

## 第5章 ベクトルポテンシャル

### ～透明人間の正体を探る～

電磁気学では2種類のポテンシャルが出てくる。スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル、二つ合わせて電磁ポテンシャルである。スカラーポテンシャルは、静電界の説明の中で、電位という名前と呼ばれ、電荷  $q$  を電位  $V_1$  のところから電位  $V_2$  のところまで運んでゆくためには  $q(V_2-V_1)$  の仕事（エネルギー）が必要と学んで、ポテンシャルと言う意味が分かる。もう一方のベクトルポテンシャルは、以下のように教えられるのではないだろうか。「磁束密度  $\mathbf{B}$  は  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  だから、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  と表すことができる。なぜなら、ベクトル公式により  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$  であって、 $\mathbf{A}$  は  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  を自動的に満たしているからである。このベクトル場  $\mathbf{A}$  をベクトルポテンシャルと呼ぶ。」と。これだと、数学のお遊びのような気分になる。学部授業では、その働きが詳しく語られることも無く終わってしまう。次に現われるのは、より高度なレベルの電磁気学、すなわち大学院レベルの授業において、アンテナから電波が出てゆく解析にベクトルポテンシャルが大事な仲介役となることや、マクスウェルの方程式を二つのポテンシャルで書き直すときであろうが、普通はそこまで行かない。大方の人は「磁界って、何かその元になる渦巻きのものがあるらしい」に留まってしまっていることと思う。本章では、学部レベル（＝マクスウェルの方程式までは学んでいると言うレベル）で、ベクトルポテンシャルの働きが、直感的に理解できる説明をしてみたい。また、ローレンツゲージを用いて、マクスウェルの方程式を電磁ポテンシャルで書き表し、対称性に優れた美しい形になることを示す。また、その結果を利用したアンテナ放射界解析と、ベクトルポテンシャル視点での平面波伝搬の仕組みを述べる。なお、本章では磁束密度  $\mathbf{B}$  を磁場の意味で磁界と呼ぶことが多い。

---

注）本章は、初期公開版を 2023.12 に改訂したもの

4.6 節の内容追加、および、全体的な記述補強を行っている

#### 5.1 ベクトルポテンシャルの描像

電流が流れている電線の周りには、それを取り巻くように磁場の渦ができていて、中学校の理科や高校の物理で教えてくれる。原因（電流）と結果（磁場）の間がずいぶん飛んでいるような、そう、風が吹けば桶屋が儲かるの感を受けてしまう。物理法則であるのだから、自然界の仕組みとして受け入れなさいと言われればそうなのであるが、猫が減るからとか、ネズミが増えるからとか、もう少し途中が知りたいと思う。ベクトルポテンシャルはその間、すなわち、電流と磁場を繋ぐ役割を担う物理量である。

ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の定義は、磁束密度  $\mathbf{B}$  との関係において、次式で与えられる。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{5.1}$$

磁束密度  $\mathbf{B}$  は  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  だから、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  と表すことができる。なぜなら、ベクトル公式により  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$  であって、 $\mathbf{A}$  は  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  を自動的に満たしているからである。数学的にはそうであっても、これでは物理的な意味が見えてこない。定義式より、 $\mathbf{A}$  の単位は [Wb/m] (表 1.1 の MKSA 単位系の組立単位は [1,1,-2,-1]) である。

冒頭の話に戻って、電流と磁界の関係をおさらいしよう。電流  $I$  が  $z$  軸方向に流れているとする。この電流によって、電流の周りに渦を巻く磁界が発生し、 $z$  軸からの距離  $r$  に対して

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{5.2}$$

である。上述のように非常に唐突な感じを受けるが、これは法則であるから理由の説明はない。この  $I$  と  $\mathbf{B}$  の関係に今定義したベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を加え、 $I, \mathbf{A}, \mathbf{B}$  の関係を図 5.1 で見てみよう。

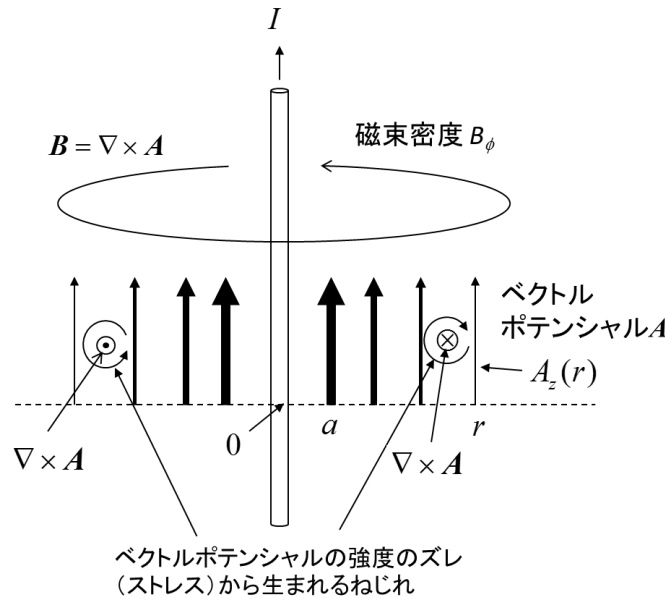



図 5.1 直線状電流に対する磁界とベクトルポテンシャル

(描像：電流と並行してベクトルポテンシャルがあり、その強さは電流から離れるほど弱くなる。そのためベクトルポテンシャルは  $z$  方向に対してストレスをもち、そこにベクトルポテンシャルの回転 (図中に示した捻じれ： $\nabla \times \mathbf{A}$ 、ただし、ベクトルの向きは  $\phi$  方向) が生じ、その回転の軸 ( $\nabla \times \mathbf{A}$ ) は電流の周り (すなわち  $\phi$  方向) を一周している。それが磁界 (磁束密度) である)

$\mathbf{B} = B_\phi \hat{\phi}$  と置くと、式(5.1)の微分方程式からベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  は  $z$  軸成分  $A_z$  のみとなり、次式のように解ける。

$$A_z(r) = A_z(a) - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \tag{5.2}$$

基準点 ( $r=a$ ) からの差で表しているのは、微分方程式で定義される量の定数値 (積分定数) が決まらないためである。ベクトルポテンシャルは、電流と同じ向きである  $z$  方向に向き、かつ、

$r$ に対して徐々に弱くなるベクトル場である。3.4節の図3.6(a)で述べたように、向きと直交する方向に強度の違いがあるベクトル場(ストレスのある場、ただし、 $1/r$ である関係を除く)では、図中に  で示すように  $\phi$ 方向を軸とする捩れ(ベクトルポテンシャルの回転)が生じ、すなわち円周方向( $\phi$ 方向)に向くベクトル場  $\nabla \times \mathbf{A}$  が存在し、これが磁界(磁束密度  $\mathbf{B}$ )である。このように、 $I \rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ の動作でみると、 $I \rightarrow \mathbf{B}$ で抱いた唐突感が幾分和らぐであろう。

