

第7章 電磁誘導の法則

ファラデーのパラドックスを考える

電磁気学の根幹を支える法則の一つに電磁誘導の法則がある。法則だからあくまで経験則であってその法則が正しいことを証明できる人は誰もいない。例外がないから我々はそれが自然界のなせる業と信じて受け入れているだけである。でも、そこにどのようなからくりがあるかについては、思考を巡らすことによって理解を深めることができる。本章では、電磁誘導による磁界中の起電力発生メカニズムについて、場の物理量 (\mathbf{E} , \mathbf{B}) で表されるマクスウェルの方程式と、ファラデーが提唱した磁力線切断則の両面から、何が導線に作用しているかを考えてみたい。それを踏まえ、電磁誘導の一形態である単極誘導について、ファラデーのパラドックスと呼ばれる動作の謎を見てみよう。

注：本章は初版の三偉人の会話風記述を、文章記述に差換えている (2024.07, 2024.09)。さらに、本改訂版では、電磁誘導法則説明部分を大幅に書き換え、かつ、後半のファラデーのパラドックスの謎解きを充実させている (2025.04)。

7.1 電磁誘導の発見

1820年、デンマークのエルステッド (Hans Christian Ørsted) は電流が流れている針金のそばで磁針が触れることことに気づき、電流の磁気作用、つまり、電気から磁気が生まれることを見出した。これを知ってその逆に、磁気から電気を得る方法もあるはずと思って多くの科学者が実験を繰り返していた。イギリスのファラデー (Michael Faraday) もその一人で、強い磁石のそばに針金を置けばそこに電流が流れるかもしれないと期待して、いろいろの構成を工夫して試してみたがうまくゆかなかった。そのように試行錯誤すること十年、1831年の8月のある日、長さ203フィート (約62m) の銅線一本を大きな木片にぐるぐる巻きつけ、もう一本をその隙間に接触しないように巻き付けたものを作り、二つの螺旋のうち一本を検流計 (ガルバノメータ) に繋ぎ、他方をボルタ電池に繋いだ。そうすると電池に繋いだ瞬間、検流計がわずかに振れた。同様に、電池からははずした瞬間も僅かに振れた。このことから、磁力線の強さが変化する瞬間だけ、電気が生まれると気づいた。その後いろいろの構成で実験を重ね、この確信を深めることができた。この発見の後、レンツ (H. Lenz) やノイマン (F. Neumann) の努力によって、ループ状の導線に発生する起電力 V は次式で与えられることが分かった。

$$V = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (7.1)$$

式中の Φ_m はループ内を貫く磁気の総量 (磁束：単位 Wb)、負号がつくのは、磁束の増加を防ぐ向きに電流が流れるように起電力が生まれるという意味。起電力 (electromotive force : emf)

は電流を駆動する力を与えるもので、単位はボルト(V)である。乾電池など化学反応によって生み出される起電力が代表的であるが、ここで対象とする起電力は電磁誘導によって生まれる起電力なので、**誘導起電力**と呼ばれる。起電力は単位電荷あたりに働く力の接線成分を導線に沿って回路を一回り積分したもの、すなわち、単位電荷が回路一回りしたときにもらう全仕事に等しい。この導線ループを切断して電位差(電圧)を測ればそれが起電力であるが、非保存場($\nabla \times \mathbf{E} \neq \mathbf{0}$)においては、この値は経路(=導線形状)に依存する。

(7.1)式はすばらしい式で、発生する起電力の大きさはすべてこの式で求められる。その後のあらゆる実験に対して例外なく成立し、**電磁誘導の法則**(あるいは**ファラデーの電磁誘導の法則**)と呼ばれている。以下では、(7.1)式で表される電磁誘導の法則を、後に議論する**磁力線切断則**と区別するために、**磁束変化則**と呼ぶ。

7.2 電磁誘導の法則を表すマクスウェルの方程式

電磁誘導の法則は、図 7.1 に示すように、固定した空間閉路の中で磁場が変化する場合であっても、静磁場の中で回路の形状が時間的に変化する場合であっても、閉路に生み出される起電力は式(7.1)で共通に求められることが特徴になる。具体的な導線ループが無くても、空間に経路を定め、電界の経路方向成分を経路一周分積分すれば、導線ループの場合と同じ起電力を得る。

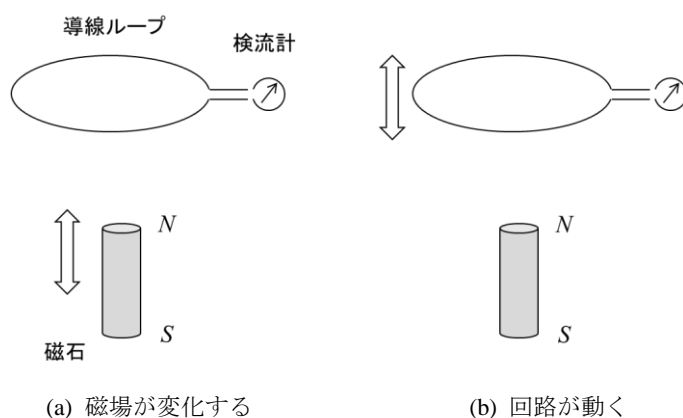


図 7.1 電磁誘導の二つのタイプ

7.2.1 磁束変化則

ファラデーによって発見された電磁誘導の法則の普遍化は (7.1)式を出発点とする。 Φ_m はループ(閉回路)が作る面を貫通する磁束の総量であり、磁束密度 \mathbf{B} を用いて次式で表される。

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \tag{7.2}$$

面積分する曲面 S (\mathbf{n} : 単位法線ベクトル) はループ c を縁とする任意の形状で良い。このように、ループ面を貫く磁束の総量の時間変化が起電力を生むという見方をここでは、**磁束変化則**と呼ぶ。起電力 V は、物理的な実体としての導線がなくても、空間に任意の定められるループ c

