

第4章 電磁波

～様々な視点で見る平面波伝搬～

電磁現象に関する問題を何でも解決できる武器：マクスウェルの方程式ではあるが、その武器を使いこなすのがまた難しく、電磁波工学（電波工学）という学問に発展している。電波を空間に送り出すアンテナ、種々の複雑媒質中の電波伝搬、高周波機器を構成するマイクロ波回路への応用などである。ここでは、その最も基本となる真空中での平面波の伝搬の式（波動方程式）を、マクスウェルの方程式から導いてみたい。このようにして生まれる電磁波は、それ自体エネルギーを運んでいる。その電力伝送は電界と磁界の外積で表されるポインティングベクトル $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ が担う。本章の前半では電界と磁界が相互に技を掛けあうようにして伝搬する電磁波の描像を示す。次に、2枚の完全導体平版で挟まれた空間内の電磁波伝搬を通して、位相速度と群速度を学ぶ。最後に、電気回路の授業で学ぶ分布定数回路での電流・電圧伝送と自由空間での電磁界伝送とのアナロジーを示す。

注) 本章は初期公開版を 2023.12 に改訂したもの

4.3.4 項の記述強化と、コラム記事の差替え等

4.1 平面波の伝搬

本節の内容は、数学視点から、二つのベクトル関数の双対問題として3章の 3.7 節で取り上げているので、合わせて見てほしい。ここでは、電磁界問題として同様の定式化を行う。

真空中では、

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0, \mu \rightarrow \mu_0, \rho = 0, \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

である。このとき、(2.1)式のマクスウェルの方程式を、今度は、電波（電磁波）で使われる \mathbf{E} と \mathbf{H} だけを用いて表すと以下になる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (4.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (4.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4.1d)$$

簡単のため、電界の変化が z 方向のみに起きる（＝電磁界が xy 平面上では一定で、それが z 方向に進む、すなわち平面波）として、電界と磁界を以下の式で表す。（この仮定が間違っていれば最終的に解が得られないことによってその間違いに気付くことができる。実際、

間違いでないなのでこの仮定でうまくゆく。)

$$\mathbf{E}(z, t) = E_x(z, t)\mathbf{i} + E_y(z, t)\mathbf{j} + E_z(z, t)\mathbf{k} \quad (4.2a)$$

$$\mathbf{H}(z, t) = H_x(z, t)\mathbf{i} + H_y(z, t)\mathbf{j} + H_z(z, t)\mathbf{k} \quad (4.2b)$$

これを(4.1a), (4.1b)式に代入すると、それぞれの成分より次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, & \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, & 0 &= -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, & \frac{\partial H_x}{\partial z} &= \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, & 0 &= \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{aligned}$$

上記それぞれの行の最後の式より、 H_z, E_z は時間変動をしないこと（静電界・静磁界）になるが、ここでは、時間変動する波動を扱っているのであるから、その波動成分に関して言えば

$$E_z = H_z = 0 \quad (4.3)$$

となる。これは、進行方向に成分を持たない波動、すなわち電波は横波であることを意味している（注1）。

(4.1a)式の両辺に、回転、すなわち $\nabla \times$ を作用させ、そこに、(4.1b)式を代入して、 \mathbf{E} のみの式にすると

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

を得る。上式の左辺はベクトル公式と(4.1c)式より、 $-\nabla^2 \mathbf{E}$ となるので、次式となる。

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (4.4)$$

(4.2a)式で与えた電界が x 方向のみに成分を持つものに着目すると、(4.4)式は

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (4.5)$$

となる。この方程式を **1次元の波動方程式**という。

上式で与えられる波動方程式の一般解は $f(z), g(z)$ を任意の関数とし

注1) 進行方向 (z 軸方向) に振動する波は縦波で音波が代表である。電波にもスカラー波（あるいはテスラ波）と呼ばれる縦波があると言う都市伝説があるが、マクスウェルの方程式からは出てこない疑似科学。2003年には、人体に危険なスカラー波を白装束で防ぐと言う集団のニュースがあった。

$$E_x = f(z-ut) + g(z+ut) \left(u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \right) \quad (4.6a)$$

で与えられる。右辺第1項は速度 u で z 軸の正方向に進む波、第2項は負の方向に進む波である。速度 u は光が進む速度 c と一致する。

磁界 H も得られた E_x を用いて(4.1b)式より求められ、その結果、 y 方向成分のみになる。

$$H_y = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \{f(z-ut) - g(z+ut)\} \quad (4.6b)$$

今日、電波も光も同じ電磁波の性質を持つと理解されている。

(4.6)式は、任意波形に対する伝搬を表しているが、正弦波（角周波数 ω ）の場合には、

$$E_x = E_1 e^{j(\omega t - kz)} + E_2 e^{j(\omega t + kz)} \quad (k \equiv \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2\pi / \lambda, \lambda: \text{電波の波長}) \quad (4.7a)$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \{E_1 e^{j(\omega t - kz)} - E_2 e^{j(\omega t + kz)}\} \quad (4.7b)$$

となる。ここで、 E_1, E_2 は任意の定数である。また、電界と磁界の比を与える係数

$$Z_0 \equiv \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 [\Omega] \quad (4.8)$$