著者はベクトルポテンシャルに関して一つの描像を持っている。それは、物理空間が粘性の強い液体(水飴みたいな)で埋まっているとする。その中に長い棒があり、電流の流れる方向にその棒が動いているとする。この棒の動きを電流とすると、棒の周りの粘性液体は、棒に引きずられて、同じ方向に、近くのは強く、遠くのは弱く動く。これが、図5.1のケースにおけるベクトルポテンシャルの大きさ向きである。同様に、この後述べる図5.3の無限ソレノイドについても、ベクトルポテンシャルの向き(粘性液体の動き)は、中も外も電流の向き(同心円)になっている。ベクトルポテンシャルは電流に寄り添うように(あるいは、まとわり付くように)生まれている場と捉えることができる。相対性理論によってその存在が否定されたエーテル(光や電波の伝搬を担う空間物質)を彷彿させるような説明で、若者にお勧めできるものではないが、著者の中でのイメージ作りには役立っている。

## 5.2 スカラーポテンシャルとの関係

### 5.2.1 ポテンシャルの意味

スカラーポテンシャル(電位)  $\phi$ とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$ の両方をあわせて電磁ポテンシャルと呼ばれる。ここでは、ポテンシャルと呼ばれる意味を見てみたい。

力学において、位置エネルギーはポテンシャルエネルギーと呼ばれる。力の場において、質量  $m$ の物体を  $a$ 点から  $b$ 点まで移動させるときに必要なエネルギー  $U$ が、 $U=m\{X(b)-X(a)\}$ で表されるときの場合  $X$ をポテンシャルと言う。これを電磁力で見よう。

最も簡単な例として、点電荷が作る電界内の点電荷  $q$ に働く力(クーロン力)と、平行に置かれた2本の直線状電流の間に働く力(電流  $I$ が流れる長さ  $l$ あたりに働くアンペアの力)を考えよう。それぞれに働く力は次式である。

$$F_E(r) = qE_r(r) \quad (r: \text{球座標の } r \text{ 方向で原点から放射状に向く}) \quad (5.3a)$$

$$F_M(r) = IlB_\phi(r) \quad (r: \text{円筒座標の } r \text{ 方向で } z \text{ 軸に直角方向}) \quad (5.3b)$$

この電荷  $q$ 、あるいは電流  $I$ を  $r=a$ から  $r=b$ まで動かすときに必要なエネルギーは次式である。

$$U_E = q \int_a^b E_r(r) dr = q(\phi(b) - \phi(a)) \quad (5.4a)$$

$$U_M = Il \int_a^b B_\phi(r) dr = Il(A_z(b) - A_z(a)) \quad (5.4b)$$

この式から、 $\phi$ や  $\mathbf{A}$ がポテンシャルと呼ばれる由縁が理解できるであろう。

## 5.2.2 両ポテンシャルの類似性

静電磁界における電界および磁界の基本式は次式である（磁界は時間的変化のある場でも共通）。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (5.5a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad ((5.1)式の再掲) \quad (5.5b)$$

微分の仕方は異なるが、共に、電磁ポテンシャルに対して一階の空間微分である点は共通である。しかし、電界は点電荷を中心に3次元的な広がりをもつ一方、磁界は線状に流れる電流を軸として2次元的に広がるので、その類似性をイメージとして捉えにくい。この土俵を共通とするため、電荷に対しても図5.2(a)のように電荷密度 $\lambda$  [C/m]で線状に分布する電荷列を考える。対する電流は同図(b)である。それぞれの電界及び磁界は

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}} \quad (5.6a)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (5.6b)$$

であるので、共に $1/r$ に比例する大きさを持つ。電界も磁界もベクトルであり、図中にその大きさと向きを模式的に示している。図5.2の構造におけるそれぞれの電磁ポテンシャルは、 $r=a$ での値を基準にして次式である。

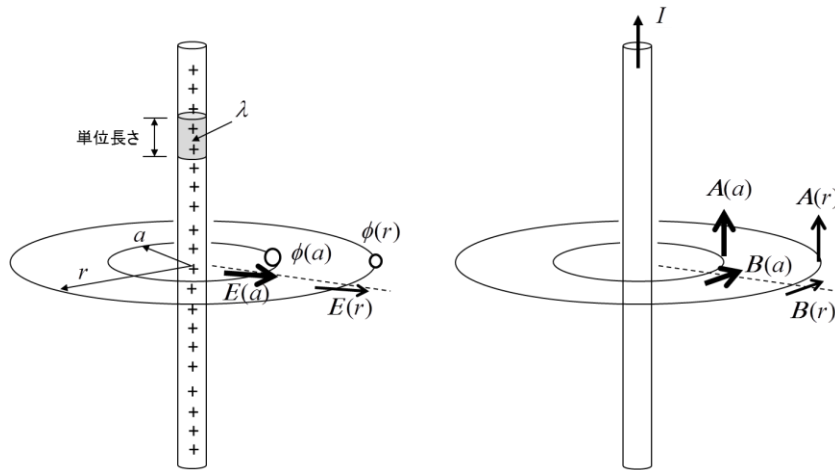
$$\phi(r) = \phi(a) - \int_a^r E dr = \phi(a) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad (5.7a)$$

$$A_z(r) = A_z(a) - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad ((5.2)式の再掲) \quad (5.7b)$$

電界が3次元的に広がる場合には、無限遠点で電位（スカラーポテンシャル）を0とする扱いが一般的であるが、2次元的な広がりの場合には $r \rightarrow \infty$ で0とおくことができない（＝絶対的な値が意味を持たない）ため、基準距離 $a$ に対する表現になる。一方はスカラー、もう一方はベクトルの違いはあるが、距離特性は同じになっており、ポテンシャルと言う意味で類似性（アナロジー）があることがわかる。なお、3章の図3.8において、ガウスの発散定理とストークスの定理の類似性を述べたが、図5.2はその物理現象版である。

## 5.3 ベクトルポテンシャルの実在問題

静電界における電界の相棒はスカラーポテンシャルである。(5.5a)式から明らかなように、スカラーポテンシャルがあるところには必ず電界がある。その逆もまた然りである。もちろん、スカラーポテンシャルが至るところ定数であれば、電界は0であるが、スカラーポテンシャルはその差（電位差）が物理的働きをもつのであるから、そのような場は物理的に意味がない。



(a) 電荷列が作る電界とスカラーポテンシャル (b) 電流が作る磁界とベクトルポテンシャル

図 5.2 静電磁界のアナロジー (スカラー量は○、ベクトル量は→、その強さは大きさや太さの違いで)

