に現れる種々の法則を題材として、物理の法則が数学の定理に支えられている姿を見てみよう。

注）本章は、初期公開版を 2023.12 に改訂したもの
ガウスの発散定理とストークスの定理の説明強化と 3.7 節の追加を行った

### 3.1 定義

#### （１）定理と法則

定理や法則の定義については、1.1 節にまとめている。一言で言うと、**定理**は、公理を前提として演繹手続きによって導きだされる命題。その正しさは、公理に基づく数学的な証明によって示される。**法則**は、ある物事と他の物事との間に一定の関係があるときに、その関係を表す言葉あるいは式。その関係が必然性や普遍性を持つと認められたとき、法則と呼ばれる。観測や実験から帰納されたもの、すなわち、経験則であり、数学的に証明されるものではない。科学の法則に対しては、自然界はそのような仕組みになっていると素直に受け入れるしかない。法則に当てはまらない物事が見つかると、新たな法則に置き換えられたり廃棄されたりする。

このように、定理は数学、法則は物理（物事の仕組み）の用語であり、概念として別物である。しかし、この後見てゆくように、法則の中に定理で示された性質が生きる形が多く、法則に信頼性を与える根拠、すなわち、定理が法則を支える姿が浮き上がってくる。

#### （２）ベクトル関数の発散と回転

電磁気学に現れる定理や法則には、ベクトル関数の “発散”や “回転”で表されるものが多い。発散（divergence）も回転（rotation）も 1.2 節で述べたように、ベクトル解析で定義されている数学用語である。しかしこの言葉には、学ぶ際に誤解を招いているのではと言う懸念がある。“発散”と言う言葉には、集中からの広がり、あるいは拡散のニュアンスも含まれる。しかし、数学の意味における発散は、広がりの元になる “湧き出し”、ホースで水を撒くときのホースの口元（流束の出発点）から流れ出す水の量を言う。そこから先、流束が空間に広がってゆく部分は、発散ではない。単なる、広がりである。本書でも発散の説明用語としては “湧き出し”を多用す

る。数学的な説明においては、定義されている“発散”を使わざるを得ないが、発散と言う用語の使い方や意味に対しては注意深く見てほしい。

“回転”と言う用語も同様である。鳴門海峡の渦潮を見れば、それを回転と思うように、回転と言う用語からは渦巻きが連想される。しかし、数学用語の回転は渦を言うのではなく、渦を発生する源、回転力を言うのである。ドリルの回転軸、あるいは、捩れの力を蓄えた棒のようなものである。その結果、空間に渦が生まれるが、それは（数学用語としての）回転ではなく、渦（還流あるいは循環）である。“発散”で述べたと同様な事情で、“回転”は使わざるを得ないが、このニュアンスを常に意識しておいてほしい。

数学での“発散”と“回転”の意味（直感的な描像）

発散（$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$）：湧き出す量（噴水の口元（座標点$(x,y,z)$）から湧き出す）

→周囲に流束 $\boldsymbol{A}$ の３次元的な広がりを生み出す。流束が広がるだけの領域には“発散”はない。

回転（$\nabla\times\boldsymbol{A}$）: 空間の捻れ（座標点$(x,y,z)$における空間の捻じれ。向きは捻じれの軸方向。ゴム紐を捩じってプロペラを回すおもちゃの飛行機のゴム紐の部分）

→周囲に渦（流束の循環）$\boldsymbol{A}$ を生み出す。渦だけがある領域には“回転”は無い）

## 3.2　ガウスの発散定理：ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ と発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ の関係

### 3.2.1　ガウスの発散定理とは

閉曲面 S で囲まれた内部空間 V がある。ガウスの発散定理は、対象空間内で定義されるベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の内部空間 V での性質とその表面 S での性質を等式で結びつけたものであり、以下の式で表される（式中の $\boldsymbol{n}$ は面 S 上の単位法線ベクトル）。

$$\int_{\mathrm{V}}\nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV=\int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \qquad \text{【ガウスの発散定理】} \qquad (3.1)$$

このような、積分変換で表される定理は積分定理と呼ばれる。定理であるから、その正しさは数学的に証明されている。その証明についてはここでは割愛し、式が意味するところだけを簡潔に述べる。（証明はベクトル解析の教科書を見てほしい。難しくない）

同式の左辺は、内部空間 V にあるベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の発散（＝湧き出し）を全部集めたもの（＝湧きだしの総量）である。一方、右辺は、表面 S から、その面に垂直に向かうベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の成分（流束）を面全体で積分したものであり、表面から出てゆく量の全体に当たる。ガウスの発散定理を一言で言えば、内部で湧き出す量（左辺）は表面からあふれ出る量（右辺）に等しい、であり、至極当然と言う気持ちで受け入れることができると思う。

図 3.1 は領域内に発散エリアが微小領域（その体積：$\Delta V_i$）毎にある場合についてガウスの発散定理のイメージを示している。それぞれの領域 $i$ の単位体積当たりの発散量（$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$）を $b_i$ とすると、表面 S から外に向かう流束の全体（すなわち(3.1)式右辺の面積分値）は $b_i\Delta V_i$ の合計値となる。このように、ガウスの発散定理は、個々の発散に対する面積分値が、そのまま加算される線形性（重ね合わせができる性質）を有する。

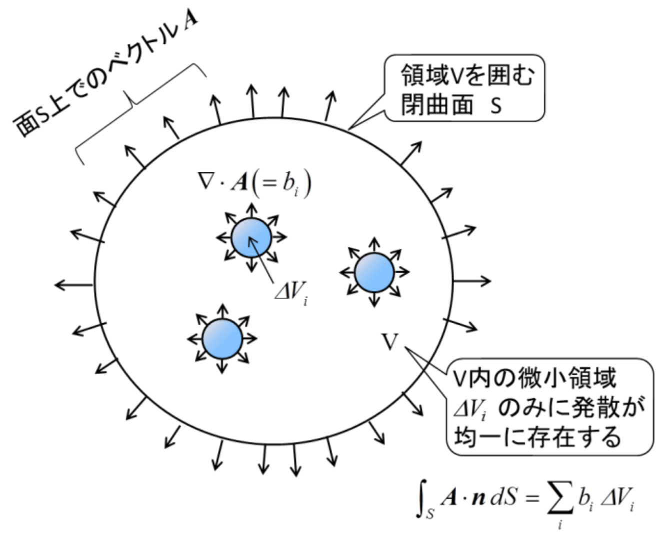



図 3.1　ガウスの発散定理のイメージ

なお、ガウスの発散定理も、この後述べるストークスの定理も、空間的な性質についてのみのものであり、ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ は、直角座標であれば、$\boldsymbol{A}(x,y,z)$で表される。物理で学んだ近接作用の目で、ある瞬間に領域の中央に発散が起きたとき、その影響は領域の表面まで届くのに時間遅れするのだから、例えば、球の半径を 1 光年とすれば、動的現象について(3.1)式の右辺と左辺を等号で結ぶことはできない。故に、(3.1)式はあくまで静的状態（時間の関数にならない）で成立する式である。時間的に変化し、その影響の時間遅れが問題なる場合は、当然それを考慮した式の修正が必要になり、それは物理への応用に際して、物理を扱う側で考慮されるべきことになる。