に対する電界の線積分値でもある。

(7.1)式は以下のように変形できる。

$$V = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\partial\Phi_m}{\partial t} - \left(\frac{\partial\Phi_m}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi_m}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi_m}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) = V_1 + V_2 \quad (7.3)$$

$$V_1 \equiv -\frac{\partial\Phi_m}{\partial t}, \quad V_2 \equiv -\left(\frac{\partial\Phi_m}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi_m}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi_m}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right)$$

このように起電力 V を V_1 と V_2 に分けると、夫々は以下のような意味をもつ。

V_1 : ループが空間に固定されている状態において、磁界が時間的に変化するときにもまれる起電力

V_2 : 磁界が空間に固定されている状態において、ループが時間的に変化する (=動く) 時に生まれる起電力

マクスウェルの方程式では電磁誘導の法則は次式で与えられる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{微分形表示}) \quad (7.4)$$

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{積分形表示}) \quad (7.5)$$

以上により、起電力 V_1 と V_2 、及び V は以下のように与えられる (V_2 導出の詳細は[1]の p. 291 等に)

$$V_1 = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (7.6a)$$

$$V_2 = \oint_c \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (7.6b)$$

$$V = V_1 + V_2 = \oint_c (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (7.6c)$$

ここで、ベクトル \mathbf{v} はループ各点の移動速度を表す。起電力 V_2 は動く経路が $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ の電界を感じた結果であるとも言えるし、導体経路の場合には導体中の自由電子に $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ のローレンツ力が働いた結果とも解釈できる。

ループに起電力が発生するということであるから、それがどこに生まれるかという発生場所も知りたくなろう。(7.6c)式を見ると線積分で表されているのであるから、 $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ が値を持つところと言えそうである。(7.6b)式により、 V_2 に対しては、 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ が値を持つ場所が特定でき、そこが発生場所と言えるが、(7.6a)式で表される V_1 は面積分の結果であるので、発生場所の特定は本質的にできない。磁界を生み出すベクトルポテンシャル ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ で関係付けられる \mathbf{A}) にまで立ち返ると特定が可能になるが、磁束密度の情報だけでは無理である。

電磁誘導の法則を発見したファラデーは、電気力線や磁力線のイメージによって、近接作用の考え方(場の概念)を膨らませて行った。マクスウェルは、ファラデーの場の概念を数式化し、

電磁気学を作り上げたが、完成した方程式からは電気力線や磁力線が見えなくなり、場を表す物理量（電界 E 、磁界 H 、電束密度 B 、磁束密度 D ）の相互関係を表す理論になっている。場はそれぞれの位置において時間的に変化するものであって、空間を動くものではないという捉え方である。

7.2.2 相対性原理

上述の方程式はある一つの座標系（固定空間）の中で起きる物理現象を示している。ある座標系に対して一定方向に一定速度で動く座標系（＝等速直線運動する系）があるとき、このような座標系は**慣性系**と呼ばれる。物理法則は慣性系に対して共通であらねばならず（＝**相対性原理**）、この性質は**共変性**と呼ばれる。家の中でも、一定スピードで走る電車の中でも、電磁誘導の法則は同じように成立する（＝それぞれの座標系に対して同じ式形で表される）ということである。

ニュートン力学では、慣性系間の座標系の変換はガリレイ変換（＝地上で速度 v で動くものが電車の中では電車の速度分遅く見える（あるいは速く見える）とする変換則）で共変性が保たれたが、アインシュタインの（特殊）相対性理論では、ローレンツ変換（＝全ての慣性系で光速一定、時間と空間の一体変換）になる。マクスウェルの方程式はローレンツ変換に対して共変性を有し、電磁気学は綻びの無い理論になっている（本書第6章参照）。

ガリレイ変換は移動速度が光速に比べて十分遅い系に対するローレンツ変換の近似であるが、本章で議論しているような程度の動きの問題に対しては、ガリレイ変換で考えて全く問題ない。一例として、静止空間にある座標系を考えこれを K 系とし、 z 軸方向に一樣な磁界 B_z があるとす。これを、 x 軸方向に速度 v で動く系（ K' 系）内の観測者には電界 E'_y と磁界 B'_z が以下のように見える。

ローレンツ変換（相対論）

$$E'_y = -\gamma v B_z, \quad B'_z = \gamma B_z \quad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) \quad (c: \text{光速}) \quad (7.7)$$

ガリレイ変換（非相対論）

$$E'_y = -v B_z, \quad B'_z = B_z \quad (7.8)$$

(7.6)式で表した起電力 V_2 は静止系 (K 系) から見て動くものに対して現れた起電力であったが、動く導線から見れば、すなわち移動系 (K' 系) においては、そこには電界があると感じているというわけである。動くものに現れる電磁現象は、電磁界の相対論効果とも言えるものである。

7.2.3 例題

上記の復習と後の議論に関連する四つの例題を考えてみよう。

ケース1：ループ内の磁束が変化する

ケース2：ループの形が変化する

ケース3：磁界も回路も変化しないのに起電力が生まれる

ケース4：回路の形が変化するのに起電力が（ほとんど）生まれない

ケース1：ループ内の磁束が変化する

図7.2に示すように、無限長ソレノイドの外側に導線ループがある。ソレノイドの励磁電流 I が時間と共に変化すると、ソレノイド内部の磁束も変化する。ループの場所、すなわちソレノイドの外側には磁界はないが、ソレノイド内部の磁束変化により起電力 V_1 が求められる。

