

## 第6章 電磁気学と相対論

### ～観測者によって異なる電磁界の景色、共通する法則～

電磁気学は4つの法則ががっちりスクラムを組んで、綻びのない理論体系を作り上げているのであるが、電磁気学には我々の好奇心を掻き立ててくれる不思議が随所に隠れている。ここでは、電磁気学の奥深いところを覗いてみるのも楽しいと思い、相対性理論との関係を取り上げる。ニュートン力学が絶対視されていた19世紀、慣性系座標変換の規範となっていたガリレイ変換をマクスウェルの方程式に適用すると、厳密には成立しない問題があった。そのため、電磁気学は、当時、近似の理論と見なされていた。アインシュタインはこの点に着目し、電磁気学の方に真実があることを見抜き、ニュートン力学を近似理論とする特殊相対性理論を作り上げた。その理論が規範とした座標変換はローレンツ変換である。本章では、マクスウェルの方程式がローレンツ変換に対して不変であること（共変性を有すること）を示す。電磁気学は、20世紀に吹き荒れた相対性理論による力学革命の嵐を無傷で乗り越え、現代の力学理論の一翼を担っている様子を述べる。また、本章の後半では、いわゆる電磁気学のパラドックスと言われる力学問題を取り上げ、相対論によってつじつまの合った説明が可能であることを示す。

---

本章は初公開版同章の改訂版(2023.12)。その後、6.6節(旧6.5節)を差替え(2024.05)。さらに、6.1節を加え、以降、章のリナンバーをしている(2025.02)。

### 6.1 不思議発見

我々は地球上に暮らしている。地震でも起きない限り安定した空間の中にいる。物理法則はそのような安定した空間において、例外なく成立するという事になっている。でも、我々がいる空間は本当に安定しているのだろうか。地球は自転している。赤道上では時速およそ1,700km(秒速460m)で動いていて、住む人の緯度によって速度は違っている。さらには、太陽を中心とする公転があり、この移動速度は自転による速度よりも数十倍大きい。銀河の中心に対しては・・・と話が進めば、とんでもない高速移動が重なり合った空間の中にいるということになる。

大局的に見れば、それぞれの運動は加速度運動(円軌道や楕円軌道など)であるが、人間サイズの空間・時間スケールで見れば一定速度の直線移動とみなして良いであろう。この「一定速度で直線移動」している空間内にいる人には系の動きそのものが見えず、安定な空間にいると思っているのである。このように、直線方向に一定の速度で移動する物理空間を表す系は**慣性系**と呼ばれる。慣性系同士においては、系が静止しているか動いているかは、一方が一方を見るときに決まる相対的なことであって、すべて系が対等ということになる。物理法則には、慣性系におい

て、共通に成立することが要請されるのである。

さて、我々は、第4章において電磁波の性質を学んでいる。電磁波にはいろいろの形(モード)があるが、その一つに平面波がある。マクスウェルの方程式を解いて得られるが、電界の向きを  $y$  軸、磁界の向きを  $z$  軸、電磁波(以下、電波と呼ぶ)の進む向きを  $x$  軸方向にとると以下の式で表される。

$$E_y = E_0 \cos\{\omega(t - x/v_{EH})\}$$

$$H_z = H_0 \cos\{\omega(t - x/v_{EH})\} \quad (E_0/H_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377 \Omega)$$

$$v_{EH} = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = c$$

この式では、電波の大きさ ( $E_0$ ) や周波数 ( $\omega$ ) は任意の値を持つことができるが、電波の速度  $v_{EH}$  は光速  $c$  であるということを意味している。大事なことなので繰り返すが、電波の速度は光の速度  $c$  であって、これ以外の値をとることができないということである。

図 6.1 を見てみよう。ある一つの慣性系があって、これを便宜上、静止系と呼ぶ。この中で、A 君は静止している。一方、静止系から見て、右方向に一定速度で移動する系(これも便宜上、移動系と呼ぶ)が有り、この中で B 君は静止している。走っている電車の中にいるイメージである。A 君は、静止系の中を走る平面波をマクスウェルの方程式で求め、その速度を求めると、当然、 $c$  になる。同じ電波を移動系にいる B 君が見るとどうだろう。B 君は B 君でマクスウェルの方程式からその平面波を求めると、これも、速度は  $c$  になる。両系共に  $c$  以外の答えはないからである。

これを聞いて、ニュートンなら言うであろう。「そんな馬鹿なことはない。静止系で速度  $c$  なら、移動系での速度は  $c-v$  になるはず」と。マクスウェルが電磁気学を作り上げた当時(19世紀後半)の科学者もそう思ったらしい。故に、「マクスウェルの電磁気学は近似の理論だ」と。この論争(ニュートン力学と電磁力学のどちらが厳密か)に決着をつけ、電磁気学に軍配を上げたのは、ご存知、アインシュタインである。(続きは § 6.2.3 へ)

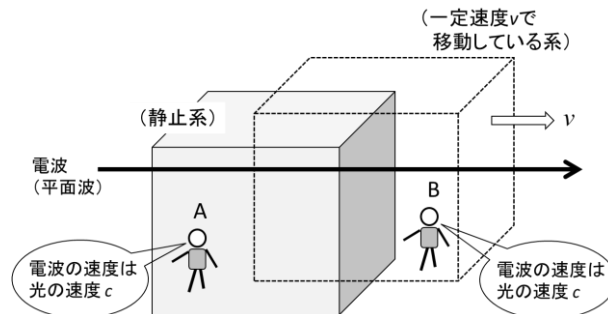


図 6.1 電波の速度は、止まっている人が見ても動いている人が見ても同じ？

## 6.2 慣性系の座標変換

### 6.2.1 共変性：物理法則は慣性系に対して不変であるべき

太古より、電気は摩擦から、磁気は磁石から生まれる別々の物理現象と考えられていた。それに対して、電磁気学は、電気は電荷から、磁気は電荷の動き、すなわち電流から生まれるとして、電気も磁気も電荷を介して相互に関連する電気現象であることを明らかにした。その中でも電界  $\mathbf{E}$  と磁界  $\mathbf{B}$  は電磁気学の主役である（注：本章では便宜的に磁束密度  $\mathbf{B}$  を広い意味での磁界とみなして磁界と呼んでいる）。

前節で述べたように、物理空間内において、直線方向に一定の速度で移動する系は**慣性系**と呼ばれる。図 6.2 はその中の二つの系の座標を示している。慣性系の中では、全てが相対的でどの慣性系が基準であるということはない。便宜上 K 系を静止系、K'系を移動系と呼ぶが、視点をどこに置くかによって、静止か移動かはいかようにも変わる。現代の物理学では、物理法則は慣性系に対して不変であること（=共通の式で表されること；**共変性**と呼ばれる）が求められている。例えば、K 系で電磁誘導の法則が成立するなら K'系でも同じように成立しなければならない。すなわち、

$$\text{K系} : \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \leftrightarrow \quad \text{K'系} : \nabla' \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'}$$

では、どういう座標変換が共変性を満たすのであろうか、それを調べてみたい。

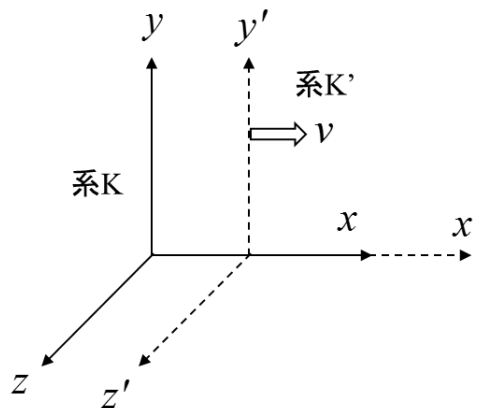


図 6.2 座標系（系 K: 静止系；系 K': 移動系（観測系））

### 6.2.2 ガリレイ変換では

#### (1) ガリレイ変換

電磁気学が作り上げられた 19 世紀には、ニュートン力学が絶対で、座標変換は**ガリレイ変換**が規範であった。図 6.2 の座標系では以下の変換になる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