### 3.2.2　ガウスの発散定理からの帰結

電磁気学の理解に本質的な帰結をもたらすいくつかのケースにガウスの発散定理を適用してみたい。

（１）ケース１：原点に発散がある場合

球座標の原点（$r$=0）に発散（湧き出し）があるとする。すなわち

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(r)=b_0\,\delta(r) \tag{3.2}$$

ここで、$\delta$ はディラックのデルタ関数であり、その体積積分値を $b_0$ としている。原点を中心とする半径 $r$ 上のベクトル $\boldsymbol{A}$ は、ガウスの発散定理（(3.1)式）より、ベクトル $\boldsymbol{A}$ の向きは径方向（$r$ 方向）であり、ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ を球座標を用いて表すと、

$$\boldsymbol{A}=A_r\hat{\boldsymbol{r}}\quad\left(\hat{\boldsymbol{r}}\equiv\boldsymbol{r}/r\right) \tag{3.3a}$$

$$A_r = \frac{b_0}{4\pi r^2} \quad (r > 0) \tag{3.3b}$$

これより、発散が原点にある場合、距離の２乗に反比例して弱くなることが分かる。

（２）ケース２：発散が半径 $a$ の球内に均一に分布する場合

半径 $a$ の球（体積 $V$）の中に、全発散量（球内の発散の総量）が $b_0$ で、均一に分布しているとする。

まず、球外の $r \geq a$ を見てみよう。ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の径方向成分は、

$$A_r = \frac{b_0}{4\pi r^2} \quad (r \geq a) \tag{3.4a}$$

となり、ケース１の結果と変わらない。球内一様にベクトル関数の発散（スカラー量）が分布する場合の球の外部におけるベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ は、発散の総量を重心の一点に置くのと等価であると言うことを示している。

このベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の発散を調べると、式(1.2c)より、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) = 0 \qquad (r > a)$$

となって、当然ながら、この部分にはベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の発散は無い。距離の増加に対して広がって薄くなってゆくイメージである。

次に、球内に一様に分布する場合の球内のベクトル関数を求める。球内でも同様に、その対称性により、ベクトル成分は径方向のみである。ガウスの発散定理より、$A_r$ は、

$$A_r = \frac{b_0}{4\pi r^2}\left(\frac{r}{a}\right)^3 = \frac{b_0 r}{4\pi a^3} \quad (r < a) \tag{3.4b}$$

これより、球の内部では距離 $r$ に比例した強さになることが分かる。このベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の発散を調べると、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) = \frac{3b_0}{4\pi a^3} = \frac{b_0}{V} \qquad (r < a)$$

となって、与えたとおりの値になっていることが確かめられる。

（３）ケース３：発散が半径 $a$ の球の表面に均一に分布する場合

半径 $a$ の球の表面 S 上に、全発散量（球内の発散の総量）が $b_0$ で均一に分布しているとする。求める手順は同じなので結果のみ示すと、

$$A_r = \begin{cases} \dfrac{b_0}{4\pi r^2} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases} \tag{3.5}$$

となり、球外ではケース３と同様、全発散量を原点に置いたと同じに、球内では一様に 0 となる。

（４）ケース４：発散が無限の長さの直線上に均一に分布する場合

円筒座標の $z$ 軸上（$r$=0）無限の長さに亘って、単位長さあたり発散量 $b_0$ が均一に分布する場合を考える。この場合は $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ は次式で与えられる。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(r,z) = b_0\,\delta(r) \tag{3.6}$$

ガウスの発散定理より、ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ は径方向（円筒座標の $r$ 方向）のみに成分 $A_r$ をもち、次式となる。

$$A_r = \frac{b_0}{2\pi r} \quad (r > 0) \tag{3.7}$$

これより、ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ は $z$ 軸からの距離 $r$ に反比例することが分かる。

ケース４における $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ の存在範囲を半径 $a$ の筒状にすれば、ケース１～３の関係で調べたような性質がここにも見られることになる。

これらのことをまとめると、ガウスの発散定理からは、構造が対称である場合には、以下の性質が見えてくる。

① 発散（湧き出し）が原点にある場合は、ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ は $r$ 方向の成分を持ち、その大きさは、原点からの距離の２乗に反比例する。
② 発散のある領域が球形で、かつ、発散が均一に存在するとき、その発散の全量を球の中心（重心）においても、領域外のベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ は同じである。
③ 円筒座標の $z$ 軸上の無限の範囲に発散が均一な密度で存在するとき、ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ は径方向に成分を持ち、その大きさは $r$ に反比例する。

ここまでは、数学のみの話であったが、一般的に定義されるベクトル関数とその発散の関係に見られる性質は、これから述べる電磁気学の電界や磁界といった物理量の性質に共通していることに気付くであろう。

## 3.3　ガウスの発散定理が支える電磁気学の法則

### 3.3.1　クーロンの法則

クーロンの法則の生まれる経緯を見てみよう。クーロンは自らが工夫して作ったねじり天秤を用いて、距離 $r$ 離れた二つの電荷（$Q$ と $q$）に働く力 $F$ を測定し、以下の関係を見出した。

$$F = k_e \frac{Qq}{r^2} \quad \left( k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right) \tag{3.8}$$

この関係は､発見者のクーロンに因んでクーロンの法則と呼ばれる｡近接作用の考えに基づき､ある場所にある電荷 $q$ に、別の場所にある電荷 $Q$ が作った電界 $\boldsymbol{E}$ が作用したと考え、

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{E} \equiv \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{3.9}$$

のように電界が定義されている。この関係を覆す観測事例は無く、法則として認められている。しかし、測定であるから、距離の２乗に反比例する特性が真実がどうかは、測定をいくら精度よく行ってもわからない。もしかしたら、距離の２乗でなく、1.99 乗や 2. 01 乗であるかもしれない。法則は経験則であって、証明ができないのであるから、真実は誰も知らないのである。ではなぜ、２乗が法則として選ばれているのであろうか。