このケースの不思議は、以下の点にあると思う。電流 I が一定の場合、ソレノイド内には磁界のみが、ソレノイドの外は電界も磁界もない空間になる。電磁界的に何もない空間に導線ループを置いて、どうしてそれに起電力が生まれるのかと言う疑問である。種明かしをすると、電流が変化して内部の磁界が変化するときには外部に電界の渦ができていて、導線はこの電界を感じ取っているのである。磁束の周りにはベクトルポテンシャルの渦ができていて、磁界の時間変化と共にベクトルポテンシャルも変化し、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \dot{\mathbf{A}}$ の形で電界が生まれていると言うわけである。（この議論の続きは7.3.2項で）

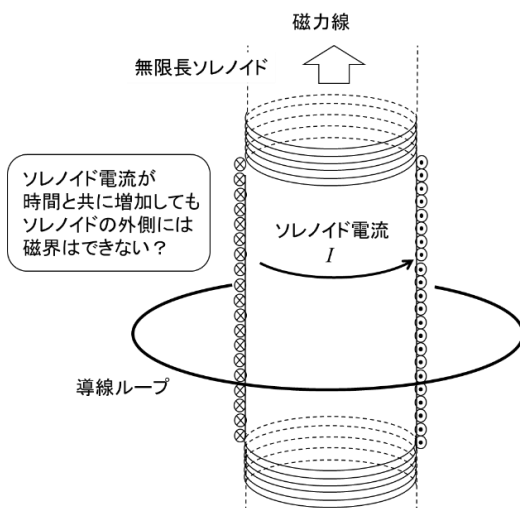


図7.2 ケース1：無限ソレノイドの外側の導線ループに起きる電磁誘導
(励磁電流 I が時間とともに変化する場合)

ケース2：ループの形が変化する

図7.3に示すように、右側が開いたコの字型の導線上を、導線と接触しながら右方向に速度 v で動く導線（辺BC）がある。このとき、磁界は $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k}$ (\mathbf{k} : z 軸正方向を向く単位ベクトル) で強度一定とする。

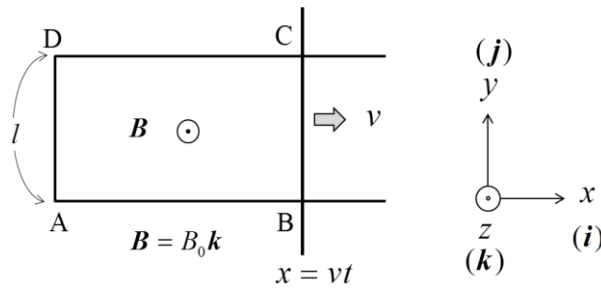


図 7.3 「回路が動く」の構成例

このケースでは、ループの起電力は3つの方法で求められる。一つは式(7.1)で直接に起電力 V を求める方法である。経路 ABCDA で結ばれる閉路には、面内に存在する磁束 Φ_m が時間とともに増加するので、起電力は、

$$V = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -lvB_0 \quad (\because \Phi_m = lvtB_0)$$

となる。この式からはループのどこに起電力が発生しているかはわからない。

二つ目は動く導線 BC に対する起電力 V_2 を(7.6b)式で求める方法で

$$V = V_2 = \int_0^l \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -lvB_0$$

となる。この方法では起電力の発生場所(辺 BC)が特定できる。

もう一つの方法は相対性原理を使う手である。起電力が発生するのは磁界中を動く辺 BC の棒。速度 \mathbf{v} で動く K' 系で棒を見れば静止しているが、(7.8)式より、棒は $\mathbf{E} = -\mathbf{v}B_0$ の電界を感じ、 $-lvB_0$ の起電力を生む。電磁誘導に対して多様な見方ができる例である。

ケース3：磁界も回路も変化しないのに起電力が生まれる

図 7.4 に示すように、磁束密度 \mathbf{B} に直交する面に半径 a の金属円板があり、角速度 ω_0 で回転している。円板の中心と円板の縁を導線で結び円板と導線を結ぶ回路(ループ)を作り、検流計を置く。円板の縁と導線は電氣的に接触していて、かつ、導線は空間に対して固定されている。固定ループ内で磁束密度の時間変化がないので、磁束変化則では説明できないだろう、と言う例になる。

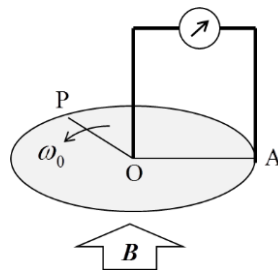


図 7.4 磁界も回路も変化しないのに起電力が生まれる例

ここでも解法として二つの方法を示したい。

一つは、動く電荷に働くローレンツ力より V_2 が生まれるとするもの。周方向に動く円板内の自由電子は $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ のローレンツ力を受け、軸方向に移動する。その結果軸方向に電位差が生まれその大きさ（起電力の絶対値）は次式になる。

$$|V| = |V_2| = \int_0^a v B dr = \frac{1}{2} \omega_0 a^2 B$$

もう一つは磁束変化則より。回転により扇型 OAP の面積 $S (= \omega_0 a^2 t / 2)$ が時間と共に増えてゆき、この部分を鎖交する磁束の時間変化が起電力になる。故に、

$$|V| = \frac{d}{dt} SB = \frac{1}{2} \omega_0 a^2 B$$

こう考えれば、磁束変化則でも説明ができる。

このケースは、後に述べるファラデーのパラドックスに再び登場する。

ケース4：回路の形が変化するのに起電力が（ほとんど）生まれない

図 7.5 に示すように、磁束密度 B と直交して置かれている二つの導体板をわずかに離して結ばれている開回路がある。この間隙に小さな導体球を置いて電氣的に接触させ閉回路を作る。今、導体球を P から P' に転がしたとき生まれる起電力は無視できる程度に小さい（はずである）。回路の形（電流の通り道）が APB（点線）から AP' B（一点鎖線）に大きく変わって、回路を貫通する磁束変化も大きいように見えるが、なぜ起電力は無視できる程度に小さいのだろうか。