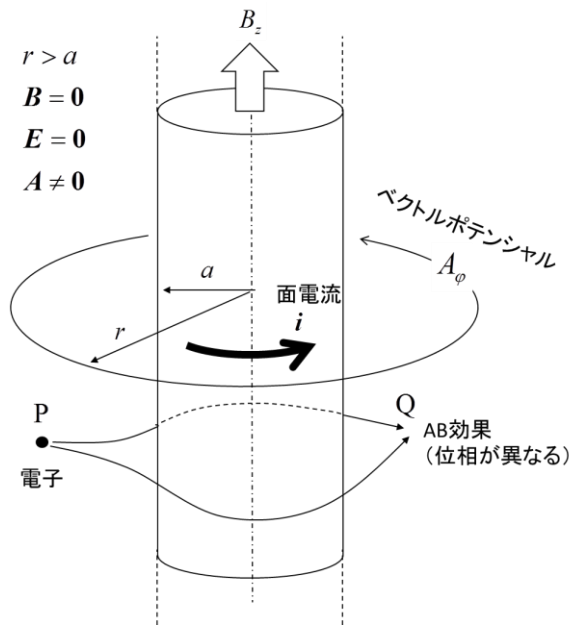


図 5.3 ベクトルポテンシャルが有って磁界がないケース

ところが、ベクトルポテンシャルに関しては、磁界がないところにもベクトルポテンシャルが存在するケースがある。図 5.3 がその例である。無限に長い中空の円筒パイプ (半径  $a$ ) があり、その円筒上を円周方向に電流密度  $i$  (単位幅あたりの電流  $I$ ) でループ電流が流れている (螺旋形に密に導線が巻かれていて、そこに電流が流れている無限ソレノイドと考えても良い)。磁界はこの円筒内の中空部分に、円筒の軸方向 (単位ベクトル:  $\hat{z}$ ) に均一に発生する。その大きさは、 $B_z = \mu_0 I$  である。xy 面上の円筒断面に対して、半径  $r$  の面  $S$  を考えると、

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \rightarrow \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \Phi_m \quad (5.8)$$

$$\Phi_m = \begin{cases} \mu_0 \pi r^2 I & (r < a) \\ \mu_0 \pi a^2 I & (r > a) \end{cases} \quad (5.9)$$

より、ベクトルポテンシャルは $\phi$ 成分のみとなり、次式である。

$$A_\phi = \begin{cases} \frac{\mu_0 r I}{2} & (r < a) \\ \frac{\mu_0 a^2 I}{2r} & (r > a) \end{cases} \quad (5.10)$$

円筒の外側 ( $r > a$ ) では、円筒座標の表記において、

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \quad (5.11)$$

となり、磁界  $\mathbf{B} (= \nabla \times \mathbf{A})$  が無いのにベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  だけはある、ということになる。もちろん、電界もないので(注1)、この場においては、電磁気学的な現象は何も起こらないはずである。それでは、ベクトルポテンシャルは、単なる数学的産物であって、物理的に存在するのかどうかと言う疑問が湧いてくる。電界は導線に対する起電力によって、磁界は磁針の振れによってその存在を感知できるが、ベクトルポテンシャルに対しては、それを直接測る装置(=感知するもの)が無いと言うことである。まさに透明人間。これに答え(=存在すると言う)を与えてくれたのが量子力学である。

量子力学の世界に、Y. Aharonov と D. J. Bohm が 1959 年、その存在を指摘したアハラノフ・ボーム効果 (AB 効果) というのがある。詳しくは、解説資料[1]を見て欲しいが、一言で言うと、ベクトルポテンシャルがある場では、電子を P 点から Q 点に移動させるとその位相変化(電子波の位相: シュレーディンガーの波動方程式で与えられる量子力学的な物理量)が経路上のベクトルポテンシャルに依存する、と言うものである。これを確認する実験は大変難しくなかなかできなかったが、日立製作所の外村彰博士が、1986 年、電子線ホログラフィーの手法を用いて、その存在を実証した(漏れの無い磁場を作るために超伝導の壁の中に閉じ込める等の難題克服の苦労話が解説記事[1]に)。これによって、ベクトルポテンシャルが単なる数学上の表現ではなく、実在する物理量であることが確かめられたのである。

---

注1: 電流を作る自由電子は負の電荷をもつが、同量の動かない正の電荷により、電気的には中和されていて電界は生まれない。

## 5.4 電磁ポテンシャルで表すマクスウェルの方程式

マクスウェルの方程式を、二つの電磁ポテンシャル（スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル）を用いて、より美しい形で表すことができる。むしろ、この形の方が本質だと言う見方もある。しかし、この部分の式の導出には、ゲージ変換と言う数学的テクニックが用いられるため、その理解は、学部学生には少し敷居が高いと感じる。難しいと言う意味ではなく、丁寧な説明が必要だと言う意味である。本節では、この美しい方程式が出来上がるまでを、丁寧に噛み砕いた形でまとめている。

### 5.4.1 ゲージ変換

式の導出には、ゲージ変換と言う数学的テクニックが用いられる。まずは、そのゲージ変換の意味を説明する。

求めたい量  $P, Q$  があり、以下のような  $x, y$  の関数で与えられるものとする。

$$P = f(x, y), \quad Q = g(x, y) \quad (5.12)$$

この  $x, y$  は次の連立方程式を解いて求められるものであるとする。

$$u(x, y) = 0, \quad v(x, y) = 0 \quad (5.13)$$

ところがこの連立方程式が複雑で、解くのが困難であるときどうしよう。もし、

$$u'(x', y') = 0, \quad v'(x', y') = 0 \quad (5.14)$$

ならば解けて、かつ、

$$P = f(x', y'), \quad Q = g(x', y') \quad (5.15)$$

で、 $P, Q$  の値が変わらないのであれば、その値を求めることが目的なのだから、 $x, y$  の代わりに  $x', y'$  であってもまったく問題が無い。  $x, y$  は荷物の配達役だと思えばよい。欲しい荷物を届けてくれるのなら  $x, y$  に限ることは無い。

(5.12)式と(5.15)式が同値となるための条件式

$$w'(x', y') = 0 \quad (5.16)$$

が存在すれば、(5.14)式と(5.16)式の連立方程式で解を求めることができる。このように、 $x$  と  $y$  のセットを  $P, Q$  の値が変わらないように  $x'$  と  $y'$  のセットに変換することをゲージ変換と呼ぶ。 $P, Q$  が  $x$  や  $y$  の時間・空間領域の偏微分を含むような場合に、積分定数（微分すると消えてしまうような量）に自由が利き、そういうような置き換えが可能になる。要は、 $P, Q$  と  $x, y$  が一対一対応でなく、不確実性が有る場合である。