ガウスの発散定理の帰結①の (3.3)式を見てほしい。この式で

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{E}, \quad b_0 \to \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

の対応付けができれば､(3.9)式になる｡この対応付けの正しさは証明できるものではない｡でも､観測結果に合えば法則になる。そう言う性質のものである。物理現象は数学的な美しさを持つという思想を信じたい。数学的な美しさとは、そう、自然の法則が数学の定理に支配されていると言うことである。具体的には、クーロンの法則がガウスの発散定理（の上記①の帰結）に支えられていれば、この距離特性（$\propto 1/r^2$）が出てくるわけである。そのように、法則は、美しいものになるだろうと言う期待で 2 が選ばれたとしても、嬉しいことに、それでうまくいっているのである。［注:この例やこの後でてくる例においてもそうであるが、法則が、定理の知識をもとにして発見されたと言うわけではない。本章では、法則がこのように定理に支えられていることの後付けの説明を行っていると受け止めてほしい］

### 3.3.2　電界に関するガウスの法則

電磁気学では、発散が扱われる物理量は、電界 $\boldsymbol{E}$、電束密度 $\boldsymbol{D}$、磁束密度 $\boldsymbol{B}$、磁界 $\boldsymbol{H}$ などがあるが、ここでは、代表して、電界 $\boldsymbol{E}$ に関する発散とガウスの法則を調べる。

マクスウェルの方程式の一つに以下の式がある（$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ の場合）。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (\rho\text{: 電荷密度 [C/m}^3\text{]}) \tag{3.10}$$

電界と電荷密度と言う異なる物理量の関係を示しており、**電界に関するガウスの法則**と呼ばれる。ガウスの法則は以下の類推による。

１）電荷 $Q$ からは $Q$（本）の電束が生み出されている（ともに単位は C（クーロン））。

２）電界 $\boldsymbol{E}$ は、電荷からの距離の２乗に反比例して弱くなる（クーロンの法則より）

３）複数の電荷、あるいは連続して分布する電荷に対しては、全体の電界は個々の電荷によってつくられる電界の重ね合わせになる。

１）は類推というよりは、そのように決めたと言う約束事（本数と言っても整数値で表されるものではなく、概念上の）。２）の類推は、ガウスの発散定理という数学から導かれる性質（3.2.2項の①の帰結）が物理の世界にも表れているだろうとの確信である。３）も図 3.1 で説明したように、ガウスの定理からの帰結である。この３つの類推から、電荷密度$\rho$で連続に分布する電荷が作る電界 $\boldsymbol{E}$ について以下の式が導かれる。

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV \tag{3.11}$$

電荷密度$\rho$は、体積積分する領域 V の内外にどう分布していても構わない。なぜなら、V 外に分布する$\rho$の(3.11)式左辺の面積分への寄与は 0 であるからである。この式は電界に関するガウスの法則の積分形の表現である。ガウスの発散定理より、上式左辺は

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}dV \tag{3.12}$$

であるので、 (3.11)式と(3.12)式の右辺同士の被積分関数を比較して、 (3.10)式の簡潔な微分方程式で表すことができる。

気に留めておいてほしいことがある。3.2.1 項の最後にも書いたが、考え方として重要なことなのでもう一度繰り返す。ガウスの発散定理はベクトル関数の空間的な性質を言っており、時間変化は考えられていない。一方、電磁気学の物理量は時間と空間の４次元空間で表される。例えば、$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$、$\rho(x,y,z,t)$のようにである。その場合でも、微分形式で表されるマクスウェルの方程式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = \frac{\rho(x,y,z,t)}{\varepsilon_0}$$

は常に成立する。なぜなら、この式は空間の一点（$x,y,z$）における、共通時刻 $t$ での値の関係を言っているからである。それに対して、積分変換された(3.11)式では、この同時刻性が通用する範囲で正しいが、それが成り立たなくなるほどの空間スケールでは、その時間遅れを考慮した積分が必要になる（相対論においては同時刻と言う意味そのものが問題になってくる）。例えば、閉曲面 S の半径が１光年と言った場合である。しかし、電磁気学には、放射電磁界解析のような場合を除いて､大部分は机上スケールの話であろうから､心配する必要はないのであるが･･･。

以上を整理すると

ガウスの発散定理（数学的に証明された真理）

・ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ とその発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ の積分関係を結び付ける式（式(3.1)）

・そこから導かれるベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ に関する種々の性質：

例えば､球形領域に $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ が均一に分布しているとき､球外では $\boldsymbol{A}$ の向きは径方向に､大きさは $1/r^2$ に比例。球外の $\boldsymbol{A}$ は球内に均一分布する $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ の総量を原点（重心）において求めることができる。

ガウスの法則（発見あるいは類推に基づく経験則）

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ で表される物理量に対して、$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ を別の物理量 $X$（スカラー関数）に結びつけ、$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=X$ としたときの $\boldsymbol{A}$ と $X$ の積分関係をガウスの発散定理で結びつける。
$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=X$ の部分が仮定（経験則、類推）なので、そこから導かれる性質は全て法則。

電界と電荷密度の関係では、

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}dV \qquad \text{（ガウスの発散定理：数学）}$$

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV \qquad \text{（ガウスの法則（積分形）：物理）}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{（ガウスの法則（微分形）：物理）}$$

ガウスの法則が、対称形構造物の電界や電束密度を求める際に、極めて便利な計算手法であることは、電磁気学の教科書等に挙げられている例題（本節で示したケース１～４などのガウスの定理の帰結を物理量に置き換えたもの）を見れば明らかである。そして、自然界の物理現象が数学的世界に支えられていることが、感動として実感できるであろう。

---

**ティータイム　幻のキャベンディッシュの法則**

電荷の引き合う（あるいは反発する）力が距離に二乗に反比例する性質（逆二乗則）は、クーロンの法則として知られている。それは、クーロンが、1785 年、はじめて世に知らしめたからである。クーロンはねじり天秤により、先ずは、電荷の反発力を詳しく調べて、逆２条の法則にたどり着いた。実は、これより１０年以上も前の 1771 年、この性質を見つけていた人がいた。イギリスのキャベンディッシュ（Henry Cavendish）である。彼のやり方はクーロンとは別の方法であった。導体でつないだ内外の球に電気を与えると、外側だけに集まり、内側の球には無いことがわかった。そうであれば、ニュートンが見出した重力の性質（球の中空部分の重力は 0）と同じで、球外の空間における電気の強さは距離の逆２乗になるはず、と推論した。これを精密に測定し、距離の特性を $r^{-2\pm\delta}$ と置いたとき、$\delta<1/50$ であると算出し、$r^{-2}$ を主張した。それなら、クーロンの法則では無くキャベンディッシュの法則なのでは、と思うであろう。実は、キャベンディッシュは（彼の非社交的な性格から）これを公表せず亡くなってしまい、遺稿の整理を行ったマクスウェルの公表（1879 年）まで、百年を待たなければいけなかったのである。同じ逆二乗則の発見でも、まったく違う発想（でも、両方ともガウスの法則に支えられている）によるものであったことが興味深い。