（注：図 7.5 はファインマンの電磁気学教科書[2]の図 17-3 を原理が分かりやすくなるよう小修正したもの）

この問題は、次節で述べる磁力線切断則で考えると分かりやすい。磁束変化則に対する説明は読者にお任せ。

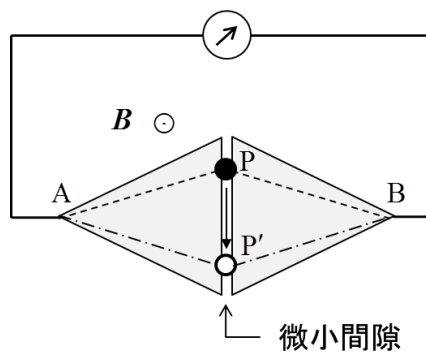


図 7.5 ケース4：回路が大きく変化するのに起電力が生まれない例

7.3 磁力線切断則

7.3.1 ファラデーの確信：起電力は導線が磁力線を切るとき生まれる

ファラデーは「磁石からは磁力線が出ていて、磁石を動かせば磁力線も一緒についてくる」というイメージをもっていた。磁場がある環境では、空間に磁力線が密に張り巡らされていると言う描像である。今の時代、紐のような磁力線が本当にあると思う人はいないであろうが、物理の直観的理解に役立つ仮想的なものと思えば良いであろう（注1）。それを踏まえた上で、以下、あたかもそれが実在すると言う前提で話を進めてみたい。

【注1：物理的実体はないのだから、磁力線の本数や太さなどを論じることは意味がない。磁場には無数の磁力線があって、太さは極めて細い、と言う範囲でしか議論できない。磁束密度 B を与え、単位面積当たりの本数 N を仮定すれば、磁力線1本当たりの磁束は B/N で自動的に決まる。】

磁力線には始まりや終わりが無く、一本一本が輪になっている。それぞれの磁力線の磁束は皆等しく Φ_{m0} であるとしよう。この値は無限に小さく、ゆえに、通常磁界は無数の数の磁力線よりなると思っしてほしい。(7.1)式で表されるように、導線ループが作る面を貫く磁束の総量、すなわち、磁力線の本数が時間的に増えると言うことは、導線のどこかにおいて、外部から磁力線が導線を越えて内部に入ってきたと言うことになる（減る場合はその逆）（図7.6）。ループの導線が気づかない間に、ループの内部に磁力線が勝手に発生することは $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ が許さないためである。ファラデーはこの動作を導線が磁力線を切ると表現した。そして、電磁誘導による起電力は導線が磁力線を切る時間密度に比例すると捉えた（初期（1831年）の論文では、導線が磁力線を切るとき電磁誘導が生じると言う表現）。導線が磁力線を切る際に「ガリッ」と音が出るとしたら、このガリガリ音の頻度が誘導起電力に比例すると考えたのである。電磁誘導をこのように捉えることを、ここでは、**磁力線切断則**と呼ぶ。磁力線から見れば導線が動いてきて切られることになるが、導線から見れば磁力線が動いて自ら切られてゆくということになり、どちらが動いているかは関係なく、相対的な動きだけで決まる。導線と磁力線の速度差を \mathbf{v} で表せば、導線を切る頻度は $|\mathbf{v} \times \mathbf{B}|$ に比例する。これはまさに導体中の自由電子が受けるローレンツ力での説明になる。この磁力線切断則は正鵠を射ていて、電磁誘導のさまざまなケースに通用する（この後、前述の4つのケースについて調べる）。

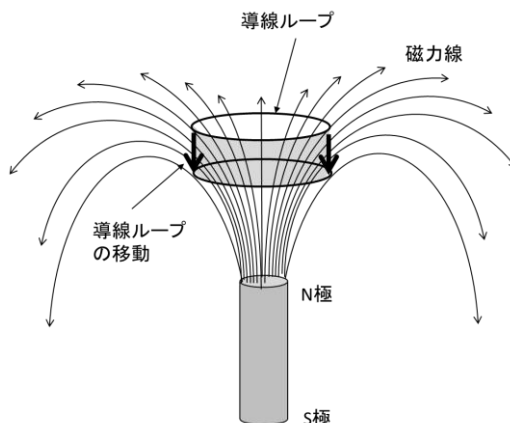


図 7.6 磁力線切断則：ループ内の磁力線の本数はループの導線が切ること（↓）によって変化する

磁力線切断則の理論的根拠を述べる。図 7.7 に示すよう、一本の磁力線の周りには、ベクトルポテンシャル \mathbf{A}_0 の渦ができています。この磁力線を任意の閉曲線（ループ） c で囲み、その線上のベクトルポテンシャルの経路方向成分の周回積分は、磁力線の場所によらず Φ_{m0} になる。一方、磁力線がループの外側にあるときはこの周回積分値は 0 になる。まとめると

$$\oint_c \mathbf{A}_0 \cdot d\mathbf{l} = \begin{cases} \Phi_{m0} & (\text{磁力線がループ内にある}) \\ 0 & (\text{磁力線がループ外にある}) \end{cases} \quad (7.9)$$