は自由空間の固有インピーダンスと呼ばれる。

実際に空間を飛ぶ電波は実数信号である。物理空間においては実数信号しか観測できるすべがない、と言ってもよい。正弦波信号の z 軸正方向に伝搬する平面波では、 $\text{Re}[E_x] \propto \cos(\omega t - kz)$, $\text{Re}[H_y] \propto (\cos(\omega t - kz)) / Z_0$ のかたちになる。しかし、数式演算を行う過程においては複素数のまま扱う方が簡易であるので、最後まで複素数表示を維持することも多い。この電波信号の真実が、実数信号なのか、我々に見えない世界を含んで複素数であるのかは、宗教論争と同じで、決着をつけるのは難しい。（当然ながら、現実に見える物理現象は、いずれの宗派でも同じ結論になる）

図 4.1 は、本節のまとめとして、マクスウェルの方程式が表す電波の発生と電波の伝搬の関係、そして、上式で表される電界と磁界の関係を描いている。さらに、この平面波の伝搬部分に着目し、電界と磁界が相互作用して（=技をかけあうようにして）持続する様子を図 4.2 に示す。電界を $\sin(\omega t - kz)$ としてスタートし、アンペア・マクスウェルの法則を経て磁界に、さらに、電磁誘導の法則により電界に戻る様子を示している。電界からスタートしてまた電界に戻る一周の動作の際に、微分や積分によって正弦変動に対する係数が増えてくるが、一周後の係数 $\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 / k^2$ が 1 になることより、このサイクルは持続することが分かる。

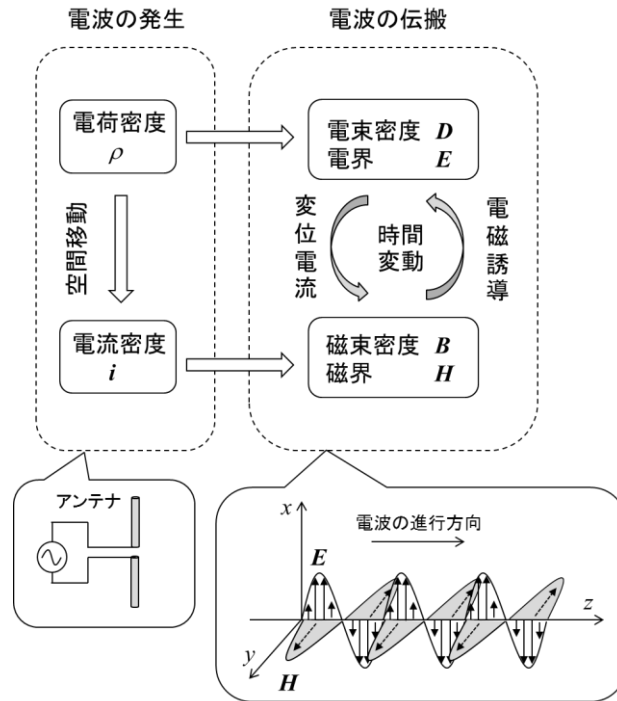


図 4.1 マクスウェルの方程式が表す電波の発生と平面波伝搬における電界と磁界の関係

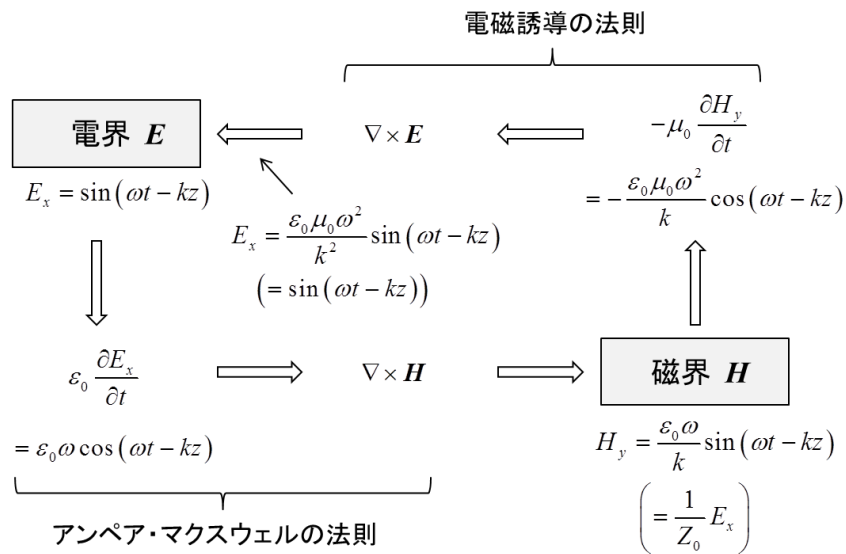


図 4.2 平面波伝搬における電界と磁界の関係（電界と磁界の相互作用によって電磁界が維持される）

平面波は電界にも磁界にも直交する方向、すなわち、 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ の方向に進むことがわかった。この電界 E と磁界 H は場のエネルギーとして単位体積当たりそれぞれ

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2, \quad u_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \quad (4.9a,b)$$