速度  $v$  で動いている電車の中でボールを進行方向に速度  $v_0$  で投げれば、外で見ている人にはボールの速度は  $v+v_0$  になる、と云ういたって合理的な結果を導き出す。このガリレイ変換のもとで、以下の電磁気学問題を考えてみよう。

**(2) ケース1：K系において静電界のみがある環境**

K系において静電界のみがある環境を考え、これをケース1とする。図6.3がその例である。

- ① 座標K系において一様な静電界  $E_y$  がある（向きは上向き）
- ② この空間を速度  $v$  で動く K'系の観測者には電磁界がどう見えるか、である。静電界の中を動いているだけなので、何も変わらないのでは、と思うかもしれないが、ことはそう単純なものではないのである。
- ③ 静電界がそこにあるということは、それを生み出している環境全体を見ないといけない。電界  $E_y$  の存在には、それを作り出す電荷がなくてはならない。例えば、正負に帯電した無限に大きな平板に挟まれた空間が例として考えられる。この場合、平板の電荷密度  $\sigma$  は、電界に関するガウスの法則から

$$E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow \sigma = \epsilon_0 E_y$$

ということになる。

- ④ ③の景色を K'系の観測者の目で見てみよう。電荷密度  $\sigma$  は変わらないから、電界  $E_y'$  は  $E_y$  と同じ、すなわち、

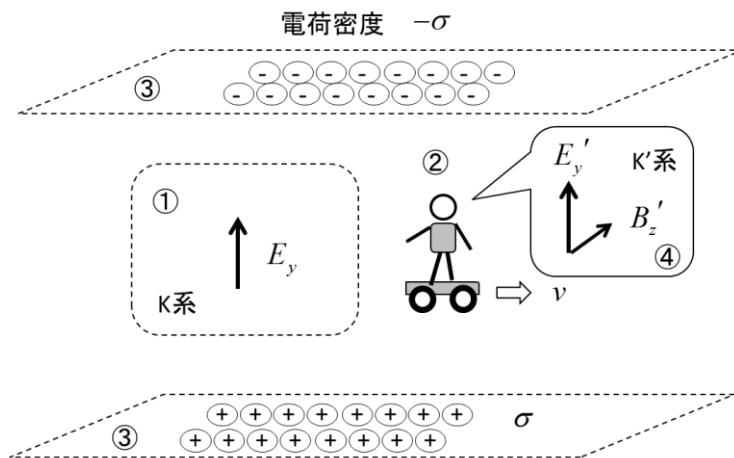


図 6.3 ケース1:静電界のみがある環境を動いている人はどう感じるか

$$E'_y = E_y$$

一方、上下の荷電平板は図の左方向に速度  $v$  で動いており、単位幅当たりの電流  $J$  が上下で反対方向に流れているとみなすことができる。下面に流れる電流の密度  $J'$  は以下である

$$J' = -\sigma v$$

上下面の電流が  $K'$  系においては磁界  $B'_z$  を生み出し、アンペアの周回積分の法則から、

$$B'_z = \mu_0 J' = -\frac{v}{c^2} E_y \quad (c: \text{光速})$$

となる。 $K'$  系の観測者には、 $K$  系に有った電界  $E_y$  と共に、 $K$  系には無かった磁界  $B'_z$  も見えているということになる。結果をまとめると、次式になる。

$$\begin{pmatrix} E'_y \\ B'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{v}{c^2} \end{pmatrix} E_y \quad (\text{ケース1}) \quad (6.2)$$

### (3) ケース2：K系において静磁界のみがある環境

次に、 $K$  系において静磁界のみがある環境を考え、これをケース2とする。図6.4に示すように、断面が長方形の無限に長い管があり、高さに比べて幅は十分に長いとする（極めて扁平は矩形導波管のイメージ）。 $K'$  系管内の空間を図のように動く。そこで、ケース1と同様、管内の電磁界を見てみよう。

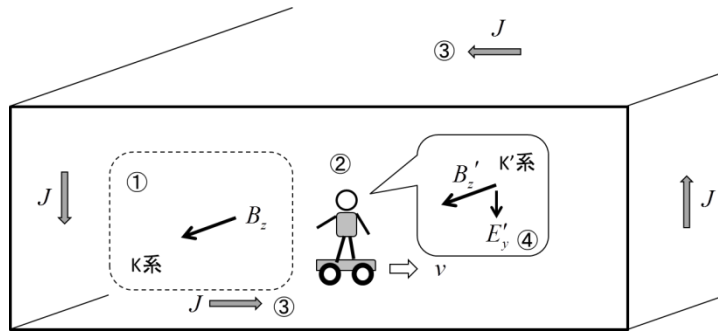


図6.4 ケース2:静磁界のみがある環境を動いている人はどう感じるか

- ① 座標  $K$  系において一様な静磁界  $B_z$  がある（向きは手前向き）
- ② この空間を速度  $v$  で動く  $K'$  系の観測者には電磁界がどう見えるか。ケース1同様にそう単純なものではないのである。
- ③ 静磁界がそこにあるということは、それを生み出している環境全体を見ないといけない。磁界  $B_z$  の存在には、それを作り出す電流がなくてはならない。図6.4の構成では、矩形の管の側面を周方向に単位幅当たり電流  $J$  が一様に流れていればよい。観測する場所は左右の壁面の影響が出る端を避けて、管内中央部の天井面と床面が無限大平面とみなせるところで行う。この場合、

磁界はアンペアの周回積分の法則から

$$B_z = \mu_0 J$$

となり、電界は無い。

④ ③の景色を K'系の観測者からみてみよう。\$B\_z'\$ は \$B\_z\$ と同じで \$B\_z' = \mu\_0 J\$ である (注1)。一方、\$E\_y'\$ は、ファラデーの電磁誘導効果で、\$E\_y' = -vB\_z' = -vB\_z\$ となる (注2)。整理すると、以下のよう  
にまとめられる。

$$\begin{pmatrix} E_y' \\ B_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ 1 \end{pmatrix} B_z \quad (\text{ケース2}) \tag{6.3}$$

さらに、ケース1とケース2の変換結果をまとめて書くと

$$\begin{pmatrix} E_y' \\ B_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ B_z \end{pmatrix} \quad (\text{ケース1+ケース2 ; K} \rightarrow \text{K}') \tag{6.4}$$

となる。これが、電界と磁界の慣性系に対するガリレイ変換である。

(注1) 電流は負の電荷をもつ自由電子が担う。動かない同量の正の電荷もあり全体には電氣的に中和している。この環境を K'系で動いても、正負同量の電荷が一緒に動くことになるので電流は変わらない。

(注2) これは、少しわかりにくいかもしれない。図6.4で観測者が y 軸方向に向く長さ \$l\$ の導体棒を持っているとしよう。直交する磁界の中を動いているので導体棒中の電荷にローレンツ力が働き \$-vB\_z l\$ の起電力が生まれる。これは、K'空間の y 軸方向に電界 \$-vB\_z'\$ が現れていることを意味している。

**(4) マクスウェルの電磁気学は共変性を満たさない？**

慣性系においてはいかなる系も対等である。上記(2)、(3)では、K系 \$\rightarrow\$ K'系の変換で見たが、K'系 \$\rightarrow\$ K系の変換は速度の向きが逆になるだけの違いなので、式(6.4)の \$v\$ を \$-v\$ とすることにより、次式になる。

$$\begin{pmatrix} E_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v \\ v/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y' \\ B_z' \end{pmatrix} \quad (\text{K}' \rightarrow \text{K}) \tag{6.5}$$

この式を(6.4)式の右辺の \$E\_y, B\_z\$ に代入すると

$$\begin{pmatrix} E_y' \\ B_z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y' \\ B_z' \end{pmatrix}$$

となり、行列部分が

$$\begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v/c^2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \geq 1 \tag{6.6}$$