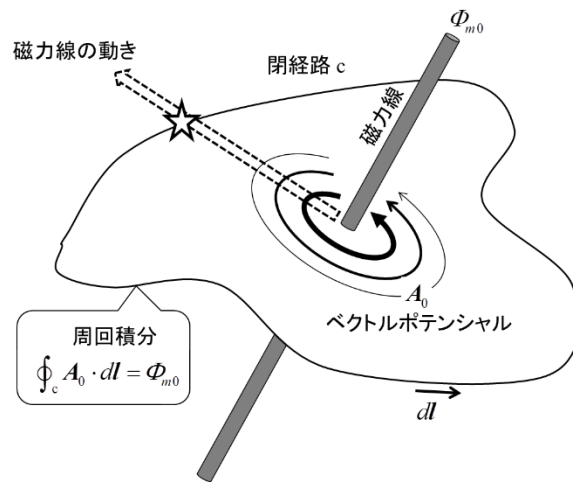


図 7.7 誘導起電力（導線が磁力線を切るとき（☆）に生まれる）の説明図（無数に敷き詰められた磁力線の一本に着目）

さらに、導線の場所における誘導電界を \mathbf{E}_0 とすると、起電力 V_0 は電界成分 \mathbf{E}_0 の周回積分で得られ、かつ、その電界とベクトルポテンシャルの関係 ($\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t$) より、以下のように表される。

$$V_0 = \oint_c \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = -\oint_c \frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_c \mathbf{A}_0 \cdot d\mathbf{l} \quad (7.10)$$

空間積分と時間微分の順序を入れ替えた上式最終辺中の周回積分は、ループが磁力線を切ったとき（＝図の☆に来たとき）、すなわち、磁力線がループの外に出る、あるいは入るときに値が変わるので、その微分値、すなわち、起電力 V_0 は、この瞬間だけ値をもつ。「導線が磁力線を切る瞬間に、起電力が生まれる」と言うことになる。一つ一つの磁力線が切られる瞬間によって生まれる起電力は離散的（＝デルタ関数的）ではあるが、磁力線に若干の太さを仮定して微分値を有限の値にし、かつ、多数のものに現れる統計多重効果を取り入れれば、(7.1)式、すなわち、磁束変化則に行き着くであろう。ベクトルポテンシャルの働きという視点で見れば、ファラデーの説明に納得ゆく（ファラデーの時代には、まだベクトルポテンシャルの概念は無かったが）。また、導線と磁力線の速度差を \mathbf{v} で表せば、導線を切る頻度は $|\mathbf{v} \times \mathbf{B}|$ に比例することになるので、

磁力線切断則は磁束変化則における起電力 V_1 と V_2 を区別せず、直接に V を求めることになる。ファラデーの慧眼、さすがである。

7.3.2 検証

ここで、7.2.3項で取り上げた四つの例題について、磁力線切断則の視点で見よう。

ケース1：ループ内の磁束が変化する (図7.2)

図7.2において、導線ループがあるソレノイドの外側には磁界がない。故に磁力線がない。それでは切りようもなく、起電力生成の説明ができないと思うだろう。でも、ファラデーなら、こう答えるであろう。ソレノイドの電流が増えてゆくに従い、それに比例してソレノイドの中の磁力線の数は増えてゆく。では、その増えてゆく磁力線はどこから生まれているか。磁力線には出発点無く、ループになっているはず。図7.8に示すように、無限の長さのソレノイドと言えども行き着く先には端があり、磁力線はそこで折り返して電流を取り囲むようにループになっているはず。電流の増加と共に、次々と増え続ける磁力線は、ソレノイドの内部では内壁から中央に向かって押し出され、空間内で均等に密度を上げてゆく。一方、ソレノイドの外側の磁力線は速いスピードで無限のかなた飛び去ってしまう。しかし、その際、必ず、どこかで導線に切れ、ガリッと音が出る。このようにして、導線に生まれる起電力を感知することができる。ソレノイドの中に増えてゆく磁力線の数は決まっているので、音の数はループの大きさや形に因らない。それが式(7.1)が言っていることなのである。ソレノイドの外側にも磁力線はある。しかし、無限大の空間に有限個の磁力線なのでその密度 (=磁束密度) は 0、磁界はないといえるのである。では、ソレノイドの空間が閉じたトロイダル (ドーナツ状) ならどうであろうか。考えてみてほしい。

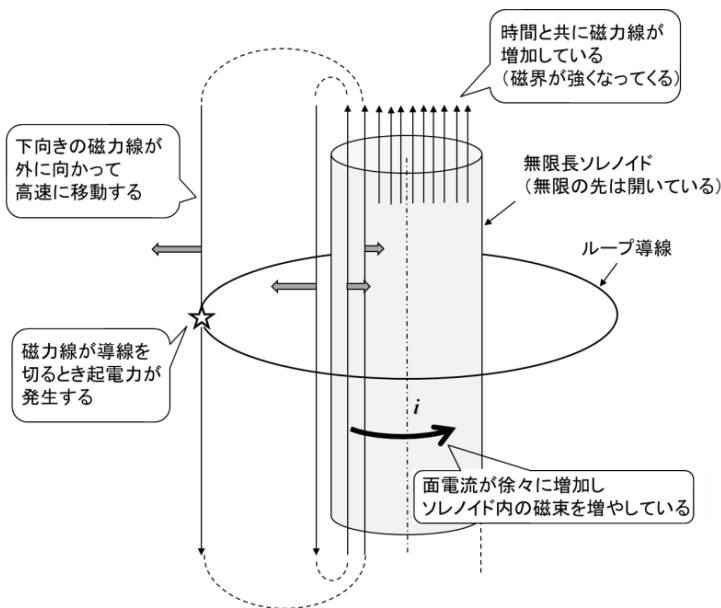


図7.8 図7.2に対するファラデー流電磁誘導の説明

ケース2：ループの形が変化する（図7.3）

動く辺 BC が磁力線を切っているのでここに起電力が発生する。辺 BC から見れば、磁力線が左側に動いていることになり、同じように起電力が発生する。どちらで考えてもよい。