を蓄えている。 u_e は電界のエネルギー密度、 u_m は磁界のエネルギー密度で、単位は $[\text{J}/\text{m}^3]$ である。このエネルギーが光速 c で運ばれるので、単位面積当たり運ばれる電力 P (単位面積当たり、1秒当たり運ばれるエネルギー) は

$$\begin{aligned} P &= (u_e + u_m)c = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \\ &= EH \quad \left(\because E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H, H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E \right) \quad [\text{W}/\text{m}^2] \end{aligned} \quad (4.10)$$

となる。伝搬方向を含めてベクトルで表すと次式である。

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (4.11)$$

この電力の流れを表すベクトル \mathbf{P} はポインティング (Poynting) ベクトルと呼ばれる。電波がエネルギーや情報を運ぶ原動力はこのポインティングベクトルである。(注: Poynting vector の呼び名は、電磁エネルギーの保存則を示した John Henry Poynting に由来する)

式(4.6)より、情報やエネルギーをもつ波形の伝送速度が光速であることが示されたが、波形は位相の変化を含む全体であるので位相の動く速度 (位相速度) も光速である。位相速度のみであれば、(4.7)式の指数部を “ $\omega t - kz = \text{一定}$ ” として両辺を t で微分し、光速を導くこともできる。

上記をまとめると、真空中を伝搬する電波 (電磁波) の性質は以下のとおりである。

- ① 電波は電界と磁界で構成される
- ② 電波は光の速度で進む
- ③ 電波は進行方向に成分を持たない横波である
- ④ 電界と磁界は進行方向と直交する面上にあり、かつ、電界と磁界も直交する
- ⑤ 電界と磁界の強さの比 Z_0 は $Z_0 \equiv \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377 [\Omega]$ である (Z_0 は自由空間の固有インピーダンスと呼ばれる)
- ⑥ 電波は単位面積当たり EH の電力を光速で電波の進行方向に運ぶ。方向も含めてベクトル \mathbf{P} で表すと $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ である (このベクトル \mathbf{P} はポインティングベクトルと呼ばれる)

次節では、エネルギー (電力) や情報の伝送速度と位相速度が異なる場合について学ぶ。

4.2 導波路内の電磁波と群速度

前節で述べた自由空間の平面波の伝搬では、位相速度も信号やエネルギーの伝送速度も光速であった。伝送路が周波数特性を持つ（分散性と呼ばれる）と、エネルギーや情報の伝送速度が位相速度と異なるものになり、この速度は群速度と呼ばれる。又、広帯域信号に対しては波形の歪も生じる。ここでは、上下2枚の平行無限大平板中の電磁波の伝搬を題材に群速度の概念を学ぶ。なお、同様の技術として管路による導波管伝送がある。ここで学ぶ導波路伝送は、矩形導波管の基本モード TE_{10} に相当する。

4.2.1 境界条件

ここでは、2枚の無限大完全導体平板を一定間隔離して配置し、この空間内の電磁波伝搬を考える。この中を伝搬する電磁界は導体面における境界条件を満たさなければならず、その結果として、伝搬できる形（モード）は限られたものになる。初めに、完全導体の境界条件について示す（誘電体・磁性体等の境界条件の一般式は電磁波工学の教科書で学んでほしい）。

図 4.3(a)に示すように、完全導体の境界面において矩形の微小積分路を考える。電磁誘導の法則の積分形

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

を適用すると、 $\delta h \rightarrow 0$ では右辺の積分が 0 に収束するので、電界の接線成分 E_{n1}, E_{n2} に対して

$$E_{n1} - E_{n2} = 0 \rightarrow E_{n1} = 0 \quad (\because E_{n2} = 0) \tag{4.12}$$

となり、境界面では電界の接線成分は 0 となる。

一方、磁界に関しては、ガウスの法則の積分形

$$\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

を、図 4.3(b)に示すように、境界面を含む微小円筒に適用し、 $\delta h \rightarrow 0$ とすると

$$B_{n1} - B_{n2} = 0 \rightarrow B_{n1} = B_{n2} \quad (H_{n1} = H_{n2}) \tag{4.13}$$

となり、法線成分が境界面で連続になる。

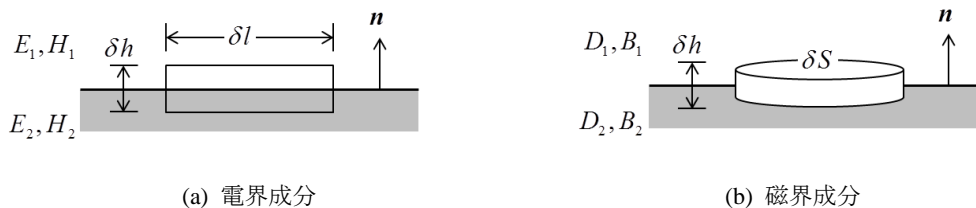


図 4.3 完全導体の境界条件

4.2.2 伝搬モード

個々の平面波は基本的に直進するのみで、自らが形を変えることはできない。ゆえに、複数の平面波が境界条件を満たすように合成され、伝送モードが形成される。図 4.4 に示す間隔 a 離れた 2 枚の無限大平板に囲まれた空間での電磁波を考える。ここでは、同図に示すように、角度 θ と $-\theta$ に進む 2 波がモード形成の役割を担う。それぞれの平面波の電界が y 軸方向にある場合には、 $x=0$ と $x=a$ で $E_y=0$ となるように伝搬角度 θ が自動的に決まる。ただし、この角度 θ は間隔 a と波長 λ によって、複数存在する場合もあるが、その中の最も小さい値は