となって、単位行列になるべきところが、 $1/\gamma^2$ 倍になっている。 $v \ll c$  では $\gamma$ は1に近似できるとはいえ、厳密な意味では、電磁気学は共変性が満たされていないということになってしまう。それは大変、ニュートン力学を厳密な理論とすれば、電磁気学は近似の理論ということになる。電磁気学完成当時はそういう目で見られていた。その立場を逆転させ、厳密性の視点で電磁気学に軍配を上げたのがアインシュタインである。

### (5) アインシュタインの洞察

アインシュタインは、電磁気学にこそ共変性があると考えてみた[1]。もしそうなら、原因は、ガリレイ変換に従って、K系でもK'系でも電荷密度 $\sigma$ や電流密度 $J$ は変わらないとしたことにある。もし、両系で値が異なるとして、

$$\sigma' = \gamma\sigma, \quad J' = \gamma J \quad (6.7)$$

であれば、行列の積の部分は単位行列になり、それなら、共変性が成立する。どういうことだろうか。

$\sigma' = \gamma\sigma$ を考えてみよう。電荷の値そのものは、慣性系に対して不変ということが分かっている。と言うことは密度を決める空間の長さが違っているということになる。「K系に対して運動するK'系で測った長さは、K系では $1/\gamma$ 倍に短縮して観測される」ということである。(これは、ローレンツ短縮と呼ばれる)

次に、 $J' = \gamma J$ を考えてみよう。電流は1秒間に通過する電荷の量であるから両系で1秒の長さ(=時間の進む速さ)が違っているということになる。「K系に対して運動するK'系の時計の読みは、K系の時計の読みの $1/\gamma$ 倍に縮小する(=動く系の中では時間の進みが遅くなる)」ということである。では、その変換はどのようなものなのだろう。それが、次に述べるローレンツ変換である。

### 6.2.3 ローレンツ変換では

#### (1) 座標系のローレンツ変換

アインシュタインは、物理現象には、その根底に以下の二つの原理があるとして、それを公理とした力学理論を作り上げた。これが(特殊)相対性理論である。

- 1) 相対性原理 (全ての慣性系は同等である)
- 2) 光速不変の原理 (光の速度は光源や観測者の運動とは無関係に決まる)

1)の原理を満たすためには、2)の原理を受け入れることが必要になる、と読み替えても良い。この場合の座標変換は、二つの条件

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

を満たすように、図6.2の観測系について座標変換(K→K')すると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v/c^2 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \geq 1 \quad (6.8)$$

が得られる。この変換がローレンツ変換、 $\gamma$ は(6.6)式の中にすでに現れていたが、ローレンツ因子と呼ばれる。動いているものに対しては、長さが縮み、時間がゆっくり進んでいるように見えるということになる。

K系の偏微分をK'系の偏微分に置き換える演算が必要になる。

2変数変換  $(x,t) \Leftrightarrow (x',t')$  の偏微分の関係は下記の公式より

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x}$$

であるので、変化の無い方向 ( $y', z'$  軸方向) を含めて、これらを(6.8)式に適用すると以下になる。

(注：この変換をするためには(6.8)式について、K系の変数をK'系の変数で表す式が必要になる。行列部分の逆行列を求めて変換すればよいが、結果的には、その行列要素の  $v$  を  $-v$  に置き換えたものになる。K'系からK系を見れば  $-v$  で動いていることに符合する。)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \\ \frac{\partial}{\partial t'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma v/c^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma v & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

## (2) 電界と磁界のローレンツ変換

図6.5の座標系(図6.2と共通)において、速度  $V$  で直線運動する平行板コンデンサを考える(平板の大きさは、端の効果が無視できる無限大を仮定)。図6.3では、電界の存在だけで議論したのでK系では平板を静止していたが、磁界も存在するよう、最初から速度  $V$  で動いているとしている(K'系の移動速度  $v$  とは違うものであることに注意)。このコンデンサにおいて、(a)  $E_y$ , (b)  $E_z$ , (c)  $E_x$  の電界が生じる3つの向きを調べる。K系で見たときのそれぞれの板の電荷密度を  $\sigma$  [C/m<sup>2</sup>] とする。

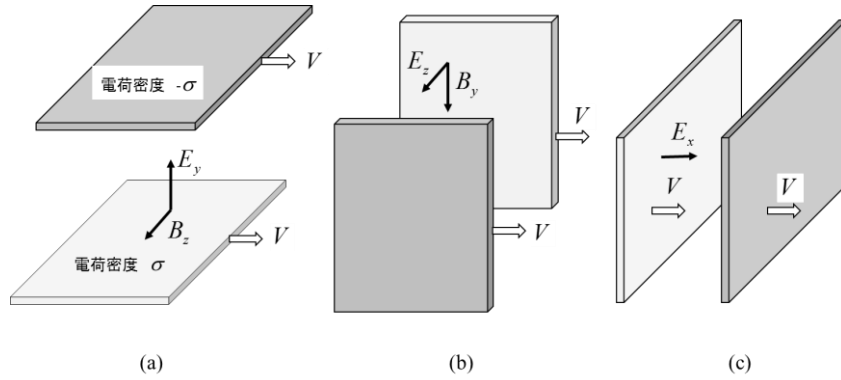


図 6.5 電界と磁界のローレンツ変換を求めるための図  
(K系において、帯電した平行板コンデンサが  $x$  軸方向に速度  $V$  で移動)

同図(a)において、K系では

$$E_y = \sigma / \epsilon_0, \quad B_z = \mu_0 \sigma V$$

となる。これを K'系で見ると、電荷密度のローレンツ変換（長さが縮んで密度が濃くなる）と速度の合成則から

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\gamma}{\epsilon_0} \left( 1 - \frac{vV}{c^2} \right) \sigma = \gamma (E_y - vB_z)$$

$$B'_z = \mu_0 \sigma' V' = \mu_0 \gamma \left( 1 - \frac{vV}{c^2} \right) \frac{V-v}{1-vV/c^2} \sigma = \mu_0 \gamma (V-v) \sigma = \gamma \left( B_z - \frac{vE_y}{c^2} \right)$$

同図(b)からは、

$$E'_z = \gamma (E_z + vB_y)$$

$$B'_y = \gamma \left( B_y + \frac{vE_z}{c^2} \right)$$

同図(c)では、平行板にローレンツ収縮が無いので、

$$E'_x = E_x$$

これで、電磁場6つの成分のうちの5つ成分の変換が求められた。残すは  $B'_x$ 。これについては、平板コンデンサを、同図(a)の向きに置き、 $z$  方向に一定速度で動かす。これを K'系で見れば、 $B_x$  の  $x$  軸方向へのローレンツ収縮は無いので、

$$B'_x = B_x$$

以上をまとめると、電界と磁界のローレンツ変換は、図 6.2 に示した系 K と K' の関係において次式である。

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \\ B'_x \\ B'_y \\ B'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & \gamma v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma v/c^2 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma v/c^2 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

さらに、電流密度  $\rho_e$  と電荷密度  $i_e$  ( $i_e$  の  $e$  を省略) のローレンツ変換は次式である (導出の詳細は[2]の § 15.5)。

$$\begin{pmatrix} \rho'_e \\ i'_x \\ i'_y \\ i'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c^2 & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_e \\ i_x \\ i_y \\ i_z \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

$\mathbf{E}$  と  $\mathbf{D}$  については、誘電率  $\epsilon_0$  を介して  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ 、また、 $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{H}$  については、透磁率  $\mu_0$  を介して  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  で結ばれる。この  $\epsilon_0$  及び  $\mu_0$  は、光速  $c$  と同様、座標系に依存しない絶対定数である。

図 6.3 (ケース 1) で、ガリレイ変換とローレンツ変換を比較すると、

$$\text{ガリレイ変換 (K 系} \rightarrow \text{K' 系)} : E_y = E_y, B_z = 0 \rightarrow E'_y = E_y, B'_z = -\frac{v}{c^2} E_y$$

$$\text{ローレンツ変換} : E_y = E_y, B_z = 0 \rightarrow E'_y = \gamma E_y, B'_z = -\gamma \frac{v}{c^2} E_y$$