---

### 3.4　ストークスの定理：ベクトル関数 *A* と回転∇× *A* の関係

上述したガウスの定理は発散に関するものであったが､ここで述べるストークスの定理は回転に関するものである。発散の概念は、直感的に捉えやすく、理解に誤解を生むことは少ないが、回転の概念はそれより複雑であり、混乱しやすい。

#### 3.4.1　ストークスの定理とは

ループをなす経路 c で囲まれた任意の曲面 S を考える。ストークスの定理は、曲面 S 上でのベクトル関数 *A* に関する積分定理で以下の式で表される。

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS = \oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} \qquad 【ストークスの定理】 \qquad (3.13)$$

先ず、式の意味を考える。

同式の左辺は、曲面 S 上におけるベクトル関数 *A* の回転（＝捩れの力（回転力）；ベクトルの向きは回転軸の方向）の面に垂直な方向の成分を全部集めたもの（＝回転力の総量）である。一方、右辺は、面の縁をなす経路（ループ）c 上でのベクトル関数 *A* の経路方向成分を経路全体で積分したものであり、ループに働く渦の力（循環とも呼ばれる）である。式の左右に表される量が等しい、という定理である。少し言い方をかえると、面上のいたるところの微小部分に存在する回転が、その外側にそれぞれの渦を作り、その渦が広がって面の縁に現れる渦の全体は、内部の回転の総量に等しくなるである。

ガウスの発散定理の直感的理解のしやすさに比べると、少し分かりにくいように思う。その理由は２点ある。一点目は、３次元空間の性質であるのに、式は面上や線上の積分になっていて、３次元空間をイメージしにくい。二点目は、ループ c を固定して考えるとき、面 S はループ c を縁とする任意の曲面形状が許されること（＝任意の３次元空間内の性質になっている）についての不思議感である。図で説明しにくいが、図 3.2 のような見方はどうであろう。

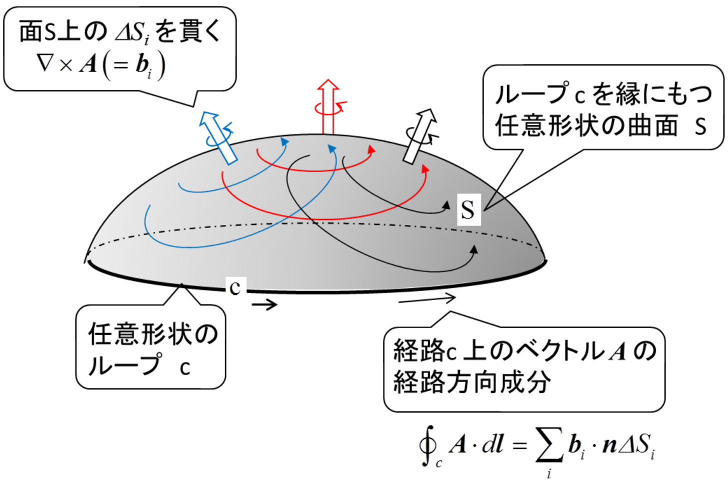



図 3.2　ストークスの定理のイメージ

i) ループ c を固定する

ii) ループ c を縁とする任意の曲面 S を定める（任意であるところがみそ）

iii) 面 S 上の回転（面 S を貫く回転軸）を求める（図ではそれが三つある場合を示している）

iv) それぞれの回転を中心として周囲に渦ができその渦がループ c に及ぶ

v) それぞれの回転が作る渦を一周に亘って足し合わせることで、ループ c 上の線積分（式(3.13)の右辺）が得られる

ここでは渦という言葉を使ったが、鳴門の渦潮のように時間的に回転しているわけではなく、空間的な意味である。一周する道があり、それがずっと下り坂になっていて、でも一周したらもとの位置に戻るという不思議な道である。

電磁気学（あるいはベクトル解析）授業などで、この定理の直感的な理解目的で、以下のような説明が見受けられる。図 3.3 で、左側に示す 9 つの矩形ループがあって図のように回転力がある。この場合に、内部の接合部分は力が打ち消されてなくなり、残るのは、右側図のように縁の成分のみになると。内部にある回転力が縁に現れる、という説明である。この説明を聞いて、なんとなくわかった気分になるが、誤解を招く説明であり、著者は良いとは思わない。例えば、$\nabla\times\boldsymbol{A}$が、ループの中心部分にはあるが、ループの縁付近には無い場合（すなわち外周付近では$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$）、図の説明は成立しないからである。同図の説明が有効となるのは、面内に$\nabla\times\boldsymbol{A}$がほぼ均一に存在するような場合（まさに図に書いたような例）のみで、それは一般的ではない。その場合でも気に入らないのは、定量的な部分についてである。一つの回転の大きさを 4 としよう（図に辺の大きさを 1 として）。右図の外周を足し算すると 12 になる。しかし、実際には、内部の回転の大きさの和（＝面積に比例する量）になるのだから、36 にならなければいけない。決して内部が打ち消されて外に現れるわけではなく、内部の回転のそれぞれが渦となって縁（＝ループの場所）に現れ、それが重ねあわされるのである。

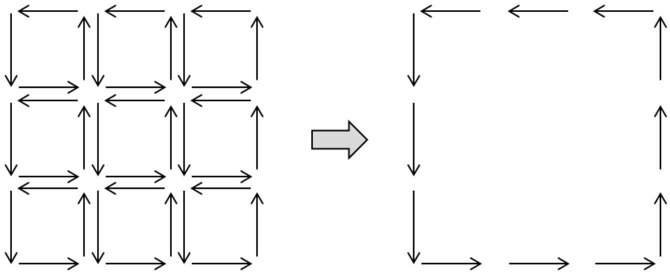


図 3.3　ストークスの定理の直感的説明イメージ図（誤解を与えて良くないという例）

ストークスの定理を別の視点で見てみよう。図 3.4 に示すように、原点を中心とする半径 $a$ の円形ループ c が有り、この線上での $\boldsymbol{A}$ の線積分を求めるとしよう。ループ c が作る任意の面 S を代表して、円形平面である $S_1$ と上部に膨らんだ面 $S_2$ を考える。図には$\nabla\times\boldsymbol{A}$の分布に関する三つのケースを1〜3として示している。ケース 1 は中心軸上の無限小の細さの中に無限の長さで、回転が存在する場合である。ケース 2 と 3 は同じ大きさのものが原点を通って一周している場合