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{2a}\right) \tag{4.14}$$

となる。伝送できるモードの波長条件は $\lambda < 2a$ であり、 $2a$ より長い波長 ($=c/2a$ より低い周波数) は遮断される。伝送モードの電界 E_y は次式で表される。

$$\begin{aligned} E_y(x, z, t) &= \frac{j}{2} E_0 \left[\exp\{j(\omega t - k_x x - k_z z)\} - \exp\{j(\omega t + k_x x - k_z z)\} \right] \\ &= E_0 \sin k_x x \exp\{j(\omega t - k_z z)\} \end{aligned} \tag{4.15}$$

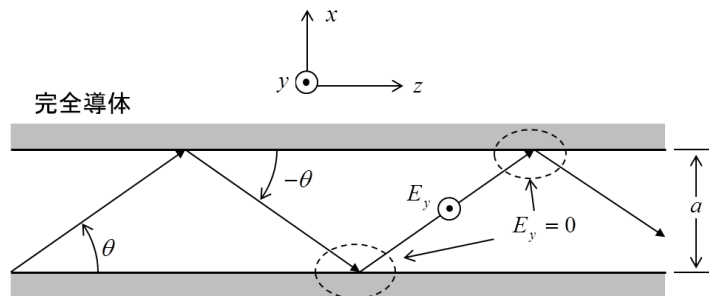


図 4.4 並行導体板間の電磁波伝搬

$$k_x = k \sin \theta = \frac{\pi}{a} \tag{4.16a}$$

$$k_z = k \cos \theta = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \tag{4.16b}$$

このように、進行方向 z に対して、電界成分が直交する電磁波モードは TE 波と呼ばれる。磁界成分は $E_y \rightarrow A_y$ (ベクトルポテンシャルの y 方向成分) $\rightarrow H_y, H_x$ の手順により求められ

$$A_y = -\int E_y dt = \frac{jE_y}{\omega} \quad \left(\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \text{ より} \right)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}$$

$$H_x = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{k_z}{k} \frac{E_y}{Z_0} \quad (4.17a)$$

$$H_z = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_y}{\partial x} = j \frac{\pi}{kaZ_0} \cos k_x x \exp\{j(\omega t - k_z z)\} \quad (4.17b)$$

進行方向に直交する電界と磁界の比は波動インピーダンス Z と呼ばれ次式になる。

$$Z = \frac{E_y}{-H_z} = \frac{k}{k_z} Z_0 = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (4.18)$$

3成分の平均エネルギーの比は

$$\varepsilon_0 \langle |E_y|^2 \rangle : \mu_0 \langle |H_x|^2 \rangle : \mu_0 \langle |H_z|^2 \rangle = 1 : 1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 : \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 \quad (4.19)$$

となり、電界と磁界の平均エネルギーは等しいこと、磁界エネルギーはその一部が z 方向成分（進行方向成分）に変わっていることが分かる。ここで求めたモードは矩形導波管の伝搬モード TE_{10} （本書では、10.6節で扱っている）と同じと理解してほしい。

同様に、磁界成分が進行方向 z に対して直交するモードもあり、**TM** 波と呼ばれる。境界条件を満たす **TM** 波の電磁界については練習問題としたい。

4.2.3 位相速度と群速度

式(4.15)で表される電磁波の位相は $\omega t - k_z z$ の部分である。この位相の時間微分を求めて 0 と置くと、電波は止まって見えることになる。それを見る速度が位相速度になるので、そのようにして求めると、

$$\frac{d}{dt}(\omega t - k_z z) = 0 \rightarrow v_p = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\cos \theta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (4.20)$$

となる。この速度は、光速よりも早くなるが、見かけ上の速度であり、物理に反するものではない。

一方、エネルギーや情報は角度 θ で光速に進む波を z 軸に射影してきているわけであるから光速よりは遅く、 $c \cos \theta$ になるだろうと予想される。以下、これを見てゆきたい。

この伝送路は、間隔を a として物理的に決められているので、伝搬角度 θ は(4.16b)式より

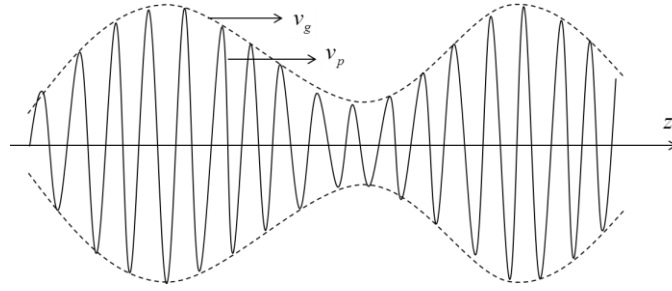


図 4.5 導波路における位相速度と群速度 ($v_g \neq v_p$ のとき、包絡線の形は距離の増加に対して歪んでくる)