ゲージ変換は、目的に合う解を求めることを容易にするための数学的テクニックであって、加えた条件式に物理的意味を求める必要はない。また、様々なゲージ変換が可能な中で、最も解法に見通しの良い変換式を見つけられるかどうかはセンスである。

## 5.4.2 電磁ポテンシャルを用いたマクスウェルの方程式

マクスウェルの方程式の4つの物理量  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  のうちの  $\mathbf{D}$  と  $\mathbf{H}$  を  $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}=\mathbf{B}/\mu$  を使って、電界  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  だけの方程式に変える。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.17a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \dot{\mathbf{i}} + \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5.17b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (5.17c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.17d)$$

次に、これらの式の  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  を、電磁ポテンシャル  $\phi$  (スカラーポテンシャル) と  $\mathbf{A}$  (ベクトルポテンシャル) に置き換えてゆく。

(5.17d)式は

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad ((5.1)式の再掲) \quad (5.18)$$

である。(5.17a)式の  $\mathbf{B}$  も  $\mathbf{A}$  に置き換えて整理すると次式になる。

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (5.19)$$

これより、

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5.20)$$

となる。(5.20)式右辺第1項は、静電界のときの  $\mathbf{E}$  と  $\phi$  の関係 ((5.5a)式) であり、これを加えても、(5.19)式が満たされるからである。

最終的に求めたい物理量は  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  であるが、式(5.18)と(5.20)により、二つの電磁ポテンシャル  $\phi$  と  $\mathbf{A}$  が求められればよいことになる。では、その  $\phi$  と  $\mathbf{A}$  が満たすマクスウェルの方程式を求めて行く。(5.17b)式と(5.17c)式の  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  を、 $\phi$  と  $\mathbf{A}$  により書き換えると次式が得られる。

$$-\left( \nabla^2 - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} + \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mu \dot{\mathbf{i}} \quad (5.21a)$$

$$\nabla^2 \phi + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (5.21b)$$

一応、これで、 $\phi$  と  $\mathbf{A}$  で表されるマクスウェルの方程式を得たが、式の形もアンバランスで美しくなく、かつ、解法も難しそうである。ここで、5.4.1 項で述べたゲージ変換の出番になる。

## 5.4.3 ローレンツゲージを用いたマクスウェル方程式の美しい形

次の展開のスタートラインの意味で、(5.20)式と(5.1)式を再掲する。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (5.22a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.22b)$$

$(\phi, \mathbf{A})$ のゲージ変換、すなわち、 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ が不変な $(\phi', \mathbf{A}')$ への変換法を探る。

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \quad (5.23)$$

と表される関数 $\chi$ の勾配を加えても (5.22b)式の形は変わらない。一方、(5.22a)式は影響を受ける。この影響を、

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (5.24)$$

とすることにより、(5.22b)式に影響を与えることなく打ち消すことができる。これが $(\phi, \mathbf{A})$ から $(\phi', \mathbf{A}')$ へのゲージ変換である。

この変換を、式(5.21)を見ながら、具体的にを行う。

もし、(5.21a)式の左辺第2項の中の勾配を求めるスカラー関数が0であれば、式が極めて簡潔になることに気がつく。すなわち、

$$\text{If } \nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad (5.25a)$$

$$\rightarrow \left( \nabla^2 - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\mu\mathbf{i} \quad (5.25b)$$

さらに、(5.25a)式の条件を(5.21b)式に加えると、以下のようになる。

$$\left( \nabla^2 - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (5.26)$$

式(5.25a)の条件式は、**ローレンツ条件**と呼ばれる。またこの変換のゲージは、**ローレンツゲージ**と呼ばれる(注2)。

---

注2：本書では「ローレンツ」が入る用語が3つ出てくる。ローレンツ力、ローレンツ変換、そしてこのローレンツゲージである。ローレンツ力のローレンツもローレンツ変換のローレンツもオランダの物理学者ヘンドリック・ローレンツ (Hendrik A. Lorentz) に由来する。一方、ローレンツゲージのローレンツはデンマークの物理学者ルドヴィヒ・ローレンツ (Ludvig V. Lorenz) に由来する。両者を区別するために、後者をローレンスと呼ぶ人もあり、その場合はローレンツゲージもローレンスゲージと呼ばれる。

---

なお、(5.25a)式を変形してゆくと(2.20)式で示した電荷保存則を表していることが調べられている（導出は例えば[2]の p.118。ただし、式(5.25a)から直接に電荷保存則が導かれるわけではなく、式(5.25b)と(5.26)を使って変形してゆくと、電荷保存則の式にたどり着くと言う意味）。因みに電荷保存式は次式である。

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{式(2.20)の再掲})$$

先に述べたように、ゲージの条件式に意味を求める必要は無いのであるが、電荷保存則の式であれば都合がよい。なぜなら、電荷保存則の式もマクスウェルの方程式から導かれる式（＝マクスウェルの方程式の中に隠れている式）であり、(5.25b)と(5.26)のそれぞれから得られる  $\mathbf{A}$  と  $\phi$  は、その大部分において、(5.25a)式を満たしていると期待できるからである。すなわち、最後の段階で、(5.25a)式に代入して満たされていることを確認すればよいということになる。

いよいよ、最後の詰めに。式(5.25b), (5.26)で示した  $\phi, \mathbf{A}$  は、元の式(5.21)の  $\phi, \mathbf{A}$  とは違うもの（＝ローレンツゲージで変換されたもの）になっているので、これを  $\phi', \mathbf{A}'$  と置き直し、二つの方程式とその条件式を整理すると次式になる。

$$\square \mathbf{A}' = -\mu \mathbf{i} \quad \left( \square \equiv \nabla^2 - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \quad (5.27a)$$

$$\square \phi' = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (5.27b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \varepsilon \mu \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0 \quad (5.27c)$$

式中の演算子

$$\square \equiv \nabla^2 - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

は**ダランベール演算子**（ダランベルシアン）と呼ばれる。

式(5.27a), (5.27b)は対称性に優れた非常に美しい形である。複雑な2つの連立方程式が、きれいな形の3つの連立方程式（＝解ける形になっている）に変わったわけである。この解法は、(5.27a)式から  $\mathbf{A}'$  を、(5.27b)式から  $\phi'$  を独立に解き、それぞれの中に不確定性を持つ組の中で、(5.27c)式を満たす解を定める手順になる。このようにして求めた  $\phi', \mathbf{A}'$  を(5.22)式の  $\phi, \mathbf{A}$  に代入することによって、目的の物理量  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  を得ることができる。