となり、ローレンツ因子がかかるかかからないかの違いである。ケース 1、ケース 2 共  $\gamma$  倍の違いなので、(6.6)式で示した行列は  $\gamma^2$  が掛かって単位行列になる。では、ローレンツ変換ならマクスウェルの方程式に共変性があるのだろうか。以下それを調べてみたい。

### 6.3 マクスウェルの方程式のローレンツ変換

マクスウェルの方程式を K 系において  $f(\mathbf{E}, \mathbf{B})=0$  の形で表したとき、K' 系において  $f(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$  が 0 になることを示して、共変性を確かめる。この変換は、(6.9)~(6.11)式を用いて全く機械的に行うことができる。

最初に、4つのマクスウェルの方程式のうち、電磁誘導の法則の式の共変性を調べる。

$$\begin{aligned} \nabla' \times \mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} \\ = \left( \frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial t'} \right) \mathbf{i}' + \left( \frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial t'} \right) \mathbf{j}' + \left( \frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial t'} \right) \mathbf{k}' \end{aligned}$$

上式の右辺第一項の  $x'$  成分 ( $\mathbf{i}'$ ) に着目すると、(6.9), (6.10) 式により、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial t'} \\ = \frac{\partial E'_z}{\partial y} - \frac{\partial E'_y}{\partial z} + \gamma v \frac{\partial B'_x}{\partial x} + \gamma \frac{\partial B'_x}{\partial t} \\ = \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma v \frac{\partial B_y}{\partial y} - \gamma \frac{\partial E_y}{\partial z} + \gamma v \frac{\partial B_z}{\partial z} + \gamma v \frac{\partial B_x}{\partial x} + \gamma \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ = \gamma \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) + \gamma v \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \\ = \gamma \left( \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{i} + \gamma v \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{aligned}$$

$y'$  成分 ( $\mathbf{j}'$ ) は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial t'} \\ = \frac{\partial E'_x}{\partial z} - \gamma \frac{\partial E'_z}{\partial x} - \frac{\gamma v}{c^2} \frac{\partial E'_z}{\partial t} + \gamma v \frac{\partial B'_y}{\partial x} + \gamma \frac{\partial B'_y}{\partial t} \\ = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ = \left( \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{j} = 0 \end{aligned}$$

$z'$  成分 ( $\mathbf{k}'$ ) も同様に、

$$\frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial t'} = \left( \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{k} = 0$$

これらをまとめると、各成分が全て 0 であるので

$$\nabla' \times \mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} = \mathbf{0} \quad (6.12)$$

同様な手順で、磁束密度のガウスの法則を調べる。

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \mathbf{B}' &= \frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} \\ &= \gamma \frac{\partial B'_x}{\partial x} + \frac{\gamma v}{c^2} \frac{\partial B'_x}{\partial t} + \frac{\partial B'_y}{\partial y} + \frac{\partial B'_z}{\partial z} \\ &= \frac{\gamma v}{c^2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \frac{\gamma v}{c^2} \frac{\partial B_x}{\partial t} + \gamma \frac{\partial B_x}{\partial x} + \gamma \frac{\partial B_y}{\partial y} + \gamma \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ &= \frac{\gamma v}{c^2} \left( \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{i} + \gamma \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

これにより、マクスウェルの方程式のうち二つ（式(2.49a)と(2.49d)）についてローレンツ変換に対する共変性が示されたことになる。この2式がまったく別のものではなく、お互いの変換の中に、助け合って現れているのが非常に興味深い。

マクスウェルの方程式の残りの二つ：(2.49b)と(2.49c)についても、同様な手順で共変性が示される（興味ある人は試して欲しい）。

このように、電磁気学理論を構成するマクスウェルの方程式は慣性系に対してローレンツ変換の下で不変と言う性質が具備されていることがわかった。マクスウェルがそれを意識して方程式を作ったからではなく、電磁気に関する法則にそういう性質が隠れていて式に表したらそうなっていたのである。このおかげで、電磁気学は20世紀の冒頭に吹き荒れた相対性理論の嵐を無傷で乗り切ることができ、現代の力学理論の一翼を担っているのである。さらに言えば、アインシュタインは、ニュートン力学と電磁気学の矛盾に対して電磁気学に軍配を上げ、その規範に基づき作り上げたのが相対性理論であったとも言えるのである。

#### 6.4 ローレンツ力のローレンツ変換

電磁気学は4つの法則を連立方程式にしたマクスウェルの方程式よりなる。法則は、電荷に働く力（電気力；クーロン力）や電流に働く力（磁気力；アンペアの力）から生まれており、電気と磁気の力学に関する理論である。しかしながら、現在、電磁気学教科書に出てくる4つの方程式は電界と磁界の関係、すなわち場（フィールド）の関係を表すものになっていて、力の作用（＝電磁力学）が陽には見えてこない。この力学を担う方程式が、ローレンツ力と呼ばれる式である。本節では、ローレンツ力の式もマクスウェルの方程式同様、慣性系に対して不変であることを示す。

### 6.4.1 ローレンツ力について

電界  $\mathbf{E}$ 、磁束密度  $\mathbf{B}$  の中に速度  $\mathbf{v}$  で動いている電荷  $q$  がある。この電荷に働く力  $\mathbf{F}$  は次式で表される。

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad ((2.7)\text{式の再掲}) \quad (6.14)$$

上式の右辺第1項が電気力（クーロン力）、第2項が磁気力（アンペアの力）であり、合わせた力はローレンツ力と呼ばれる。なお、以下の式展開において、 $\mathbf{K}'$ 系の $\mathbf{K}$ 系に対する速度を $\mathbf{v}$ とすると電荷の速度 $\mathbf{v}$ と区別できないので、座標系の速度は $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}$ とし、かつ、最初は任意方向とするので、ベクトル文字 $\mathbf{u}$ とする。

ローレンツ力を表す(6.14)式はマクスウェルの方程式と同列に扱われる式であるので、マクスウェルの方程式がローレンツ変換に対して不変であった（＝共変性を持つ）と同様に、ローレンツ変換に対して不変であるはずである。すなわち、等速直線運動をするいかなる座標系（＝慣性系）に対しても(6.14)式は成立するはずである。では、6.2節で行ったと同じように変数の変換をして、共変性を確かめればよいのではという話になるが、ローレンツ力には力学でおなじみの物理量である力  $\mathbf{F}$  が入っていて、力のローレンツ変換はどうするのかと言う難しい問題に突き当たる。ニュートン力学の基礎方程式  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  は、ガリレイ変換に対する共変性があるのみのため、これをスタートにできないのである。相対論が生まれた当時、ポアンカレはローレンツ力のローレンツ変換に対する共変性（ $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{F}' = q\mathbf{E}' + q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$ ）を前提に、力のローレンツ変換はどのような形で無ければならないかをローレンツ力の式から導いた[2]。その結果が次式である。

$$\mathbf{F}' = \frac{\mathbf{F}_\perp / \gamma + \mathbf{F}_\parallel - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} / c^2}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} / c^2} \quad (6.15)$$

ここで、 $\mathbf{F}_\parallel$  は力  $\mathbf{F}$  の座標系の運動方向成分、 $\mathbf{F}_\perp$  はそれと直交する方向の成分である。

この式は、その後、相対性理論に基づく力学（相対論的運動量、エネルギーと質量の関係（ $E = mc^2$ ）、相対論的質量（ $m = \gamma m_0$ （ $m_0$ : 静止質量））などの性質を用いた）により求められ、発生原因を問わない力の一般的なローレンツ変換の式として通用している（導出の具体的な手順は、例えば、[3]）。式(6.15)より、力のローレンツ変換には以下の性質が有る。