周波数に依存する。そのため、 z 方向に対する波数 k_z も周波数の関数になる。このため、情報伝送時、帯域をもった信号は波形が歪むことになる。変調信号は例えば、図 4.5 のイメージで表される。この包絡線変動の速度 v_g を求めてみよう。

帯域幅 $\Delta\omega$ の振幅変調信号の伝送を考える。被変調信号 (送りたい情報信号) を正弦波信号とすると振幅変調信号は

$$\begin{aligned} V_{AM} &= V_0 (1 + m \sin \Delta\omega t) \sin \omega_0 t \\ &= V_0 \sin \omega_0 t + \frac{m}{2} V_0 \{ \cos(\omega_0 - \Delta\omega)t - \cos(\omega_0 + \Delta\omega)t \} \end{aligned}$$

である。これらの 3 周波数 ($\omega_0 - \Delta\omega$, ω_0 , $\omega_0 + \Delta\omega$) の信号は異なる波数で伝搬するため、伝送信号を $E_y(x, z)$ とすると、 $x=a/2$ の最大振幅部分の電界は

$$\begin{aligned} E_y(a/2, z) &\propto V_0 \sin(\omega_0 t - k_z z) \\ &+ \frac{m}{2} V_0 \left[\cos\{(\omega_0 - \Delta\omega)t - (k_z - \Delta k_z)z\} - \cos\{(\omega_0 + \Delta\omega)t - (k_z + \Delta k_z)z\} \right] \\ &= V_0 \{ 1 + m \sin(\Delta\omega t - \Delta k_z z) \} \sin(\omega_0 t - k_z z) \end{aligned}$$

となる。上式は搬送波の伝送信号に対して、 $\sin(\Delta\omega t - \Delta k_z z)$ の被変調信号 (ビート信号) が乗っていることを示している。群速度は情報信号の伝送速度であり、このビート信号の速度になる。群速度は、包絡線変動 (上式の $\{ \}$ の部分) を一定として求められるが、通常は、 $\Delta\omega/\omega_0$ が 1 より十分小さい場合の極限として $d\omega/dk_z$ で求められる。(4.16b) 式の k_z と λ の関係より

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \quad (4.21)$$

となる。これより、位相速度と群速度は、

$$v_p v_g = c^2 \quad (4.22)$$

の関係で結ばれる。群速度はエネルギーの伝送速度でもあることが調べられている（本書では、10.6節において矩形導波管の例で確認している）。

群速度が周波数の関数になる場合、伝送波形の歪を生み出すことを述べた。この歪は、伝送路が長くなるほど、帯域幅が広がるほど影響が大きくなる。信号帯域の両端の周波数間で斜め伝搬通路長の差 (ΔL) が波長に対して無視できなくなる時である。大雑把に言えば、 $\Delta L/\lambda < 0.1$ が望ましいであろう。導波管回路を机上で組み立てている場合には問題無いが、長距離配線する際にはこの波形歪を意識しておく必要がある。

4.3 LC 伝送線路と平面波伝搬のアナロジー

電磁波工学で学ぶ自由空間での電波伝搬と、電気回路で学ぶ分布定数回路 (LC 型伝送線路) には、その動作において、電界・磁界、電圧・電流と言う違いはあるが、考え方や解析手法に共通なもの (アナロジー) がある。本節では、円管同軸線路のような、電磁気学と電気回路の中間に位置するような伝送路を含めて、伝送メカニズムに関するアナロジーを整理してまとめる。

4.3.1 伝送原理

スカラー値で表される物理量 P と Q があり、これが z 軸方向に減衰なく伝搬しているとす。波の性質から、以下の関係を持つとする。（以下の式はスカラー関数の双対関係式であるが、このベクトル関数版は3章の3.7節で議論している。係数に同じ文字の α と β を用いているが、符号の取り方が異なっているので注意）。

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (4.23a)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -\beta \frac{\partial P}{\partial t} \quad (4.23b)$$

ここで、 α, β は伝搬の形で決まる定数であり、ここでは正の値を持つ実数を仮定する。

(4.23)式において、 P および Q は次式の方程式 (波動方程式) で表すことができる。

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \alpha\beta \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (4.24a)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = \alpha\beta \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \quad (4.24b)$$

この一般解は

$$P(z, t) = f(z - vt) + g(z + vt) \quad (4.25a)$$

$$Q(z,t) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \{f(z-vt) - g(z+vt)\} \quad (4.25b)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \quad (4.25c)$$

である。ここで、 f, g は任意の関数であり、 f は z 軸の正の方向に、 g は負の方向に進む波を表す。また、式中の v は波の伝搬速度を表す。

ここでは正方向の伝搬モードに着目しよう。角周波数 ω の正弦波信号に対しては、

$$P(z,t) = P_0 e^{j(\omega t - kz)} \quad (k = \omega\sqrt{\alpha\beta}) \quad (4.26a)$$

$$Q(z,t) = Q_0 e^{j(\omega t - kz)} \quad (4.26b)$$

で与えられる。 P_0 と Q_0 の比 Z は次式になる。

$$Z \equiv \frac{P_0}{Q_0} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad (4.27)$$