ケース3：磁界も回路も変化しないのに起電力が生まれる（図7.4）

回転する辺 OP が常に磁力線を切り続ける。ゆえに回路に起電力が発生する。

ケース4：回路の形が変化するのに起電力が（ほとんど）生まれない（図7.5）

回路のうち動く部分はどこか、そう、球である。球は回路の一部を形成するが導体間隔が微小なので、つなぐ球の幅（＝短絡線の長さ）も微小。この微小な短絡線が動いて切る磁力線の数も微小。ゆえに、発生する起電力は無視できるほどに小さい。

四つのケースについての定量的なことはさらに詰める必要があるが、起電力生成の説明と言う意味では、磁力線切断則に瑕疵はないように見える。ところが、この磁力線切断則を図7.4の構成の応用である**単極誘導発電機**の動作に適用しようとする、長く議論が続いている**ファラデーのパラドックス**に出会うのである。

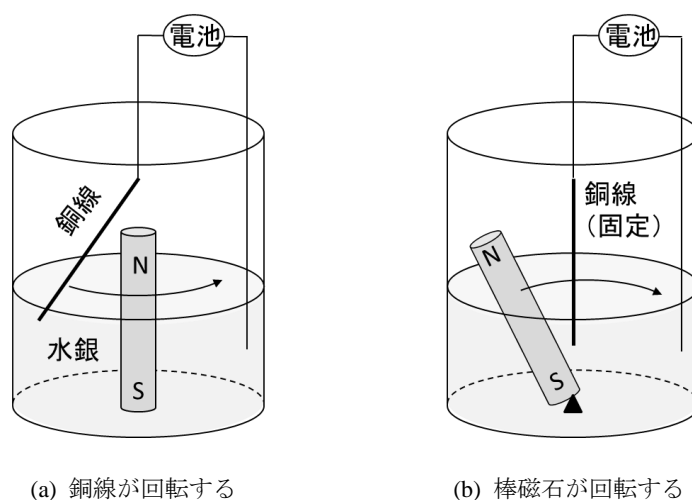
7.4 ファラデーのパラドックス

7.4.1 単極誘導

1821年、ファラデーは単極誘導回転機を発明した。1820年にエルステッドが電流の磁気作用を発見し、それに触発され、アンペール（アンペア）がその理論づけに注力していた。ファラデーもエルステッドの実験を確認する傍ら、電流と磁石の間に起きる新現象を求め、図7.9(a)に示す装置を作った。ガラス容器の床面中央に棒磁石を垂直において蠟で固定し、そこに、棒磁石の上部が見える程度に水銀を入れ、中心軸上部から水銀に浸る程度の銅線を吊るした。この銅線は上部の点を中心に自由に動くことができるようにしておき、この銅線と水銀間に電池を挟み電流を流した。そうすると、銅線が少し斜めに傾いた状態で磁石の周りを回転し始めたのである。さらに、装置に手を加え、同図(b)のように、磁石が下端を軸にして動くことができるようにし、銅線を垂直に固定した。同じように電流を流すと今度は磁石が傾いた状態で回転を始めたのである。この現象は**単極誘導**と呼ばれ、図7.9の装置は**単極誘導回転機**である。動作原理は、(a)が銅線（の中の動く荷電粒子）に働くローレンツ力（フレミングの左手の法則）、(b)は銅線に流れる電流が生み出す磁界の方向に磁石の極が吸い寄せられているからである。動作に、銅線と磁石の相対関係が見てとれ、これが、これから述べる単極誘導のパラドックスの伏線になる。

7.4.2 ファラデーのパラドックス

図7.10に示す円柱状の棒磁石と導体円板が、中心軸を共通にして重ねられており、それぞれが独立に回転する機能をもつ。導体円板上に、中心と縁の間の起電力を測る検流計が回転しないように（導線が円板の縁に接触するように）取り付けられている。



(a) 銅線が回転する

(b) 棒磁石が回転する

図 7.9 ファラデーの単極誘導回転装置 (イメージ図)

ここで、図 7.11 に示す 4 つのケースをみてみよう。

- ① 磁石も円板も静止している
- ② 磁石が静止し、円板が回転している
- ③ 磁石が回転し、円板が静止している
- ④ 磁石と円板が同速度で回転している

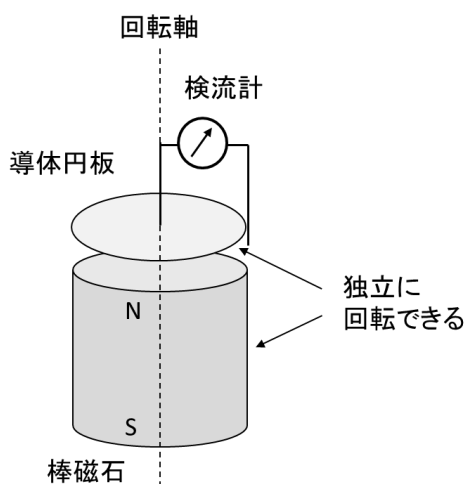


図 7.10 単極誘導確認のための基本構成

検流計に触れがある場合を○、振れない場合を×とするとき、上記 4 つのケースではどうなるであろうか。以下の答えを見る前に、ここで立ち止まって、読者の皆さん自身で予想を立ててほしい。