- (i)  $x$  軸方向に直線運動する物体に対しては、 $F'_x = F_x$  となり、力の進行方向成分は変わらない。
- (ii) 座標系  $\mathbf{K}'$  と物体が同じ速度で  $x$  軸方向に動く場合（ $v_x = u$ ）には、 $F'_y = \gamma F_y$ 、 $F'_z = \gamma F_z$  となり、 $\gamma$  倍の力になる。

### 6.4.2 共変性の確認

ローレンツ力の共変性を確認してみたい。上述の歴史的経緯から、この確認はうまく行くのが当たり前なのであるが、実際に試してみることも大事である。

手順は、マクスウェルの方程式において行ったと同様に、

$$\mathbf{F}' - q\mathbf{E}' - q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}' \rightarrow \mathbf{0}$$

を成分ごとに確認すればよい。なお、電荷  $q$  は、電荷保存則より両系で同じである。

(6.15)式で表される力のローレンツ変換を、 $x$  軸方向に速度  $u$  で動く  $K'$ 系に対して成分ごとに表すと以下になる。

$$F'_x = \frac{F_x - \frac{u}{c^2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{1 - \frac{u v_x}{c^2}}, F'_y = \frac{F_y}{\gamma \left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)}, F'_z = \frac{F_z}{\gamma \left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)}$$

速度  $\mathbf{v}(=(v_x, v_y, v_z))$ は

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}, v'_x = \frac{dx'}{dt'}, v'_y = \frac{dy'}{dt'}, v'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

であり、これらの式より次式で変換される。

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma dx - \gamma u dt}{-\frac{\gamma u}{c^2} dx + \gamma dt} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u v_x}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{-\frac{\gamma u}{c^2} dx + \gamma dt} = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)}$$

$\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{B}'$ の変換は式(6.10)で得ているので、これらを式(6.16)に代入して整理すればよい。計算の途中では項の数が増えて多少煩雑な展開になるが、機械的にできることなので各自で確認してほしい（導出の一部を付録に示している）。力の変換式(6.15)が、ポアンカレが行ったようにローレンツ力のローレンツ変換によって得たものとすれば、確認は当たり前になってしまうが、力の一般的な変換式であると考えれば、この確認の意味も出てこよう。

このようにして、マクスウェルの方程式と共に、電磁気学の力学を担うローレンツ力の式もローレンツ変換に対して共変性があり、電磁力学の相対論効果を説明できる式になっている。

## 6.5 電磁気学のパラドックス

電磁現象、特にローレンツ力に見られるパラドックスを取り上げたい。物理学者ファインマンは、電磁気学の教科書[4]の中で、「物理のパラドックスは我々の理解の迷いにすぎない」と言い切っているように、本当はパラドックなんて無いのだから、ここで取り上げる話も、パラド

ックスに見えること、と言ったほうが正確なのかもしれない。でも、至らない理解の中で、その不思議に翻弄されながら、その格闘を通じてより深い理解へと進んで行くことこそ、本来の学びであろう。

ここでは、電気と磁気の力、すなわち、ローレンツ力に関する四つの話題を提供する。一つ目は、ローレンツ力そのものに関する話。三つ目の話は、アインシュタインが相対性理論を生み出すきっかけになった思考実験といわれ、ファインマンが電磁気学の教科書[4]で取り上げている。二つ目の話はその導入的なものであり、四つ目は、三つのケースを学んだ後の練習問題である。

### 6.5.1 ケース1：ローレンツ力が保つバランス

図 6.6 に示すよう、 $E_y$  と  $B_z$  が存在する空間を電荷  $q$  が速度  $v$  で  $x$  軸方向に動いている環境を考える。電荷にかかる力は、電場による  $y$  軸方向の力  $F_e=qE_y$  と磁場による  $y$  軸方向の力  $F_m=-qvB_z$  の合力  $F_e+F_m$  となる。静止系 (K 系) において、二つの力の釣り合いがとれていて  $F_e+F_m=0$  であるとしよう。電磁界の強さを  $E_y/B_z=v$  に設定するのである。こうすれば、電荷は、速度  $v$  で、 $x$  軸正方向にまっすぐ進んでゆくであろう。

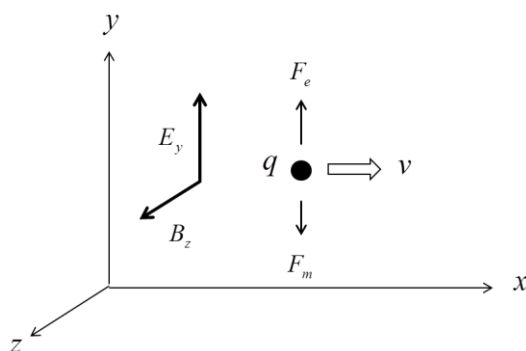


図 6.6 電磁界中を動く電荷に作用するローレンツ力

これを、電荷と同じ速度  $v$  で動く  $K'$ 系で見てみよう。電荷は止まって見えるので、磁界から受け受ける力  $F_m'$  はなくなっている。一方、電界による力  $F_e'$  は残っているので、合力 0 のバランスが崩れ  $y$  軸の正方向に、動き始めるであろう。でもそれは、 $K$  系において  $x$  軸方向にまっすぐ進む動きとは矛盾することになる。すわ、パラドックスだ、と言う話である。

このパラドックスは、 $K'$ 系での電磁界を上述のローレンツ変換してみると解消されることが分かる。 $K$  系の磁界  $B_z$  を上記条件でローレンツ変換すると、 $K'$ 系に  $-E_y'$  の電界を生み出し、合成電界が 0 になるのである (確認は読者にお任せ)。これで、 $K'$ 系では電荷は静止し続け、パラドックスが消えた。めでたし、めでたし、である。(厳密性にこだわる読者への補足:この問題は  $v \ll c$  ならばガリレイ変換でも説明がつくが、 $v$  が光速に近づくとその説明では破綻する。)

6.5.2 ケース2：電流が流れる並行導線に働く力

図 6.7 に示すように、間隔  $r$  で平行に置かれている 2 本の直線状導線に電流  $I$  が同じ方向に流れている。便宜上、電流を生み出す電荷を正にし、光速  $c$  で流れているとする。また、導線上にはこれ以外の電荷はないものとする（次のケース 3 では、電気的な中和状態を作り出すために、導線線上に正負同量の電荷を置いているが、ここではその一方のみ）。導線には電流  $I$  が光速で流れているので、その電荷密度  $\lambda$  は  $\lambda=I/c$  [A/m] である。下側の導線の位置で見た電界と磁界は以下になる。

$$E_y = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$B_z = -\frac{\mu_0 \lambda c}{2\pi r}$$

この電磁界によって下の導線が長さ  $dl$  あたりに受ける力  $dF$  は、電磁力  $dF_e$ 、磁気力  $dF_m$  共に  $y$  軸方向に向き、

$$dF_e = \lambda dl E_y = -\frac{\lambda^2 dl}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$dF_m = -B_z I dl = \frac{\mu_0 c^2 \lambda^2 dl}{2\pi r} = -\epsilon_0 \mu_0 c^2 dF_e = -dF_e$$

$$dF = dF_e + dF_m = 0$$

となり、二つの力はつりあって合力は 0 である。

これが、 $x$  軸方向に速度  $v$  で動く  $K'$  系の観測者にはどう見えるかである。電流方向に動くので、電流の大きさが減少し、徐々に磁気力が弱くなると思うであろう。極端な場合、 $v=c$  であれば磁気力が消え、電磁力と磁気力のバランスが崩れるであろう、すなわち、導線同士は反発力を受ける（=押さえなければ動き出す）と思うであろう。しかし、観測者は単に見ているだけ