後で述べるように、この Z は特性インピーダンス（あるいは固有インピーダンス）と呼ばれる物理量になる。

ここまでの、波動伝搬の共通原理である。次項以降では以下に示す三つの伝送路について、伝送形態やエネルギー伝送の描像を示す。

- ・ LC 伝送線路
- ・ 円筒同軸線路
- ・ 自由空間の平面波伝搬

なお、以下では、非損失の伝送路、すなわち、 α, β が実数のもののみについて扱う。損失性のある媒質についても、ここでの解析が応用できる。

4.3.2 LC 伝送線路

微小区間 Δz ごとに図 4.6 に示す LC 回路が無限に従属接続される伝送路（分布定数回路）を考える。単位長さ当たりのインダクタンスを L [H/m]、静電容量を C [F/m] と定めると、 Δz 区間でのインダクタンスと静電容量は、それぞれ、 $\Delta z L$, $\Delta z C$ となる。この伝送路の特性インピーダンス Z_{LC} は、図の回路素子の右側ポートに負荷 Z_{LC} をつないだ状態で、左側入力ポートのインピーダンスが Z_{LC} であればよいので、

$$Z_{LC} = j\omega L \Delta z + \frac{1}{j\omega C \Delta z + \frac{1}{Z_{LC}}}$$

より、以下の値を得る。

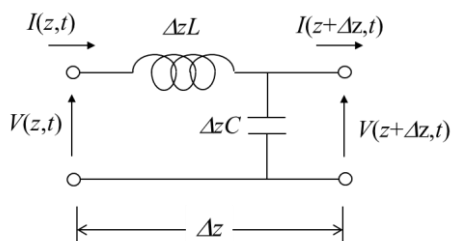


図 4.6 LC 伝送回路微小区間の等価回路

$$Z_{LC} = \frac{j\omega L \Delta z}{2} + \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{(\omega L \Delta z)^2}{4}} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\because \Delta z \approx 0) \quad (4.28)$$

以下、この構造を微視的に見てみよう。図 4.6 の伝送線路の長さ Δz における電圧と電流の変化は次の 2 式の微分方程式で表される。

$$\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = -L \frac{\partial I(z,t)}{\partial t} \quad (4.29a)$$

$$\frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = -C \frac{\partial V(z,t)}{\partial t} \quad (4.29b)$$

この式は、(4.23)式において、 $P \rightarrow V$, $Q \rightarrow I$, $\alpha \rightarrow L$, $\beta \rightarrow C$ に対応しているので、(4.25c), (4.27) 式より、伝送速度 v と特性インピーダンス R_0 は

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.30)$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.31)$$

となって、 R_0 は(4.28)式の Z_{LC} と一致する。角周波数 ω の正弦波信号の z 軸正方向進行成分について、電圧と電流は次式となる。

$$V(z,t) = V_0 e^{j(\omega t - kz)} \quad \left(k = \omega \sqrt{LC} \right) \quad (4.32a)$$

$$I(z,t) = I_0 e^{j(\omega t - kz)} \quad \left(I_0 = \frac{V_0}{R_0} \right) \quad (4.32b)$$

4.3.3 円筒同軸線路

電流の往路と復路をもつ導体線路の伝送を調べる。電流は導体線路上を流れ、電圧は導体間に電位差として存在する。一方、電流と電圧によって生み出される電磁界は導体間の空間に存在する。ここでは、導体間は自由空間とし、誘電率と透磁率は ϵ_0, μ_0 を用いるが、誘電体や磁性体であれば、それぞれが有する ϵ, μ に置き換えればよい。伝送線路にも、平行2線（レッヘル線）、平行平板伝送路、円筒同軸線路など様々なタイプがあるが、ここでは、円筒同軸線路を取り上げ、その伝送特性を調べる。他のタイプのものについても、線路定数 L, C を与える式が違うのみで、伝送のメカニズムそのものは皆同じである。

図4.7に示す円筒同軸線路の伝送特性を伝送モードという視点で4.3.1項の筋書きに従って解析を行う。具体的には、エネルギーを運ぶ2つのモードとして、中心導線（半径 a ）と外管（半径 b ）間の電圧 V とそこに流れる電流（導線と外管で反対向きに流れている） I によるモードと、管内の空間を伝搬する電界 E_r と磁界 H_ϕ による二つのモードを調べる。このとき、線路の寸法は伝送信号の波長に対して十分短く、伝送線路の長さは十分大きいとする。

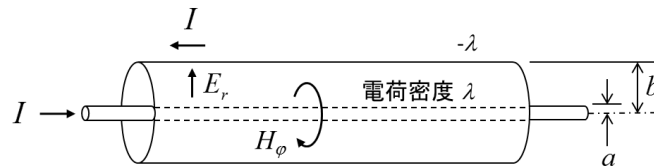


図4.7 円筒同軸ケーブル

最初に、電圧と電流による伝送をみる。単位長さあたりのインダクタンスが L と静電容量が C の同軸円管が無限に続く線路の伝送方程式は、前項(4.29)式がそのまま適用される。この時、 L と C は次式となる。

$$L = \frac{\mu_0 \ln(b/a)}{2\pi} \tag{4.33a}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} \tag{4.33b}$$