以下は、求めた方程式(5.27)の解について、若干触れたい。整理された式(5.27)を見ると、電荷がスカラーポテンシャルを、電流がベクトルポテンシャルを作ると読み取れる。しかも、一方がスカラー場を、もう一方がベクトル場を作ると言う違いを除いて、場の構造が同じであることがわかる。この美しさを見ると、電磁場の本質的な物理量は、電界と磁界は二次的なもので、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルがそれにあたると言って良さそうに見えるがどうで

あろうか？さらに、(5.27a,b)式はそれぞれのポテンシャルに関する波動方程式の形であり、電磁気学の本質は、波動にあるといっても良いのかもしれない。

式(5.27)から $\phi', \mathbf{A}'$ を求める方法も確立されている。具体的な解は、電荷や電流の置かれている環境に依存して多様なものになる。一般には、デルタ関数で表される点波源の解を表すグリーン関数を用いて解かれるが、その詳しいことはアンテナ解析を扱う電磁波工学で学んでほしい。

時間変動の無い場合（静電磁界）とある場合（動電磁界）について結果式のみを示しておく。まず、時間変動の無い静電磁界の場合、(5.27)式の時間微分項を0として、 $\phi', \mathbf{A}'$ を $\phi, \mathbf{A}$ と置きなおすと(5.27a), (5.27b)式は次式となる。

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{5.28a}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{i} \tag{5.28b}$$

式(5.28)は、スカラーポテンシャル・ベクトルポテンシャルに関するポアソンの方程式と呼ばれ、それぞれの解は

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \tag{5.29a}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \tag{5.29b}$$

となる。真空中の原点に点電荷  $Q$  がある場合には、(5.29a)式は、デルタ関数を用いて $\rho(\mathbf{r}')=Q\delta(\mathbf{r}')$ と置き換えられ、 $\phi=Q/(4\pi\varepsilon_0 r)$ となって、お馴染みの電位の式になる。同様に、原点に電流素片を置けば、(5.29b)式はビオ・サバールの法則に行き着く。

時間変動のある動電磁場については形式的には $\rho$ や $\mathbf{i}$ の変数の $\mathbf{r}', t'$ の $t'$ について、 $t' \rightarrow t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v$ （真空中では $v$ は光速 $c$ ）と変換した次式となる（詳しくは、例えば[3]の10.6.3項）。

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (v: \text{媒質中での電磁波の速度}) \tag{5.30a}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \tag{5.30b}$$

図5.4はこれまでの議論に基づき、電磁界( $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ )、電磁ポテンシャル( $\phi, \mathbf{A}$ )、電磁界の発生源( $\rho, \mathbf{i}$ )の関係を整理してまとめている。（ここまで、ベクトルポテンシャルとの対応で磁場を磁束密度 $\mathbf{B}$ で代表してきたが、この後、電磁場の伝搬に話を繋げるため、図5.4では磁場を磁界 $\mathbf{H}$ にしている）。

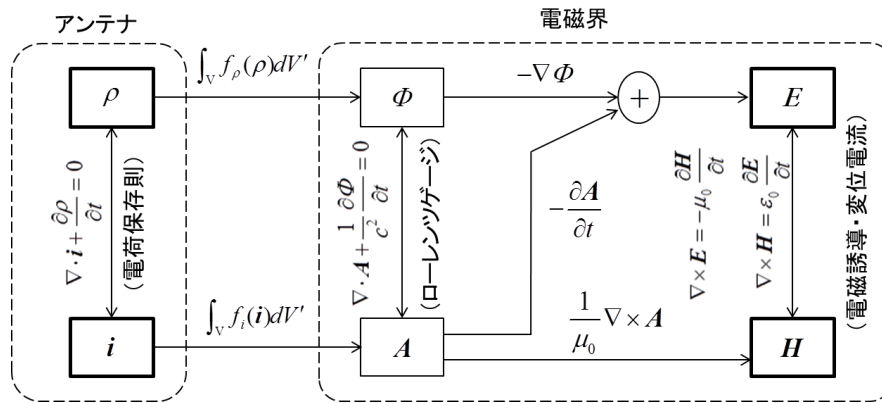


図 5.4 電磁界の発生源 ( $\rho, \mathbf{i}$ )、電磁ポテンシャル( $\phi, \mathbf{A}$ )、電磁界( $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ ) の関係

### 5.5 アンテナの放射界

電磁界解析においては、電磁ポテンシャル、特にベクトルポテンシャルが活躍する。その代表例として、微小ダイポールアンテナの放射界を求めてみよう。

波長に比べて十分短い長さの直線状アンテナは**微小ダイポールアンテナ**と呼ばれる。図 5.5(a)に示すように、給電はアンテナの中央部から行う。給電電流  $I$  を

$$I(t) = I_0 e^{j\omega t} \tag{5.31}$$

とする。ここで、 $\omega$ は角周波数である。アンテナの長さ  $dl$ は波長より十分短いため、電流はこの導線上を一様に流れる。電荷保存則より、ダイポールの両端には電流によって送り込まれた正負等量の電荷が蓄えられることになる。

球座標の原点に置かれた微小ダイポールアンテナが作る電磁界を距離  $r$  の点において求めることが本節の目的である。

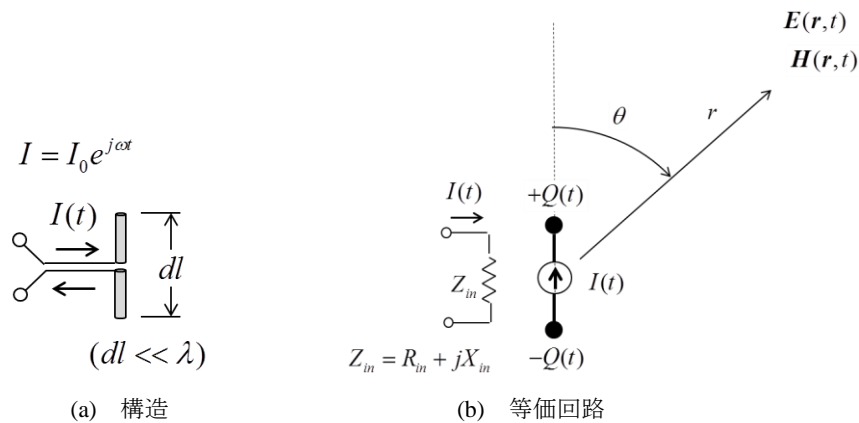


図 5.5 微小ダイポールアンテナの構造とその等価回路

微小ダイポールアンテナが生み出す電界  $\mathbf{E}$  を求める。図 5.4 より、以下の二つの手順（方法）があることが分かる。

方法 1 : 電流密度  $\rightarrow$  ベクトルポテンシャル  $\rightarrow$  磁界  $\rightarrow$  電界

方法 2 : 電荷密度と電流密度  $\rightarrow$  スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル  
 $\rightarrow$  電界 ((5.20)式による)