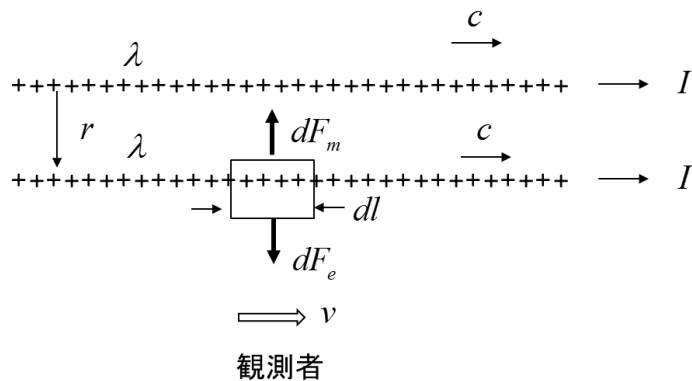


図 6.7 ケース 2（電流が流れる方向を  $x$  軸、力の向きを  $y$  軸）

で、物理現象に何も影響を与えていないのであるから、そのようなことになることは無いはずである。故に、これはパラドックスである。

では、実際はどうであろうか。力のローレンツ変換式(6.15)より、もともと  $F=0$  であれば、 $K'$ 系においても  $F'=0$  であり、矛盾はない。これはそのとおりなのであるが、何で、と言う部分が抜けていて、落ち着かない。

もう少し丁寧に見てみよう。 $K'$ 系の観測者が下側の導線上の電界と磁界を見ると、式(6.10)より以下になる。

$$\begin{aligned} E'_y &= \gamma E_y - \gamma v B_z \\ &= -\frac{\gamma \lambda}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{\gamma\mu_0 \lambda c v}{2\pi r} \\ &= \gamma \left(1 - \frac{v}{c}\right) E_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'_z &= -\frac{\gamma v}{c^2} E_y + \gamma B_z \\ &= \frac{\gamma v \lambda}{\pi\epsilon_0 c^2 r} - \frac{\gamma\mu_0 \lambda c}{2\pi r} \\ &= \gamma \left(1 - \frac{v}{c}\right) B_z \end{aligned}$$

$K'$ 系における電界と磁界に比が  $K$ 系と同じであるので、 $K'$ 系においても電気力と磁気力のバランスが保たれている（＝パラドックスではない）ということになる。

もう一つ別の視点、電流や電荷密度のローレンツ変換について見てみよう。使う式は(6.11)式である。二本の導線（断面積を1として正規化）の電荷密度は、 $K'$ 系観測者が見ると

$$\lambda' = \gamma \lambda - \gamma \frac{v}{c^2} I = \gamma \lambda \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

となる。長さ  $dl'$  に働くクーロン力  $dF'_e$  は以下で算定される。

$$dF'_e = -\frac{\gamma^2 \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 \lambda^2 dl'}{2\pi\epsilon_0 r}$$

さらに、観測者が見る電流  $I'$  も、速度は  $c$  で変わらず、式(6.11)より、

$$I' = \gamma I - \gamma v \lambda = \gamma (c - v) \lambda$$

となる。電流  $I'$  の長さ  $dl'$  当たりの力  $dF'_m$  は

$$dF'_m = \frac{\mu_0 I'^2 dl'}{2\pi r'} = \frac{\mu_0 \gamma^2 (c-v)^2 \lambda^2 dl'}{2\pi r} = -dF'_e$$

となる。これより、二つの力は観測者の速度の如何に関わらずバランスが取れていて、先のパラドックスが解消されたわけである。

以上のように、三つの視点でのローレンツ変換、すなわち、力  $F$ 、電磁界  $E, B$ 、電流及び電荷密度  $I, \lambda$  でローレンツ力の慣性系に対するバランスを調べたが、いずれの場合も、辻褃が合った答えが導き出された。このように、電磁気学は相対論的性質を内包し絶妙に組み立てられていることが分かる。

### 6.5.3 ケース3：電流と共に走る電荷に対する力

図6.8のケースで考える。アインシュタインが相対性理論を生み出すきっかけとなった思考実験と言われている（ファインマンの物理学[4]の図13.10）。1本の直線状導線（断面積  $A$ ）がありその中を負電荷（電荷密度： $\rho_-$  [C/m<sup>3</sup>]）が速度  $v$  で動いている（同図上）。導線内には負電荷と同量の正電荷（電荷密度： $\rho_+$ ；ただし、 $\rho_+ = -\rho_- \equiv \rho$ ）が静止していて、電氣的に中和している。この導線に平行に距離  $r$  離れ、負の電荷  $q$  が導線内の負電荷と同じ速度  $v$  で動いている。この電荷と同じ速度で動く観測者（同図下）に力はどう感じるかという問題である。静止系  $K$  の観測者には、

$$F = qvB = \frac{\mu_0 qv^2 \rho A}{2\pi r} \quad \left( \because B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)$$

の磁気力が導線に引かれる方向に働く。一方、 $K'$ 系の観測者にはその磁界が消えてしまうので、何の力も無い状態になっていると思うであろう。これがパラドックスである。でも、ケース1で学んできた読者には、いろいろ思うところがあるであろう。

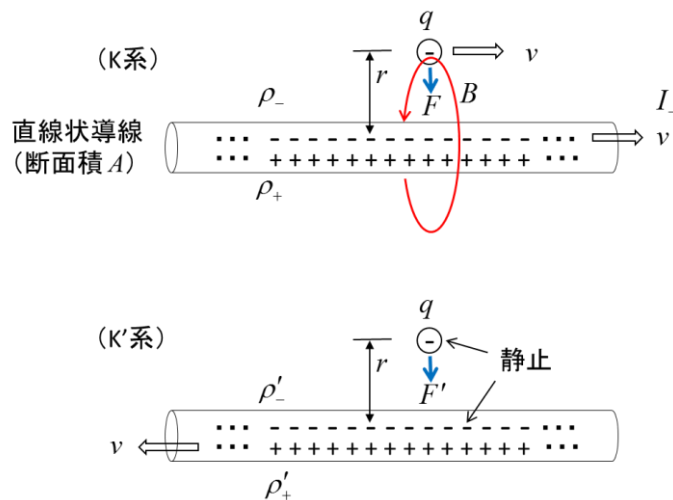


図 6.8 ケース3 （上：静止している観測者が見る環境、下：移動する観測者が見る環境）

これも、ケース2と同様に三つの考え方をしてみたい。

- ① 力のローレンツ変換(6.3.2項の(ii)) から、移動方向と直交する向きの力は  $F' = \gamma F$  であり、力の向きに変わりはない。大きさが  $\gamma$  倍違うのは、 $K$ 系と  $K'$ 系での時間の進み方の違いによる電荷密度の違いが現れている。ゆえに、両系で辻褄が合っていてパラドックスはない。
- ②  $K'$ 系では  $E'$ によるクーロン力のみであり、磁界  $B$  と電荷密度  $\rho$  のローレンツ変換から

$$F' = qE' = \frac{q\gamma v^2 \rho A}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} = \gamma F \quad \left( \because E' = \frac{\rho' A}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\gamma v^2 \rho A}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} \right)$$

となり、①と同じ結論になる。

- ③ (6.11)式を使って正負の電荷密度を  $K'$ 系で見ると

$$\rho'_- = \gamma\rho_- - \frac{\gamma v I / A}{c^2} = -\gamma\rho \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

$$\rho'_+ = \gamma\rho_+ = \gamma\rho$$

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \frac{\gamma\rho v^2}{c^2}$$

であるので、 $K'$ 系において電荷  $q$  に働くクーロン力は

$$F' = qE' = \frac{q\rho' A}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{q\gamma v^2 \rho A}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} = \gamma F$$

となる。 $K$ 系では、電気力が、 $K'$ 系では磁気力が働かないが、力としてのバランスは①～③とも同じになり矛盾が無い。 $K$ 系でバランスが取れていた正負の電荷密度が、 $K'$ 系ではバランスが崩れ、その結果として電気力が生まれていると解釈できる。