軸長が単位長さの円筒コンデンサの静電容量は容易に求められ説明は不要であろう。インダクタンスは以下のようにして求められる。単位長さの同軸円管内に蓄えられる磁気エネルギーは

$$U_{L0} = \frac{\mu_0}{2} \int H^2 dV = \mu_0 \pi \int_a^b \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 dr = \frac{\mu_0 I^2 \ln(b/a)}{4\pi}$$

であり、これがコイルが蓄えられる磁気エネルギー $LI^2/2$ に等しいとして L を求めれば(4.33a)式になる（上式第2辺中の V は電圧ではなく体積積分の意味）。

これより、線路を流れる電流の速度 v と線路の特性インピーダンス R_0 は次式となる。

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \quad (c: \text{光速}) \quad (4.34)$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (4.35)$$

式(4.34)より、この円管同軸線路に流れる電流は光の速度である。故に普通の電線に流れる電流の速度も、このような理想的な線路ではないにしても、光の速度に近いと言ってよいであろう（空間の材質が誘電体であれば、その分遅くなるが）。導線内の個々の荷電粒子が光の速度で移動しているわけではないこと（=実際、電子の動きはカタツムリの歩み程度）は第9章で述べるが、等価的な意味において光速で動いているように見えるということである。特性インピーダンスの式中の $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ は自由空間の固有インピーダンス Z_0 であり約 377Ω である。例えば、 $b/a=5$ とすると、同軸伝送路の特性インピーダンス Z_0 は約 100Ω になる。

この線路で単位時間に運ぶエネルギー、すなわち電力 P_{VI} は

$$P_{VI} = VI \quad (4.36)$$

である（注：交流信号なので平均電力が $V_0 I_0/2$ の意味である）。

次に、管内の空間を電界と磁界が電力を運ぶ視点でその動作を調べる。電界は軸と外管にかけられた電圧により軸方向に、磁界は中央の導線に流れる電流により周方向に成分を持つ。これらは、以下に与えられる。

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (a \leq r < b)$$

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi r}$$

ここで、 λ は導線の単位長さ当たりの電荷、すなわち電荷密度で、電圧 V とは以下の式で関係づけられる。

$$V = -\int_b^a E_r dr = \frac{\lambda \ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 V}{\ln(b/a)}$$

ポインティングベクトルは電流の流れている方向に向き、円管の断面で積分する量が単位時間あたりに移動するエネルギー、すなわち電力である。この電力を P_{EH} とすると、

$$P_{EH} = \int_0^{2\pi} \int_a^b E_r H_\phi r dr d\phi = 2\pi \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r} dr = VI = P_{VI} \quad (4.37)$$

となり、どちらのモードでも同じ伝送電力を示している。

このことから、同軸管の電力伝送は、導線の周りの空間に生まれるポインティングベクトル $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ が担っているとみなすことができる。ちなみに、電界 E_r と磁界 H_ϕ の比は、自由空間の固有インピーダンス Z_0 になっていることを確認してほしい。

4.3.4 自由空間における平面波の伝搬

電磁波の最も代表的な例として平面波の伝搬を 4.1 節で解説した。ここでは自由空間における平面波伝搬を伝送線路との対比の意味で要点のみをまとめる。電界の向きを x 軸、磁界の向きを y 軸とすると、電波の進行方向は z 軸に向く。マクスウェルの方程式より導かれる平面波の基本式は次式である。

$$\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} = -\epsilon_0 \frac{\partial H_y(z,t)}{\partial t} \quad (4.38a)$$

$$\frac{\partial H_y(z,t)}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} \quad (4.38b)$$

4.3.1 項で示した一般式との対応では、 $P \rightarrow E_x$, $Q \rightarrow H_y$, $\alpha \rightarrow \mu_0$, $\beta \rightarrow \epsilon_0$ である。これにより電波の伝搬速度 v と特性インピーダンス（自由空間の固有インピーダンス） Z_0 は次式である。

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \quad (4.39)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 [\Omega] \quad (4.40)$$

自由空間を LC 回路に置き換えてみると、 $v = 1/\sqrt{LC}$, $R_0 = Z_0 = \sqrt{L/C}$ と上式より、単位長さ当たりのインダクタンス L [H/m] と静電容量 C [F/m] は

$$L = \mu_0, \quad C = \epsilon_0$$

となり、きれいな形に収まる。

図 4.8 は自由空間における平面波の伝搬を LC 等価回路にまとめたものである。一辺が単位長さの正 6 面体を考え、この単位で自由空間を切り取ったとする。しかし実際には、波長に比べて無視できるサイズの微小空間なのであるが、表している数値、例えば、 L や C の値は、単位領域当たりに換算しているものと理解してほしい。同図左上は出発点、 E_x と H_y があり、 $E_x/H_y = Z_0$ である。同図右上は、この電磁環境を作り出すために、上面と下面に電荷密度 σ で均等に正負の電荷を配し、それを光速で z 軸正方向に動かしている。電界 E_x を得るためには、 $\sigma = \epsilon_0 E_x$ とすればよい。磁界 H_y は電荷の移動速度を光速とすることで自動的に得られている。そうすると、右下のように電流 I が $I = \sigma c$ で上下反対方向に面上を均一に流れていることになる。このとき、 x 軸方向には $V = E_x$ の電位差が生じている。面電流 I は、電荷が動いて得られ