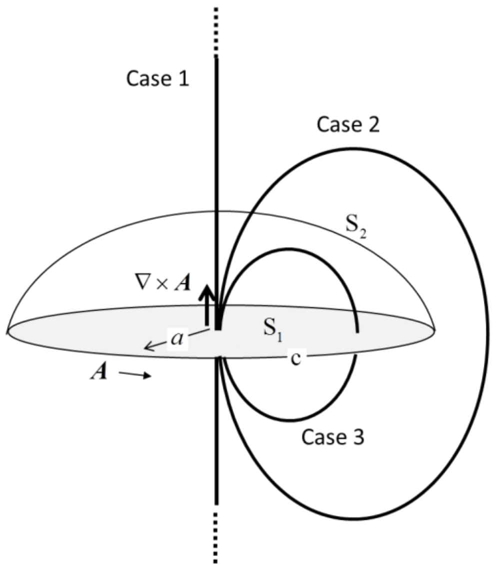



図 3.4　ストークスの定理の説明図（原点におけるベクトル$\nabla\times\boldsymbol{A}$は三つのケースで同じ）

であり、ケース 2 は $S_1$, $S_2$ に対して一回鎖交し、ケース 3 は $S_1$ に対しては出入り２回の鎖交、$S_2$ に対しては鎖交がない。この三つのケースを比較して、次のようなことが言える。

① ケース 1 と 2 の周回積分値は同じである。また、ケース 3 の周回積分値は 0 である。

② ケース 1 の場合は構造の対称性から周上のベクトル関数 $A_\varphi$は次のように解ける。

$$A_\varphi = \frac{b_0}{2\pi a} \qquad (\nabla\times\boldsymbol{A} = b_0\delta(r)\hat{\boldsymbol{z}})$$

これは、ガウスの法則で述べたケース 4 の距離特性（＝(3.7)式：中心軸からの距離に反比例）と同じになる

③ ケース 2 と 3 の場合は、周回積分値は同じ値になるが、非対称構造ゆえ経路上のベクトル関数 $A_\varphi$を定めることはできない。

④ ベクトル関数$\nabla\times\boldsymbol{A}$は連続的につながっていなければならない（→切れ目があってはいけない）。なぜならば、そこに不連続があれば、c で固定された任意の面 S がそこを通るような場合、(3.13)式の左辺は異なる値を示し、式の等号が成り立たなくなるからである。（ケース 1 の場合も切れ目がないように無限遠でつながっていると考える）

ガウスの発散定理は、領域とそれを囲む面との関係であるから、イメージしやすいが、ストークスの定理は①～④から分かるように、線・面・領域の関係が複雑である。これも定理であるから、その正しさは数学的に証明されているが、その証明の詳細は教科書に任せて割愛する（ガウスの発散定理の証明よりは少し手ごわい）。

### 3.4.2　２次元問題による直観的な理解

ストークスの定理は、任意の曲面上で成立する定理であるが、平面上での説明の方がイメージしやすいので、以下、それでの説明を行う。（注：以下の説明では *xy* 面上でのベクトル関数を述べるが、対象空間は３次元で *z* 方向には変化がないと言う意味である）

ストークスの定理（(3.13)式）を直角座標成分で書き下すと以下のようになる。

$$\int_{\mathrm{S}}\left\{\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right\}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\oint_{\mathrm{c}}\left(A_x dx+A_y dy+A_z dz\right)$$

曲面上での問題を平面上での問題に置き換えるため、$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}\,(=\hat{\boldsymbol{z}})$, $A_z=0$ とする。この時、上式は以下のように簡単になる。

$$\int_{\mathrm{S}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\mathrm{c}}\left(A_x dx+A_y dy\right) \qquad (3.14)$$

平面では曲面に対して以下の対応になる。

$$\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\ \rightarrow\ \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y},\quad dS\ \rightarrow\ dxdy$$

この関係式（ストークスの定理を平面に適用した(3.14)式）は、**グリーンの定理**と呼ばれている。この平面に適用したストークスの定理（すなわちグリーンの定理）で、その意味を考えてみたい。

図 3.5 において、中心部に半径 *a* の円形微小領域$\varDelta S$ がある。この微小領域内に、単位面積当たり $b_0\hat{\boldsymbol{z}}(\equiv\nabla\times\boldsymbol{A})$ のベクトル関数（ベクトル $\boldsymbol{A}$ の回転）が均一に存在し、ベクトルの向きは紙面に対して垂直（手前方向：$\hat{\boldsymbol{z}}$）である。この$\varDelta S$ にあるベクトル $\boldsymbol{A}$ の回転は、$\varDelta S$ 外（半径 *r* の地点）に以下のベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ を作る。

$$2\pi rA_\varphi=b_0\varDelta S\ \rightarrow\ \boldsymbol{A}(r)=\frac{b_0}{2\pi r}\varDelta S\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\quad\left(r>a\right) \qquad (3.15)$$

このようにして、周方向に成分を持つベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ が作られ、微小領域の中心からの距離 *r* (>*a*)に対して反比例する。このとき、$\varDelta S$ 外のベクトル $\boldsymbol{A}$ の回転は 0 である。これは非常に勘違いされやすいところと思うが、なぜなら、円筒座標表現（式(1.3b)）で

$$\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)=0 \qquad （\varDelta S\ 外の領域）$$

となるからである。バームクーヘン状にできる渦状のベクトル $\boldsymbol{A}$ で、かつ、強さが *r* に反比例するものには渦はあっても、その場所における回転（$\nabla\times\boldsymbol{A}$）は無いのである。