#### 6.5.4 ケース4：電流ループの中の電荷

図 6.9(a)のように、 $K$ 系において、 $x$ - $y$ 面上に原点を中心とする半径  $a$  の円があり、円の向きに電流  $I$  が流れている。円の中心に電荷  $q$  (正電荷を仮定) が置かれている。この状態を  $K$ 系で見れば、電荷の位置に磁界  $B$  (向きは  $z$  軸方向) はあるが、電荷は静止しているので何の力も働いていない。すなわち、この状態は変化することなく安定である。一方、これを同図(b)の移動系 ( $K'$ 系) で見るとどうであろうか? (相対論的效果で、円が楕円に見えるが、今はそれを気にしなくて良い)。ループ電流と共に、電荷も左側に速度  $v$  で動いているのであるから、この電荷は磁界によって図の  $y$  軸方向にローレンツ力  $qvB_z$  を受ける。他に電界の存在は見えず、電荷は  $y$  軸方向に動いてしまうことになる。単なる見方の違いによって、力のバランスが変わってしまうことはありえず、これがパラドックスである。

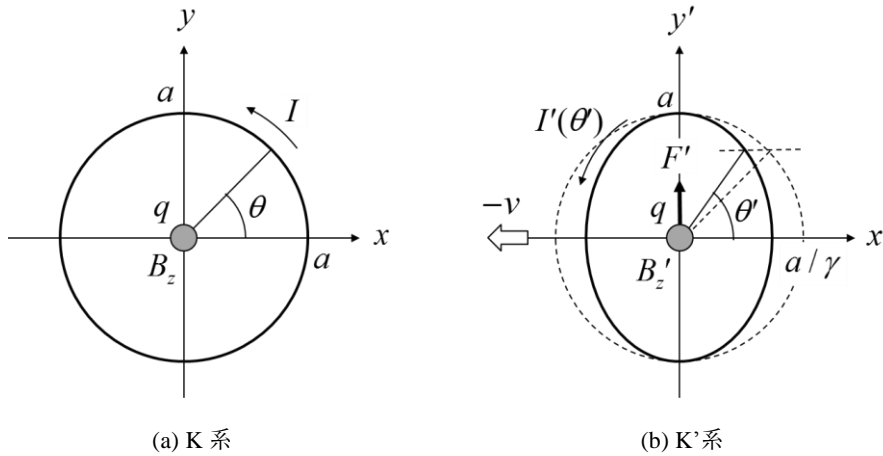


図 6.9 ケース 4：ループ電流の中心に置かれた電荷は力を受けるか？

しかし、ここまで学んできた読者には、もはや詳しい説明は不要であろう。K 系と K'系での電磁界の大きさは上記②の視点で

$$E_y = 0, B_z = \frac{\mu_0 I}{2a} \rightarrow E'_y = -\gamma v B_z, B'_z = \gamma B_z = \frac{\gamma \mu_0 I}{2a}$$

である。それぞれの系で中心の電荷に働く力は

$$\mathbf{F}'_m = -q\mathbf{v} \times \mathbf{B}' = \frac{\gamma \mu_0 q v I}{2a} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}'_e = q\mathbf{E}' = -\gamma q v B_z \mathbf{j} = -\frac{\gamma \mu_0 q v I}{2a} \mathbf{j} = -\mathbf{F}'_m$$

となり、ともに、 $\mathbf{F} = \mathbf{F}' = 0$  になる。故に矛盾は無い。

上述の三つのケースのように、異なる視点において一見パラドックスになっているような状況を、相対性理論によってつじつまが合うように説明することができ、すなわちパラドックスではなかったと言うことが明らかになり、安心を得る。

電磁気学のローレンツ力に係わる力学的振る舞いについて、ここで述べてきた例のように、移動する観測者から見ると電気力と磁気力のバランスが崩れることを捕らえてパラドックスとする問題提起がよく行われている。その場合の大部分（たぶんほとんどすべて）において、本節で述べたような相対論によって、すなわち、ローレンツ変換によってパラドックスは解消できるはずである。

## 6.6 電磁界解析の武器としての相対論

前節までは、電磁気学に綻びが出ないように相対性理論が支えていますよ、と難しく考える方向へ話を展開してきた。本節では、その逆に、相対論の性質を使うことによって、一見、複雑な電磁気問題が簡単に解決できる例を示す。その問題は以下である。

**問題** 図 6.10 に示すように、 $x$  軸上を定速度  $v$  で走る電荷  $Q$  がある。この電荷が作る電界と磁界を求めよ。

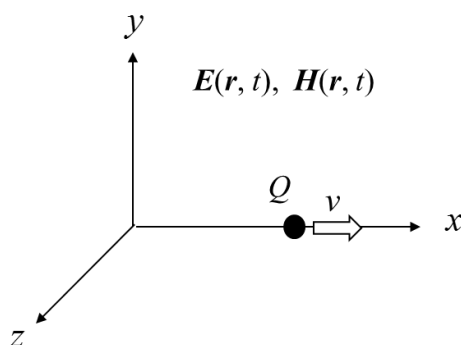


図 6.10 定速移動する電荷が作る電磁界 ( $t=0$  で原点通過)

ここでは、問題を解きやすくするために、次の二つの条件を加える。

- i) 移動速度  $v$  は光速  $c$  に比べて十分小さい：  $v \ll c$
- ii) 電荷  $Q$  は微小半径  $a$  の球面上に均一に分布している

解法は、マクスウェルの方程式から解く正攻法（解法 1）と、相対論を用いて解く方法（解法 2：慣性系のローレンツ変換を用いて解く方法）の二つを示す。目的は、後者の手法の方が極めて簡単に答えに行き着き、かつ、上記の条件 i), ii) も不要とを言いたいためである。

### (1) 解法 1：マクスウェルの方程式より

以下、ステップバイステップでこの問題を解いてみよう。磁界を求めるのが主目的である。

#### ステップ 1：電界を求める

電荷が静止している状態でできる電界が速度  $v$  で動いていると考え、電界を求める。

$$\text{球外：} (x - vt)^2 + y^2 + z^2 \geq a^2$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \left( (x-vt)^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}} \begin{pmatrix} x-vt \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

球内：  $(x-vt)^2 + y^2 + z^2 < a^2$

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}$$

構造の  $x$  軸を中心とする回転対称性により、磁界は  $x$  軸を負側から見て時計の回転方向に向きをもつ成分をもつ。以下は、アンペア・マクスウェルの法則を使って、 $t=0, x=z=0$  における磁界  $H_y$  成分（すなわち周方向成分  $H_\phi$ ）を求めるステップに入る。

ステップ2：  $x=0$  面における変位電流密度の  $x$  軸方向成分  $i_{dx}$  を求める

$$i_{dx} = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{Qv \left( 2(x-vt)^2 - y^2 - z^2 \right)}{4\pi \left( (x-vt)^2 + y^2 + z^2 \right)^{5/2}}$$

ステップ3：  $x=0$  面を  $t=0$  において鎖交する変位電流密度  $i_{dx0}$  を求める

$$i_{dx0} = \frac{-Qv}{4\pi r^3} \quad \left( r \equiv \sqrt{y^2 + z^2} \right)$$

ステップ4：点  $(0,y,0)$  を通り、 $x=0$  面上に  $(0,0,0)$  を中心とする半径  $y$  の円を考え、この面  $S$  を通過する変位電流  $I_{d0}$  を求める

$$I_{d0} = \int_0^{2\pi} \int_a^r i_{dx0} r dr d\phi = \frac{vQ}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

ステップ5：  $t=0$  において面  $S$  を通過する伝導電流  $I_0$  を求める。このため、微小距離  $\Delta x$  を微小時間  $\Delta t (= v\Delta t)$  で進む電荷の球に着目し、 $x=0, t=0$  の瞬間を見ると、伝導電流  $I_0$  は

$$I_0 = \frac{\Delta Q_0}{\Delta t}, \quad \Delta Q_0 = \frac{2\pi a v \Delta t Q}{4\pi a^2} \quad \rightarrow \quad I_0 = \frac{vQ}{2a}$$

ステップ6：面  $S$  を貫く全電流  $I_{T0}$  を求める

$$I_{T0} = I_0 + I_{d0} = \frac{vQ}{2r}$$

(面  $S$  を貫く全電流は電荷球の大きさ  $a$  には依存しないことが分かった)