当然同じ解になるはずであるが、その確認の意味で両方法で求めてみよう。

### (1) 方法 1

(5.30b)式より、この場合のベクトルポテンシャルは次式となる。式中の  $k$  は波数  $2\pi/\lambda$  である。

$$A_z = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r} e^{-jkr} \quad (5.32a)$$

$$A_r = A_z \cos \theta = \frac{\mu_0 Idl \cos \theta}{4\pi r} e^{-jkr} \quad (5.32b)$$

$$A_\theta = -A_z \sin \theta = -\frac{\mu_0 Idl \sin \theta}{4\pi r} e^{-jkr} \quad (5.32c)$$

$$A_\phi = 0 \quad (5.32d)$$

磁界は(5.22b)式および(1.3c)式より

$$\mathbf{H}_\phi = \frac{Idl \sin \theta}{4\pi r} \left( jk + \frac{1}{r} \right) e^{-jkr}, \quad H_r = H_\theta = 0 \quad (5.33)$$

さらに、電界は、観測点には伝導電流は無いので、(5.17b)式より

$$\mathbf{E} = -j \frac{\nabla \times \mathbf{H}}{\omega \epsilon_0} = -j \frac{Z_0 \nabla \times \mathbf{H}}{k} \quad (Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} : \text{自由空間の固有インピーダンス}) \quad (5.34)$$

であり、(5.3)式と(1.3c)式より、次式となる。

$$E_r = \frac{Idl Z_0 \cos \theta}{2\pi} \left( \frac{1}{r^2} - j \frac{1}{kr^3} \right) e^{-jkr} \equiv E_{r1} + E_{r2} \quad (5.35a)$$

$$E_\theta = \frac{Idl Z_0 \sin \theta}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} - j \frac{1}{kr^3} \right) e^{-jkr} \equiv E_{\theta0} + E_{\theta1} + E_{\theta2} \quad (5.35b)$$

$$E_\phi = 0 \quad (5.35c)$$

これより、距離に関して  $1/r$ 、 $1/r^2$ 、 $1/r^3$  の三つの成分が生まれていることが分かる。電界成分として遠方まで伝搬するのは  $1/r$  の成分 (式 (5.35b)中の  $E_{\theta0}$ ) である。 $E_{r1}$ 、 $E_{r2}$ 、 $E_{\theta1}$ 、 $E_{\theta2}$  成分は、

アンテナの近傍にとどまっていた、遠方に伝搬することができない。距離  $r=1/k$  のとき、 $E_\theta$  3成分の大きさが同じになり、故に、放射界が卓越するのは  $r \gg 1/k$  のときである。三つの成分について、 $1/r$  ( $E_{\theta 0}$ )、 $1/r^2$  ( $E_{\theta 1}, E_{r1}$ )、 $1/r^3$  ( $E_{\theta 2}, E_{r2}$ ) は、おのおの、**放射電界**、**誘導電界**、**準静電界**と呼ばれる。磁界も含めた放射電磁界を整理してまとめると、次式である。

$$E_\theta = j \frac{IdlkZ_0 \sin \theta}{4\pi r} e^{-jkr} = j \frac{I_0 \frac{dl}{\lambda} Z_0 \sin \theta}{2r} e^{j(\omega t - kr)} \quad (5.36a)$$

$$H_\phi = j \frac{Idlk \sin \theta}{4\pi r} e^{-jkr} = j \frac{I_0 \frac{dl}{\lambda} \sin \theta}{2r} e^{j(\omega t - kr)} \quad (5.36b)$$

## (2) 方法2

(5.22a)式の

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \equiv \mathbf{E}^{(\phi)} + \mathbf{E}^{(A)}$$

より求める方法である。

まず、右辺第2項  $\mathbf{E}^{(A)}$  から求めてゆく。ベクトルポテンシャルは(5.32)式で求めているので、これを使うと、

$$E_r^{(A)} = -\frac{j\omega\mu_0 Idl \cos \theta}{4\pi r} e^{-jkr} = -\frac{jkZ_0 Idl \cos \theta}{4\pi r} e^{-jkr} \equiv E_{r0}^{(A)} \quad (5.37a)$$

$$E_\theta^{(A)} = \frac{j\omega\mu_0 Idl \sin \theta}{4\pi r} e^{-jkr} = \frac{jkZ_0 Idl \sin \theta}{4\pi r} e^{-jkr} = E_{\theta 0} \quad (5.37b)$$

となる。 $E_\theta$ については(5.35b)式で得た放射界  $E_{\theta 0}$  が得られている。一方、 $E_r$ についても、放射界  $E_{r0}^{(A)}$  が現れていて、しかもこれは縦波成分なので、最終的には無くなるはずである。 $E_r^{(\phi)}$  がちゃんとこれを消してくれるかどうか、興味をもって見て行こう。

スカラーポテンシャルによる電界項  $\mathbf{E}^{(\phi)}$  ( $=-\nabla\phi$ ) については、スカラーポテンシャル  $\phi$  の求め方について、二つの方法がある。一つは、アンテナの両端に存在する電荷 ( $\pm Q$ ) による電気双極子から求める方法、もう一つはローレンツゲージの式 ((5.27c)式) を使って、ベクトルポテンシャルから求める方法である。ここでは後者の方法で求める(前者の方法については、例えば、[4]参照)。

式(5.27c)より、スカラーポテンシャルは次式である。

$$\phi = \frac{j\nabla \cdot \mathbf{A}}{\omega\epsilon_0\mu_0} \left( \because c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} \right) \quad (5.38)$$

スカラーポテンシャルによる電界成分  $\mathbf{E}^{(\phi)}$  は

$$\mathbf{E}^{(\phi)} (= -\nabla\phi) = -\frac{j\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}}{\omega\varepsilon_0\mu_0} = -j\frac{\omega}{k^2}\nabla\nabla\cdot\mathbf{A} \quad (5.39)$$

である。後は、上式に(5.32)式を代入して、式(1.1c, 1.2c)を使って根気よく求めてゆけば、次式となる。

$$E_r^{(\phi)} = \frac{Z_0 Idl \cos\theta}{2\pi} \left( \frac{jk}{2r} + \frac{1}{r^2} - \frac{j}{kr^3} \right) e^{-jkr} = -E_{r0}^{(A)} + E_{r1} + E_{r2} \quad (5.40a)$$

$$E_\theta^{(\phi)} = \frac{Z_0 Idl \sin\theta}{4\pi} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{j}{kr^3} \right) e^{-jkr} = E_{\theta1} + E_{\theta2} \quad (5.40b)$$