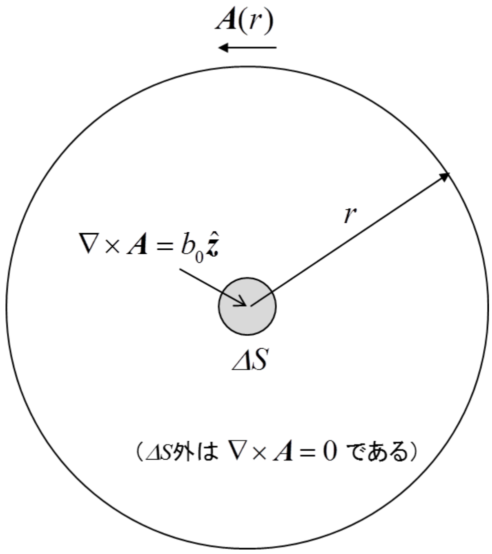



図 3.5　円の中心の微小円形領域に回転成分がある場合（平面に適用したストークスの定理）

上記例を踏まえ、回転はどのような空間に存在するのかを平面のストークスの定理（＝グリーンの定理）で考えてみたい。

回転$\nabla\times\boldsymbol{A}$に対応する量は、

$$\nabla\times\boldsymbol{A}\ \rightarrow\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

である。このうち、$\partial A_y/\partial x$は$x$方向に対してベクトル$\boldsymbol{A}$が反時計方向に回転しようとする空間微分係数、$\partial A_x/\partial y$は$y$方向に対して時計方向に回転しようとする空間微分係数であり、この二つが等しいとき、作用が打ち消し合って回転は生まれない。すなわち、

$$\frac{\partial A_y}{\partial x}=\frac{\partial A_x}{\partial y}\ \rightarrow\ \nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$$

である。ここでは、回転がある最も簡易な例として、

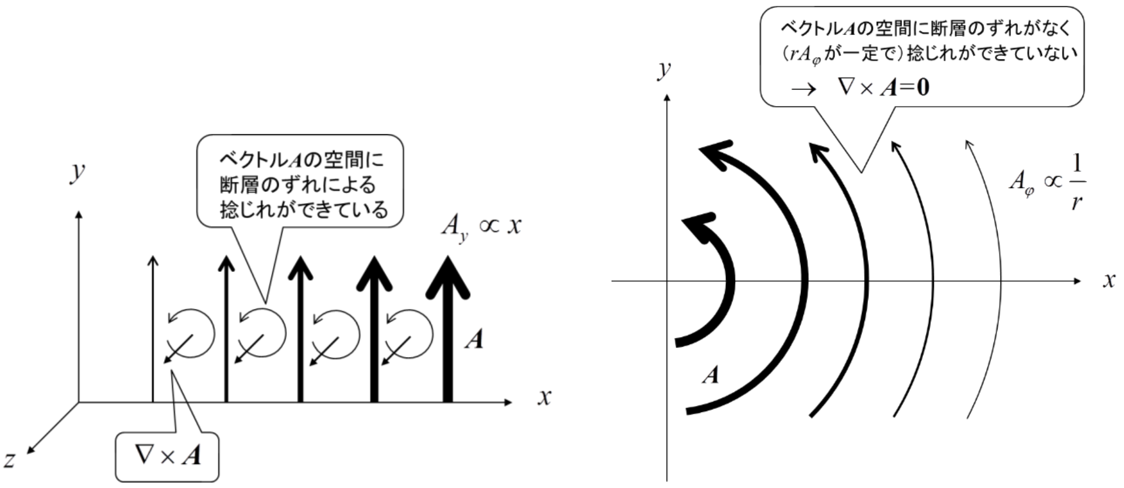
$$\frac{\partial A_y}{\partial x}=C,\quad A_x=0\ \rightarrow\ A_y=Cx,\quad \nabla\times\boldsymbol{A}=C\hat{\boldsymbol{z}}$$

とすると、図 3.6(a)のように、$y$ 軸方向に断層のズレがあってストレスをもつ空間であり、これが、反時計方向（回転軸の向きは$z$軸方向）に回転を生み出しているわけである。

次に、回転を生み出さないケースを調べてみよう。ここでは、円筒座標の$\varphi$方向（周方向）の成分 $A_\varphi$のみをもち、径方向 $r$ の関数で表されるベクトル空間を考える。平面のストークスの定理を円筒座標で表し、$\nabla\times\boldsymbol{A}$の$z$成分=0 とすると、式(1.3b)より、

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_{\varphi}\right)-\frac{\partial A_z}{\partial \varphi}\right)=0 \quad \rightarrow \quad A_{\varphi} \propto \frac{1}{r} \qquad \left(\because\ A_z=0\right)$$

となる。図 3.6(b)に示すようなベクトルの周方向成分の強度が $r$ に反比例する物理量は電磁気学にもよく現れるが、このケースでのみ回転が 0 となる。図 3.5 のΔS 外の部分は、まさにこのケースであったわけである。




(a) その場所に回転がある空間（$\nabla\times\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$）　　　　(b) その場所に回転が無い空間（$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$）

図 3.6　回転はどのような空間に存在するか

## 3.5　ストークスの定理が支える電磁気学の法則

### 3.5.1　アンペアの法則

磁界は電流から生まれると言う性質をもち、この関係を定式化したのが**アンペアの法則**である。間隔 $r$ の並行２線に流れる電流 $I_1$, $I_2$ 間の長さ $l$ あたりの力 $F$ は、以下の式で表される。

$$F=\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r} \tag{3.16}$$

これは磁気力あるいはアンペアの力と呼ばれる。クーロンの法則のときの議論と同様、この式も測定値に基づく経験式なのであるから、距離に反比例するかどうかの真実はわからない。この場合も、本当は距離の 1.01 乗、あるいは、0.99 乗かもしれない。1 にしているのは、ストークスの定理からの帰結である(3.15)式の $1/r$ 特性がここに現れているのではないかと期待できるためである。これを受け入れることによって、アンペアの法則として導かれている式が得られる。磁界 $\boldsymbol{H}$ で表すと、

$$\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \oint_{\mathrm{c}} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} \qquad (\boldsymbol{i}:\ \text{電流密度}\ [\mathrm{A/m^2}]) \tag{3.17a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} \tag{3.17b}$$

である。式(3.17a)の形は、経路 c における磁界の周方向の積分は c を縁とする任意の面 S を貫く電流の総量に等しいと言う性質のため、周回積分の法則とも呼ばれる。(3.13)式のストークスの定理において、$\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{H},\ \nabla\times\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{i}$ と対応付けた形である。この対応付けは、観測によって見出したものであり、ゆえに法則（アンペアの法則、周回積分の法則）なのである。

円筒座標において、中心軸 $r$=0 に電流 $I$ が流れている場合には、(3.17b)式は以下のようになる。

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = I\delta(r)\hat{\boldsymbol{z}} \tag{3.18}$$