たものなので伝導電流であるが、空間全体ではこの単位ユニットが上下に重ねられるので、電流そのものは打ち消されて無くなってしまう。全体で見れば、伝導電流はどこにも流れていないということである（自由空間なのだからそういうことにならなければおかしい）。領域ごとにある電圧 V と電流 I に対して、LC 等価回路をつくると、 $L=\mu_0, C=\epsilon_0$ になるのである（同図左下）（天井板と床板でできる平板コンデンサの静電容量は ϵ_0 になる）。

以上見て来たように、電気回路で扱われる伝送線路での伝送モードと電磁気学で扱われる電磁波伝搬ではその基本的式に共通性（アナロジー）があることが理解できたと思う。ここでは、自由空間の伝搬モードとして、電界と磁界が時空間領域で技を掛けあうようなかたちで、すなわち、相互作用の結果として、電磁波の伝搬が維持されているイメージを示したが、ベクトルポテンシャルを主役に据えると、また、別な形の電磁波伝搬の姿が見えてくる。これについては、次章（ベクトルポテンシャル）5.5 節で説明するので、興味を繋いでおいてほしい。

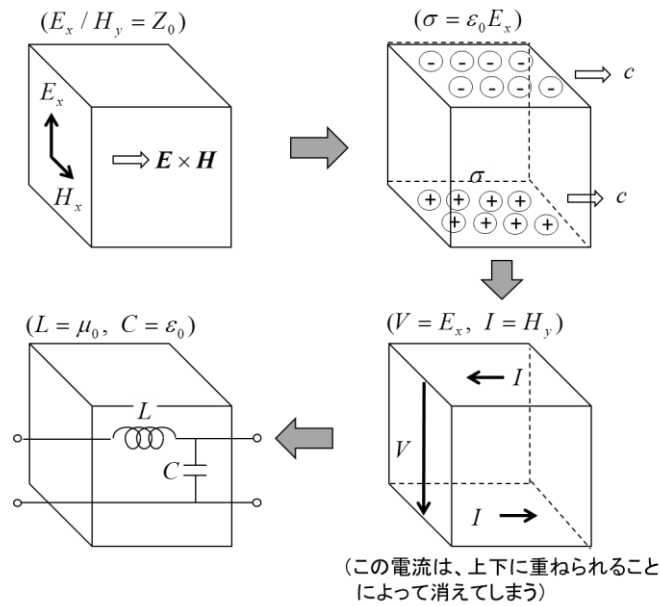


図 4.8 微視的に見る自由空間伝搬とその等価表現



ティータイム ヘルツによる電波の実証

マクスウェルが打ち立てた電磁気学（1865 年）では、その連立方程式から電波（電磁波）の存在が予言されていた。しかし、理論が難解で、その真意を掴みにくかったこともあって、ヘルツによる電波の実証（1888 年）に至るには、さらに 20 年以上の歳月を要している。ヘルツは二つの平板を両翼にし（=平板コンデンサを左右に広げたイメージ）、その中央の給電

部に誘導コイルが生み出す火花ギャップの雑音（周波数帯は70MHz付近）を与えて送信アンテナとした。そこから数メートル離れたところに、ギャップを有する導線ループ（円形や矩形）を置き、ギャップに現れる放電の有無で電波の受信を確認した。当時はまだ、光や電波のような横波が空間を伝わるためにはエーテルと呼ばれる奇妙な媒質が充満しているはずと考えられていた時代、ヘルツの実験成功は、エーテルの存在が実証されたと歓喜を持って受け止められたようである。

ところで、電波信号の初検出はヘルツの実験の9年前（1879年）にさかのぼるらしい〔注1〕。イギリスの音楽家D・ヒューズは炭素マイクにのる雑音の研究から電気の世界に入った。炭素棒を使った自作の雑音検出器を用い、その雑音は離れた場所に起きる電気火花が原因と突き止めた。雑音の到来が電波によるものと確信したヒューズは、1880年、物理数学者の大御所ストークス等を自宅に招いて、このデモ実験を行った。ところが、ストークスは「これは電波ではなく磁気誘導現象だ」と言い張り、見学が喧嘩に変わってしまった。落胆したヒューズは、もう電波の研究など止めてしまおうと誓ったそうである。そのまま続けていれば電波実証の栄誉は彼のものになったであろうに残念なことであった（この出来事は、ヒューズがヘルツの実験後に公表している）。

電磁気分野の発見や発明の歴史にはこのような逸話が多い。クーロンの法則（キャベンディッシュとクーロン）、オームの法則（キャベンディッシュとオーム）、電磁誘導の法則（ヘンリーとファラデー）、無線通信の発明（テスラとマルコーニ）などなど。

注1）徳丸仁，電波技術への招待，ブルーバックス B-350，講談社，p. 41-43，1978。（原典：J. Fabie, 1901.）

[目次のページへ戻る](#)