両項の和  $E_r^{(\phi)}+E_r^{(A)}$ 、 $E_\theta^{(\phi)}+E_\theta^{(A)}$  は、方法1の結果 ((5.35)式) と同じになっている。心配した縦波放射電界  $E_{r0}^{(A)}$  も打ち消されてなくなっている。図 5.4 は理論的な関係をまとめているのであるから、どのようなコースを辿っても同じ結果に行き着くのは当然と言えば当然なのではあるが、電磁気学、お見事、と言いたいところである。

## 5.6 ベクトルポテンシャル視点での平面波伝搬の描像

4章で示したように、一般的な電磁気学の教科書においては、自由空間を伝搬する電磁波は電界と磁界の相互作用、すなわち、電磁誘導と変位電流の技の掛け合いを持続しながら光速で伝搬するというイメージが与えられている。本節では、ベクトルポテンシャルを伝搬の主役にし、電界と磁界はベクトルポテンシャルが生み出した二人の子供 (=相互作用がない) という描像を示す。ただし、解釈の問題であるから、どちらが正しいかと言うような主張ではなく、多角的な視点を持つと言う主旨である。

### 5.6.1 平面波伝搬のおさらい

自由空間を  $z$  の正方向に進む実数信号としての平面波の伝搬を考える。電界の偏移を  $x$  軸方向とし、次式で与える。

$$E_x = E_0 \sin(\omega t - kz) \quad (5.41)$$

ここで、 $\omega$  は角周波数、 $k$  は波数 ( $2\pi$  波長) である。電界と磁界の関係から、磁界は  $y$  軸方向の成分となり、次式になる。

$$H_y = H_0 \sin(\omega t - kz) \quad (H_0 = E_0 / Z_0) \quad (5.42)$$

図 5.6 は電界と磁界の関係 ( $t=0$  として式(5.41), (5.42)で表される空間変化) を表している。前章では、電界の時間変動、すなわち、変位電流が磁界の渦を、磁界の時間変動が電磁誘導により電界の渦を生み出し、その相互作用が持続して伝搬する電磁波を形成するという描像を述べた。

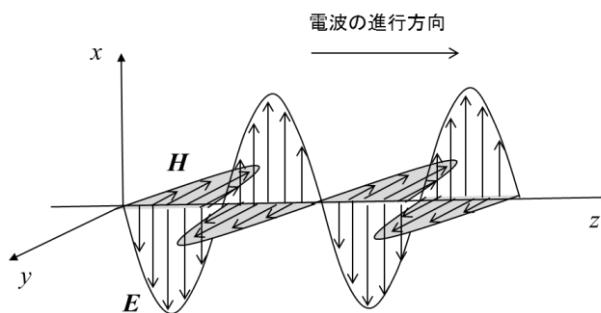


図 5.6 平面波の電界と磁界の関係 (時間を  $t=0$  に固定して空間領域の変化を表している)

### 5.6.2 ベクトルポテンシャルを主役とする視点

ベクトルポテンシャルで表したマクスウェルの方程式を(5.27a)式で与えている。自由空間伝搬では式中の電流密度  $\mathbf{i}$  は  $\mathbf{0}$  なので、次式になる。

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad (5.43)$$

方程式の形が(4.4)式と同じなのでその解も電界や磁界と同じようになり、その一つの解として、 $x$  軸方向に成分を持ち  $z$  軸方向に進む次式で表される平面波を得る。

$$A_x = A_0 \cos(\omega t - kz) \quad (5.44)$$

この式と、(5.22)式 (ただし、(5.22a)式の右辺第一項を  $0$  と置いている)

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5.45)$$

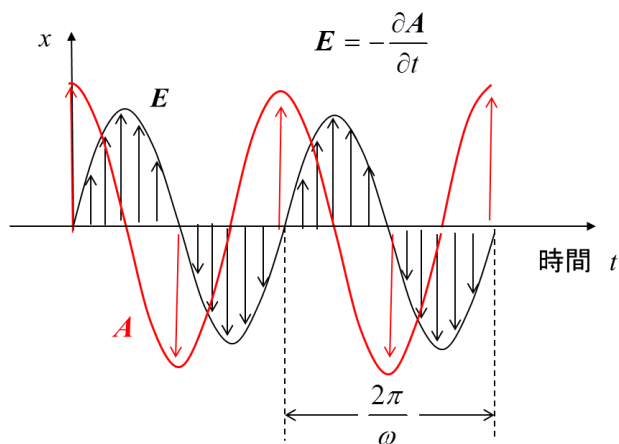
$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.46)$$

から電界と磁界が次のように求められる。

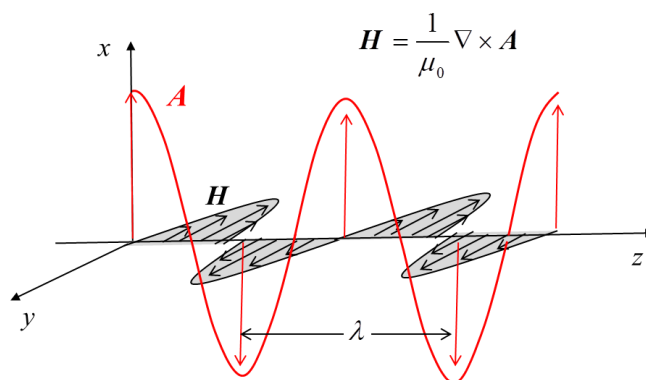
$$E_x = \omega A_0 \sin(\omega t - kz) \quad (5.47)$$

$$H_y = \frac{k}{\mu_0} A_0 \sin(\omega t - kz) = \frac{1}{Z_0} E_x \quad (5.48)$$

図 5.7(a)はベクトルポテンシャルと電界の関係を時間軸に、(b)は磁界との関係を空間軸に対して示している。空間軸に対して共通の土俵で表したものが図 5.8 である。図 5.8 は図 5.6 にベクトルポテンシャルを追加した図になる。ベクトルポテンシャルを主役 (=電磁波の根本的な物理量) に据えて電磁界を見れば、電界はその時間変動から、磁界はその空間変動 (回転) から生ま



(a) 場所固定 ( $x=0$ ) における電界とベクトルポテンシャルの時間変化



(b) 時間固定 ( $t=0$ ) における磁界とベクトルポテンシャルの空間変化

図 5.7 平面波のベクトルポテンシャルと電界及び磁界の関係 (横軸の時間と空間の違いに注意)