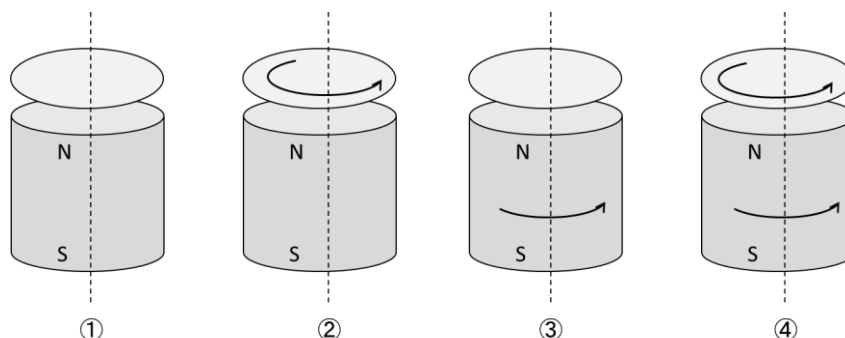


図 7.11 起電力の有無を確認する 4 つのケース

では、結果を。順に、×、○、×、○である。③、④の結果に、あれっと思わないだろうか。それがパラドックスと言われる所以であるが、以下、それを考えてみたい。これも、結果を見た今、次節を読む前に皆さん自身で、動作の仕組みを考えてほしい。ちなみに、図 7.10 の構成は**単極誘導発電機**であり、その発明は電磁誘導発見直後の 1831 年のことである。

7.4.3 どう考えるか

後の時代に議論を巻き起こした二つの矛盾する考え方：**磁力線静止説**と**磁力線回転説**での説明を行う。両方ともうまく説明ができるところに不思議がある。この説明に対する議論の相剋の歴史については[3], [4]、あるいは、それを要約した本章の付録を見てほしい。尚、ここで言う「磁力線静止説」と「磁力線回転説」は、電磁誘導の説明に用いた「磁束変化則」と「磁力線切断則」とは別ものなので、混同しないようにしてほしい。

(1) 磁力線静止説

一つ一つ見てゆきたい。

①のケース

両方静止の場合で、これが何も起きなくて当然であろう。

②のケース

§ 7.2.3 のケース 3 と同じである。起電力生成についてはすでに説明しているが、もう一度。円板のみが回転している。円板は導体であるから、無数の金属原子で構成されていて、正の電荷をもつ陽子と負の電荷をもつ電子が同量あり、全体として電氣的に中性である。その電子の中に自由に動き回れる自由電子が一定数ある。棒磁石は磁界を生み出し、円板付近では図の上方向を向いている。円板が回転すると、回転軸と平行に向く磁界中を電荷が周方向に動くことになり、動く方向と磁界の方向のそれぞれに直交する方向、すなわち円板の径方向にローレンツ力が働く。(それが、縁方向か中心方向かは円板の回転方向と磁界の向きによって決まる)。このローレンツ力によって自由電子が押されて動いて縁(あるいは中心)に集まり、中心と縁で電位差が生ま

れる。これによって、検流計の針が振れるのである。起電力は円板上に生まれている。

③のケース

今度は円板が止まっていて磁石が回転している。磁石と共に回転する人が円板を見れば、②のケースと同じで円板が回転しているように見え、故に、検流計は振れると思うだろう。相対性理論で慣性系の共変性を学んだ後だと、特にそう思うのではないだろうか。でも、結果はそうになっていない。磁力線の存在をイメージし、電磁誘導によって導線に現れる起電力を、導線が磁力線を切る量に比例すると説明したあのファラデーも、この場合については、「磁力線は回転していない」と答えたい。磁力線静止説である。そうであれば、①と同じであり、検流計は振れない、が納得できる。でも、どうしてだろうと言う気持ちも残る。起電力はどこにも生まれない。

④のケース

これも、磁石と円板の関係の相対性から①と同じに見え、検流計は振れ無さそう。しかし、実際は触れるわけで、不思議に感じる（故にパラドックス）。でも、③で述べたファラデーの言葉に従うならば、磁力線は回転しておらず、それなら②と同じであり、検流計は振れるのである。起電力は円板上に生まれている。

(2) 磁力線回転説

棒磁石からは無数の磁力線が出ている。棒磁石を横に動かせば磁力線も磁石に固定されて一緒に動くであろう。軸回転の場合も、磁力線は磁石と一緒に回転するというのが磁力線回転説である。棒磁石の回転に対して、ファラデーは磁力線静止説を採ったが、電磁誘導によって導線に現れる起電力を「導線が磁力線を切る量に比例する」と説いたファラデーにしては首尾の一貫性に欠けるように思える。ここでは、③と④のケースについて、磁力線回転説で現象を見てみよう。

③のケース

磁石と共に回転する磁力線が円板上の仮想導線を切っている。ゆえに、円板には起電力が生まれている。同じように、円板の2点を結ぶ導線（検流計をつないでいる線）も回転する磁力線を切っており、同じ大きさの起電力が発生している。ただし、回路上で起電力の極性は反対なので、打ち消されて、ループに起電力は発生しない。円板と導線の両方に起電力が生まれている。ただし、両起電力は打ち消されてしまうので、検流計は振れない。

④のケース

磁石と円板は一緒に回っていて、円板は磁力線を切らないので、円板に起電力は生まれない。一方、円板を結ぶ導線は、回転する磁力線を切るなので、この部分に起電力が生まれ、検流計が振れる。起電力が円板の2点を結ぶ導線に生まれている。

(3) 議論のポイント：磁石が回転したら電磁界は変わるか

相矛盾する磁力線静止説と回転説のどちらでも結果（検流計が振れるか振れないかということ）

を合理的に説明できてしまう。一方、その起電力発生場所については、円板かそれを結ぶ導線かで異なっている。起電力の発生場所に違いが出ているのであるから、どちらの説でもよいと言うわけには行かない。どちらが正しいかを決定するには、測定によって起電力の発生場所を特定できればよいのであるが、付録でも述べるように簡単にはできそうもない。そのことが、混乱状態が続いている原因になっている。明確にすべきは以下の点にある。

- ① 静止している棒磁石と回転している棒磁石で、電磁界に違いがあるのかどうか。
 (「違わない」と言うのが磁力線静止説、「違う」と言うのが磁力線回転説)
- ② 「違う」と言う磁力線回転説の場合、静止する導線に対して起電力を生むが、それは、空間に電界が生まれていると言い換えて良いか。