このとき、半径 $r$ の円上では、(3.17a)式は以下のようなお馴染みの式になる。

$$I = 2\pi r H_\varphi \quad\rightarrow\quad H_\varphi = \frac{I}{2\pi r} \tag{3.19}$$

無限直線状に流れる電流の存在が、距離に逆比例する形で影響が及んでいると言うのが、アンペアの法則の主要帰結であり、かつ、ストークの定理から導かれる帰結でもある。ガウスの法則と同様に自然界が美しい法則に支配されている（＝数学の世界が自然界の法則に現われている）ことを喜びたい。

### 3.5.2　変位電流（アンペア・マクスウェルの法則）

アンペアの法則に対して、それを完全なものとするために変位電流の必要性をマクスウェルが見出した経緯については、2.6.4 項で詳しくまとめている。そこでは、電荷保存則が鍵になっていた。ここでは、ストークスの定理、すなわち、数学が求めているものは何かと言う視点で、アンペアの法則を拡張したアンペア・マクスウェルの法則を述べる。

ストークスの定理では、3.4.1 項の最後の④にまとめているように、「閉ループ c 上でのベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の経路方向成分の線積分は、閉ループ c で囲まれる面 S 上での $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の面積分に等しい。この面 S は閉ループ c 固定のもとでどのように選んでも良い。そのためには、$\nabla\times\boldsymbol{A}$ には不連続となる切れ目があってはいけない」と言う性質である。

これを、アンペアの法則(3.17a)式で見てみよう。図 3.7 はこの説明図である（図 2.7 の再掲）。図はコンデンサを介した線路であり、この導線部分に電流 $I$ が流れている。導線の外側に円形の閉ループ c をとり、ループ c で囲まれる平面を $\mathrm{S_1}$ とする。この $\mathrm{S_1}$ を貫く形で電流が流れており、アンペアの法則から式(3.19)のように磁界が定まる。この面を $\mathrm{S_2}$ のように、コンデンサの電極間を通るように変えても、線積分においては関係ないことであり、線積分値が変わることは無い。しかし、$\mathrm{S_2}$ 面には電流 $I$ は流れておらず、 (3.17a) 式左辺の面積分値は 0 になってしまう。そうなれば、等式で結ばれている右辺も 0 にしなければいけないが、それでは、ストークスの定理が要請する「線積分値が変わることは無い」ことに対して矛盾である。そこでマクスウェルはこの矛盾を解消するために、ここにも電流と次元を同じくする何かが存在していると考えたのである。

実際の電荷の流れ（伝導電流）は無くても、コンデンサへの電流の流れ込みによって電極間の電束密度 $\boldsymbol{D}$ は時間変化しているのだから、この時間微分値を電流（密度）と考えよう、として変位電流を導入したのである。新しい形の電流を発見したといっても良いかもしれない。このようにして得た変位電流が電磁気学構築パズルの最後のピースとなったのである。得られた式は次式である。

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}_d\ ,\qquad \boldsymbol{i}_d=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{3.20}$$

ここで、$\boldsymbol{i}_d$ は変位電流の密度 [A/m$^2$]である。数学が回転軸に切れ目があることを認めず、その要請から、この切れ目を繋ぐものとして変位電流を探し当てた、という図式に見える。数学が物理法則に足りないものがあることを教えてくれたのである。

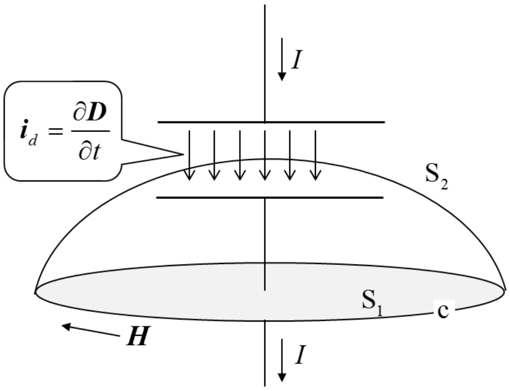
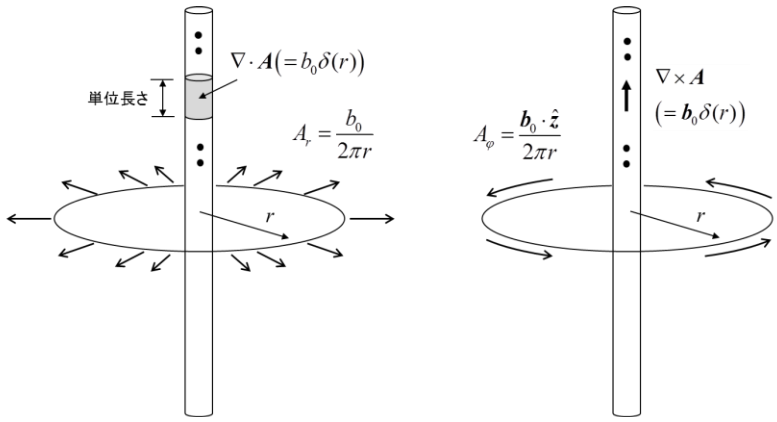



図 3.7（図 2.7 の再掲）コンデンサの電極間に流れる変位電流

### 3.6　ガウスの発散定理とストークスの定理のアナロジー

ガウスの発散定理とストークスの定理をそれぞれに述べてきたが、ここではその類似性（アナロジー）について述べる。ガウスの発散定理は体積内の発散（湧き出し）とその閉曲面からの流出（流束）の関係を、ストークスの定理では面内の回転（捻じれのストレス）とその閉曲線上での渦（循環）の関係を扱っており、次元が異なる。両定理の共通の土俵は図 3.8 に示す円筒座標の中心軸上に、同図(a)の発散定理ではスカラー量$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ が、(b)のストークスの定理ではベクトル量$\nabla\times\boldsymbol{A}$がそれぞれ無限に連続する形である。中心にある円柱の断面積は十分小さいとし、発散定理では単位長さあたりの量を$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=b_0\delta(r)$に、ストークスの定理では$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{b}_0\delta(r)$としている。

円柱より外側の空間において、円柱を中心とする半径 $r$ の平面を考える。ガウスの発散定理により、円周上では径方向を向くベクトル $\boldsymbol{A}$（その成分を $A_r$）が、ストークスの定理では、円周方向に向くベクトル $\boldsymbol{A}$（その成分を $A_\varphi$）が存在する。それぞれの大きさは次式である。