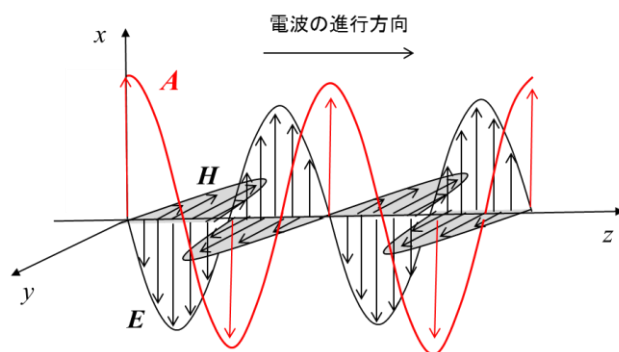


図 5.8 平面波のベクトルポテンシャル・電界・磁界の関係 (時間固定しての空間変化)

れており、電界と磁界の相互作用と言う姿は消えていることが理解できるであろう。ベクトルポテンシャルが親で、電界と磁界はその子供、子供は親の指示に従っているだけというイメージである。

次に電磁界のエネルギーを考えてみたい。電磁波のエネルギー密度は $\epsilon_0 E^2/2$ と $\mu_0 H^2/2$ の和 $\epsilon_0 E^2$ で表される。 $\epsilon_0 E^2$ は $DE$ 、 $\mu_0 H^2$ は $BH$ であるので、電気エネルギーは空間の電束密度 $D$ と電界 $E$ が、磁気エネルギーは磁束密度 $B$ と磁界 $H$ が力を合わせてエネルギーを運んでいるとみなすことができる。では、ベクトルポテンシャルを主役としたとき、ベクトルポテンシャルは何と力を合わせてエネルギーを運ぶのであろうか。この目的のため、関連する物理量の単位の次元に着目してみたい。

電磁気学に現れる物理量の MKSA 単位系で表した組立単位を表 1.1 に示している。基本単位：m, kg, s, A に対して、その指数部だけで表す。例えば $[DE]=[-2,0,1,1]+[1,1,-3,-1]=[-1,1,-2,0]$ は $[J/m^3]$ となり、確かにエネルギー密度である。

電界のエネルギー密度は $D$ と $E$ の積、磁界のエネルギー密度は $B$ と $H$ の積、と言うことはベクトルポテンシャルにもエネルギーを形作る相棒がいるはずである。ベクトルポテンシャルの組立単位は $[1,1,-2,-1]$ であるので、エネルギー密度との比： $[-1,1,-2,0]-[1,1,-2,-1]=[-2,0,0,1]$ となり、これは電流密度 $[A/m^2]$ である。自由空間に伝導電流は流れていないので変位電流 $i_d$ に違いない。

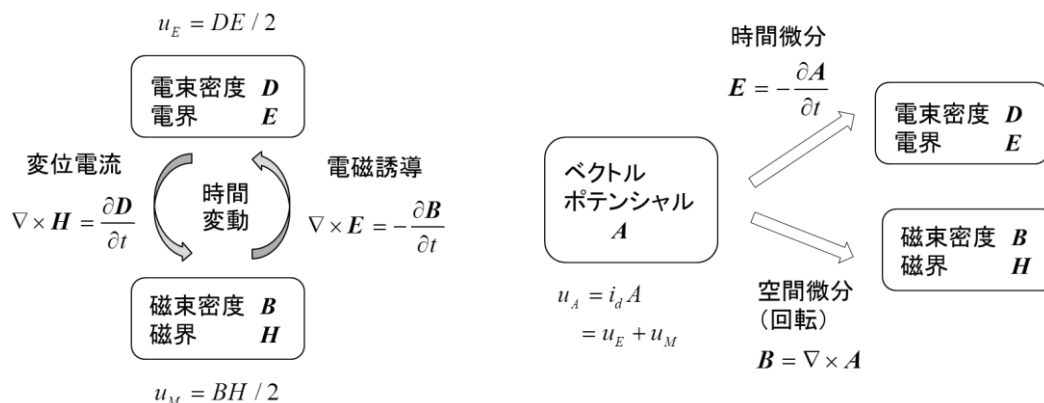
(注：変位電流と名づけられているが実際は電流密度である。変位電流密度と呼ぶのが正確であるが慣例に従い変位電流と呼ぶ)。先にあげた質問：エネルギー算定におけるベクトルポテンシャルの相棒は、の答えは変位電流であると理解して良い。平面波の場合の変位電流（向きは電束密度、すなわち電界と同じ向き）は、

$$i_d = \frac{\partial D_x}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \epsilon_0 \omega^2 A_0 \cos(\omega t - kz) = \epsilon_0 \omega^2 A_x \quad (5.49)$$

となる。次元確認ができたので、定量的な部分の係数合わせをすると、ベクトルポテンシャルのエネルギー密度 $u_A$ は次式で算定できる。(注：電磁界解析で求めたものではなく、上記の類推により求めている)

$$\langle i_d A_x \rangle = \epsilon_0 \omega^2 \langle A_x^2 \rangle = \epsilon_0 \langle E_x^2 \rangle \rightarrow u_A = i_d A_x \quad (5.50)$$

図 5.9 は本節のポイントをまとめている。ベクトルポテンシャルを主役にする、電界と磁界はそこからの産物となり、両者に直接的な相互作用はない。だからと言って、電磁波の伝搬ではベクトルポテンシャルが主役、電界と磁界は脇役である、と言う結論になってしまうのは行き過ぎである。本質のすべてはマクスウェルの方程式にあり、式に与えられている関係以上のこと(=主役・脇役と言うような格付け)は、すべて解釈の問題であるからである。特にベクトルポテンシャルは我々に観測手段が無い透明人間のようなもので、その存在が感知できるのは電界と磁界の方である。その電界と磁界をダブル主役に据えれば、図 5.9(a)に示すような相互作用で結ばれているのも事実であり、このほうが素直に受け入れられるからである。



(a) 電界と磁界の相互作用

(b) ベクトルポテンシャルと電界・磁界の親子関係

図 5.8 電磁波のエネルギーと伝搬における電界・磁界・ベクトルポテンシャルの関係

参考文献

[1] 外村彰, “電子波で見る電磁界分布 (ベクトルポテンシャルを感じる電子波),” 信学会誌, vol. 83, no. 12, 99. 906-913, 2000. <https://www.ieice.org/jpn/books/kaishikiji/200012/20001201-1.html>  
 (AB効果の詳しい解説書は: 外村彰, ゲージ場を見る: 電子波が拓くマイクロの世界, ブルーバックス B-1154, 講談社, 1997.)

[2] 村上雅人, なるほどベクトルポテンシャル, 海鳴社, 2020.  
 (ベクトルポテンシャルに特化してまとめられた稀有な本であり、上記[1]の AB 効果も含めて、内容が多彩で深い (ベクトルポテンシャル愛が感じられる 310 ページの力作) )

[3] 宇野亨, 白井宏, 電磁気学, コロナ社, 2010.

[4] 砂川重信, 理論電磁気学 (第3版), 紀伊國屋書店, 1999.

[目次のページへ戻る](#)