ステップ7： $x=vt=0$ における磁界  $H_\phi$  をアンペア・マクスウェルの法則（=周回積分の法則）の式で求める

$$H_\phi(r) = \frac{I_{T0}}{2\pi r} = \frac{vQ}{4\pi r^2} \quad (@ t=0, x=0)$$

ここでは、 $t=0$ における  $x=0$  面での磁界を求めたが、この考え方によって、任意の場所（ただし電荷  $Q$  で仮定した球の外側）、任意の時間の磁界が求められる。結果だけ示すと次式になる。

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \frac{vQ}{4\pi \left( (x-vt)^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

ステップ6で示したように、最初に ii)で仮定した電荷球の大きさへの依存性は、伝導電流と変位電流が力を合わせて式から消してしまう働きをし、大変興味深い。

## (2) 解法2：相対論を使って

この座標を静止系  $K$  とし、電荷と共に動く系を移動系  $K'$  としよう。電荷  $Q$  は慣性系に対して保存されるので、両系で変わらない。移動系  $K'$  では電荷が止まっているので、電界のみの環境となり、座標を  $x', y', z', t'$  として次式で表される。

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{pmatrix} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \left( x'^2 + y'^2 + z'^2 \right)^{3/2}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}' = \mathbf{0}$$

電磁界の変換公式（式(6.10)）を逆変換し、さらに、 $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{H}$  に変換した次式

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & \gamma\mu_0 v \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & -\gamma\mu_0 v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma\epsilon_0 v & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \gamma\epsilon_0 v & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \\ H'_x \\ H'_y \\ H'_z \end{pmatrix}$$

と、座標の変換式（式(6.8)）より、図 6.9 に示す  $K$  系での電磁界は

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \frac{\gamma Q}{4\pi\epsilon_0 (\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x-vt \\ y \\ z \\ 0 \\ -\epsilon_0 v z \\ \epsilon_0 v y \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

となる。

速度  $v$  を  $v \ll c$  で仮定した i) では、ローレンツ因子  $\gamma$  は 1 に近似できるので、その条件において、先に導いた電磁界式(6.15), (6.16)と(6.17)式は等しくなっている。後者の手法の優位性が実感できたことと思う。

なお、求められた結果から、電界と磁界の間の

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 v \begin{pmatrix} 0 \\ -E_z \\ E_y \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{v} \times \mathbf{D}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad (6.18)$$

で表される美しい関係を読み取ることができる。



### ティータイム アインシュタインの光時計

本文中で、動いている系の中では時間の進みが遅い、とすることを説明した。双子のパラドックス(あるいは浦島太郎効果)などとして相対性理論の入門書には必ず出てくる話である。でも、なかなか感覚的にピンとこない。そこで、アインシュタインが相対性理論を説明するのに好んで使ったと言う光時計の思考実験をしてみよう。光時計とは、一定長  $l$  の筒の両端に鏡を置き、光を往復させ、その反射回数で時間を測る空想上の時計である(図 6.11)。静止状態で、光が端 A から端 B まで進む時間(片道時間)を  $\tau_0$  とすると、 $\tau_0 = l/c$  である。この光時計を速度  $v$  で飛ぶロケットに図のように置く。この時計の読みでロケットの中の時間を決める。ロケット内の時間の進みは静止状態のときと同じである。一方、ロケットの中の光時計を地上の人が見ると、図のように、片道時間(A→B)を  $\tau$  とすると、その空間の長さは  $\sqrt{l^2 + v^2 \tau^2}$  になり、ここを光が進む時間は  $\sqrt{l^2 + v^2 \tau^2} / c$  になる。この時間が  $\tau$  なので、

$$\tau = \sqrt{(c\tau_0)^2 + (v\tau)^2} / c \rightarrow \tau = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tau_0 = \gamma \tau_0$$

となり、時間の進み方は  $\gamma$  倍地上の方が速い、ということになる。納得できたでしょうか。

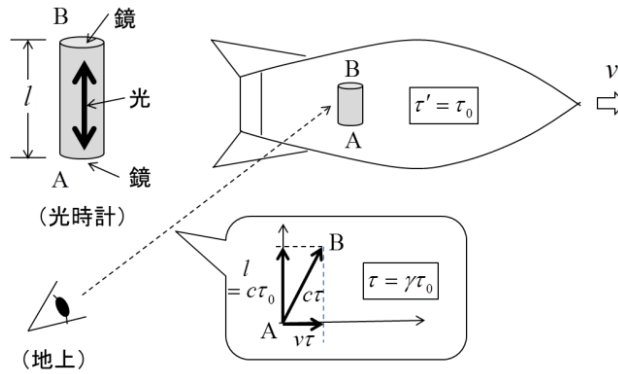


図 6.11 光時計を使った時間関係の説明

ところで、光の速さの正確な値を知っていますか？ 299,792,458m/s ですね。様々な手法を用いて測定精度を上げ、ここまできたわけである。では、さらに、新しい測定法が開発されて、未来には、この有効桁数が上がってゆくのでしょうか？ いえ、もう変わりません。国際単位系 (SI) では、1983 年、1メートルの長さを「光が 1/299,792,458 秒間に進む距離」と決めたからである。それゆえ、光速  $c$  の値は定義値として、上記で固定されてしまったのである。1m の長さが実感できたメートル原器 (昔、理科の教科書に載っていた) が懐かしい。

付録  $F' - qE' - q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}' \rightarrow \mathbf{0}$  の確認

$x$  成分  $F'_x - q(E'_x + v'_y B'_z - v'_z B'_y)$  を、それぞれの部分について調べてゆく。

$$\begin{aligned} v'_y B'_z - v'_z B'_y &= \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} \left(-\frac{\gamma u}{c^2} E_y + \gamma B_z\right) - \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} \left(\frac{\gamma u}{c^2} E_z + \gamma B_y\right) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \left\{ (v_y B_z - v_z B_y) - \frac{u}{c^2} (v_y E_y + v_z E_z) \right\} \end{aligned}$$

より

$$q(E'_x + v'_y B'_z - v'_z B'_y) = q \left[ E_x + \frac{1}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \left\{ (v_y B_z - v_z B_y) - \frac{u}{c^2} (v_y E_y + v_z E_z) \right\} \right]$$

一方、

$$\begin{aligned}
F'_x &= \frac{F_x - \frac{u}{c^2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \\
&= \frac{F_x - \frac{u}{c^2} q \left\{ (E_x + v_y B_z - v_z B_y) v_x + (E_y + v_z B_x - v_x B_z) v_y + (E_z + v_x B_y - v_y B_x) v_z \right\}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \\
&= \frac{q \left\{ E_x + v_y B_z - v_z B_y - \frac{u}{c^2} (E_x v_x + E_y v_y + E_z v_z) \right\}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}
\end{aligned}$$

これらを、以下の式の左辺に代入し整理すると

$$F'_x - q(E'_x + v'_y B'_z - v'_z B'_y) = 0$$

となる。他の成分も同様に 0 となり、ローレンツ力のローレンツ変換に対する共変性を確認することができた（証明したわけではないことに注意）。

### 参考文献

- [1] アインシュタイン（内山龍雄訳・解説），相対性理論，岩波文庫，1988。  
（アインシュタインの1905年の原著論文（邦訳：動いている物体の電気力学）と解説）
- [2] 太田浩一，電磁気学の基礎 II（§15.6），東京大学出版会，2012.
- [3] 戸田昭彦，“電磁気力と特殊相対性理論，”  
<https://home.hiroshima-u.ac.jp/atoda/Electromagnetism/23EM-Relative.pdf>
- [4] R.P.ファインマン，R.B.レイトン，M.L.サンズ：（宮島龍興訳），ファインマン物理学 III 電磁気学，岩波書店，1969.
- [5] 江沢洋，上條隆志，相対論と電磁場，江沢洋選集 II，日本評論社，2019.

[目次のページへ戻る](#)