(a) ガウスの発散定理　　　　　　　　　　(b) ストークスの定理

図 3.8　円筒座標で見る二つの定理の類似性

$$A_r=\frac{b_0}{2\pi r}\quad,\qquad A_\varphi=\frac{\boldsymbol{b}_0\cdot\hat{\boldsymbol{z}}}{2\pi r}$$

両式より、ベクトルの方向が異なるものの、式が同形になり、二つの定理の類似性（アナロジー）が理解できる。

### 3.7　時空間で双対な二つのベクトル関数が作り出す世界

二つの４次元ベクトル関数 $\boldsymbol{U}(x,y,z,t)$と $\boldsymbol{V}(x,y,z,t)$があって、一方の空間微分（回転）が相手の時間微分に等しくなる関係で結ばれていたとしよう。そのとき、お互いに発散は 0 としよう。これを、一般的な数学の双対問題として展開してゆくが、最後は自由空間での電波伝搬（平面波の伝搬)、すなわち、電磁気の世界に結び付けたい。ここで取り上げる双対関係を数式で表すと

$$\nabla\times\boldsymbol{U}=\alpha\,\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}\tag{3.21a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{V}=\beta\,\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t}\tag{3.21b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{U}=\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0\tag{3.21c}$$

であり、係数$\alpha$, $\beta$は実数値をもつ。

上記の連立方程式は容易に $\boldsymbol{U}$ と $\boldsymbol{V}$ の分離ができて以下のようになる。

$$\left(\nabla^2+\alpha\beta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{U}=0\tag{3.22a}$$

$$\left(\nabla^2+\alpha\beta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{V}=0 \tag{3.22b}$$

この解の一つとして、以下のような正弦変動がある（他にもいろいろの解があるので一般解ではない）。

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_0 e^{j(\omega t-kz)},\ \boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_0 e^{j(\omega t-kz)} \qquad \left(k=\pm\sqrt{-\alpha\beta}\,\omega,\ \alpha\beta<0\right) \tag{3.23a,b}$$

ここで、$\boldsymbol{U}_0$, $\boldsymbol{V}_0$ は任意の定ベクトル、係数 $\omega$, $k$ は実数である。このため $\alpha$ と $\beta$ の積 $\alpha\beta$ は負の値になることが要請される（一方が正なら他方は負）。

この解を元のに戻して、$\boldsymbol{U}$ と $\boldsymbol{V}$ の関係を見てみよう。

$$\boldsymbol{U}=U_x\boldsymbol{i}+U_y\boldsymbol{j}+U_z\boldsymbol{k}=\left(U_{0x}\boldsymbol{i}+U_{0y}\boldsymbol{j}+U_{0z}\boldsymbol{k}\right)e^{j(\omega t-kz)}$$

$$\boldsymbol{V}=V_x\boldsymbol{i}+V_y\boldsymbol{j}+V_z\boldsymbol{k}=\left(V_{0x}\boldsymbol{i}+V_{0y}\boldsymbol{j}+V_{0z}\boldsymbol{k}\right)e^{j(\omega t-kz)}$$

と置くと、(3.21a,b)式より

$$V_{0x}=\frac{k}{\alpha\omega}U_{0y}\ ,\quad V_{0y}=-\frac{k}{\alpha\omega}U_{0x}\ ,\quad V_{0z}=0$$

$$U_{0x}=\frac{k}{\beta\omega}V_{0y}\ ,\quad U_{0y}=-\frac{k}{\beta\omega}V_{0x}\ ,\quad U_{0z}=0$$

となり、$\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ 共に $z$ 方向成分を含まないことが分かる。また、上記の関係から

$$U_{0x}V_{0x}+U_{0y}V_{0y}=0$$

となり、二つのベクトルの内積が 0、すなわち、$\boldsymbol{U}$ と $\boldsymbol{V}$ は $xy$ 面内において直交するということがわかる。二つのベクトルの位相（時間に対する変化をする指数部分）が同じなので、ベクトルの大きさの比は常に一定で、以下になる。

$$\frac{V_{0x}}{U_{0y}}=-\frac{V_{0y}}{U_{0x}}=\mp\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}$$

ここまでを整理すると、(3.21)式の双対関係で表されるベクトル関数 $\boldsymbol{U}$ と $\boldsymbol{V}$ は、$k>0$ のとき、以下のような解をもつ。

$$\boldsymbol{U}=\left(U_{0x}\boldsymbol{i}+U_{0y}\boldsymbol{j}\right)e^{j(\omega t-kz)} \tag{3.24a}$$

$$\boldsymbol{V}=\left(V_{0x}\boldsymbol{i}+V_{0y}\boldsymbol{j}\right)e^{j(\omega t-kz)}=\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\left(-U_{0y}\boldsymbol{i}+U_{0x}\boldsymbol{j}\right)e^{j(\omega t-kz)} \tag{3.24b}$$

ここまで、純粋に数学問題を解いてきた。では改めて、マクスウェルの方程式を見てみよう。

電荷も電流もない自由空間に適用すると、以下の式になる。

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$$

ここで、前述の数学問題に対して

$$\boldsymbol{U}\to\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{V}\to\boldsymbol{H},\ \ \alpha\to-\mu_0,\ \ \beta\to\varepsilon_0$$

と言う対応付けをすれば、平面電磁波の波動方程式を解いたということになる。電界の方向を $x$ 軸方向にとる（$E_{0y}$=0）と次式になる。

$$E_x=E_{0x}e^{j(\omega t-kz)},\ \ H_y=\frac{E_x}{Z_0}\qquad\left(Z_0\equiv\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\approx377[\Omega]\right)$$

指数部分の $\omega t\text{-}kz$ を一定にして、この時間微分から波の進行速度を求めると、

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=c$$

となって、電波は横波、その速度は光の速度と言うことが示される。このように、物理の特性が、数学の結果にきれいに収まっている。

それなら、ベクトル関数 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$ などともったいぶった始まり方をせず、最初から、電界 $\boldsymbol{E}$ と磁界 $\boldsymbol{H}$ を使ってマクスウェルの方程式を解いてゆけばよかったのにと思うであろう。実際、電波工学の多くの教科書や本書の第４章ではそのようにしている。しかし、ここは、数学と物理の関係を述べる章、物理で示される特性は、数学が導く結果の中に含まれていますよ、数学が物理をしっかり支えていますよ、と言うことを強調したいために、このような書き方をしたのである。では、物理の醍醐味は何か。無味乾燥な数学問題に、物理量との対応付けを発見して、数式に命を与え、生きた世界を見る、と言うことにあるのではないだろうか。

目次のページへ戻る