7.4.4 謎解き

7.2節(磁束変化則)、7.3節(磁力線切断則)での電磁誘導の考え方を踏まえ、ファラデーのパラドックスに対する謎解きの準備ができていると思う。ただし、仮想的なもの(=物理的実体のないもの)である磁力線の動作であるから、誰もそれを直接に見ることや測ることはできず、こう考えると辻褃が合うと言うレベルになる。磁場や磁性体の振る舞いについては相対論や量子論にまで広がる難しい問題である故に、以下は、現象をざっくりと捉えたあくまで筆者の推論である。

1) 回転する磁石の周りの電磁界

軸対称の棒磁石を考え、静止している状態では、周囲に磁界 B のみが存在するとする。その空間を速度 v で動く観測者には、相対性原理(ガリレイ変換で良い)によって、 $v \times B$ の電界を感じるであろう。そうであれば、軸回転する棒磁石と共に回転する観測者には、磁界しか感じないが、静止系にいる観測者には、 $v \times B$ の電界が見えていることになる(注2)。故に、回転する棒磁石では、磁界の変化はないが、それぞれの場所には $v \times B$ の電界も存在するということである。

この説に則って、図の③と④を見てみよう。③では磁石が回転してその周囲に電界が発生している。この電界が、円板と導線の両方に同じ大きさの起電力を生み出しているが、回路上では極性が反対なので打ち消され、ループ全体としての起電力は生まれない。④では、導線に対する起電力は③と同じである。一方、円板に対しては、回転する円板上に現れるローレンツ力由来の電界と回転する磁石が作る電界が打ち消されて起電力は無い。ループ全体では導線部分の起電力が残り、起電力有りになる。

この推論は、電磁気学(マクスウェルの方程式)に基づいており、間違いはないであろう。

【注2：回転運動は加速度運動であり、相対論でいう共変性が成立する等速直線運動する系(慣性系)ではない。しかし、観測者の寸法を磁石のスケールに比べて十分小さいものとすれば、その周囲においては等速直線運動と見なす近似が成立する。丁度、自転する地球上においても、我々が見渡せる程度の範囲においては、物理法則の共変性が認められるように。】

2) 磁力線切断則+磁力線回転説

起電力発生に対する磁力線切断則と、回転時の磁力線回転説を組み合わせることで、起電

力の発生場所およびループ全体での起電力の有無に関して、上記1)と同じ結果を得る(説明は7.4.2 項の(2)の通り)。磁力線切断則と磁力線静止節の組み合わせでは、起電力発生場所に関して、1)と異なる結果になり、この組み合わせは誤りであろう。

3) 棒磁石の磁力線は磁石の回転と共に回転するか

上記1)、2)より、「棒磁石の磁力線は磁石の回転と共に回転するか」を yes と答えたい。ただし、電磁誘導現象を磁力線切断則で説明すると言う前提においてである。

我が国では、この問題について、特にその歴史的経緯について、須藤喜久雄先生(等)の解説論文[3], [4]が奥深いところまで行き届いており大変参考になる。また、この問題に対して、今井功先生がその著書[5], [6]の中で積極的に発言している。今井先生の主張は、磁力線と言う仮想的なもの(=物理的に存在が定かでないもの)を持ち出さなくても、場の理論である電磁気学(マクスウェルの方程式)で説明できるのであるからそれで十分であって、電磁誘導の法則を「導線が磁力線を切るとき起電力が生まれる」と言うような理論的根拠のない説明はやめよう、というものである。それに対して、「動く磁力線が電界を作る」、「動く電気力線が磁界を作る」のイメージで電磁気学と相対論を結び付ける努力をされている江沢洋先生は自著[7]の中で今井先生の批判に対して熱い持論を展開している。両先生(ともに故人)は高校生や大学生の物理教育の在り方に長く情熱を注がれてきた理論物理学者(大御所)であり、お二人の論争が問題点を白日に晒してくれて大変面白い。筆者は、磁力線切断則+磁力線回転説により観測結果の合理的な説明ができ、かつ、明確なイメージによって物理現象理解が進むので、電磁気学教育のために磁力線切断則を残したいとの立場である。

最後に蛇足を。電磁誘導(単極誘導を含む)の重要性は回路(ループ)に発生する起電力を知ることになり、その起電力がどこに生まれているかは、発電機やモータに応用したいと言う実用的な意味において、どうでも良いことであろう。磁場が変化する場合に発生する起電力 V_1 では、磁束密度 \mathbf{B} の情報だけでは発生場所は本質的に定まらない。これを定めるためには、磁界を生み出している電流分布の状態、あるいはそれを反映したベクトルポテンシャルの情報が必要であり、発生場所探しに深入りできない構造になっている。故に、起電力の発生場所はどこかを追及するファラデーのパラドックスは、電磁気学を深く理解したいと言う知的好奇心を呼び起こす格好の教材と言うところに留めておくのがよいのかもしれない。

付録 磁力線静止説と回転説：両説相剋の歴史

この問題が今日まで続いている歴史を述べたい。多くの解説記事が出ているが、我が国においては、須藤等の解説論文[3], [4]にその歴史が詳細にまとめられている。[3]はファラデーの単極誘導の実験を中心に、[4]はその後(1980年頃まで)の磁力線静止説と磁力線運動説(本稿では回転説と呼んでいる)との相剋についてである。この問題は21世紀に入っても続いていて、完全決着とはなっていないようである(例えば、[8], [9])。以下、[3], [4]を参考に、この歴史を駆け足で見よう。

ファラデーは、電磁誘導の法則を発見する 10 年前、エルステッドが電流の磁気作用を発見した翌年の 1821 年、単極誘導回転機を発明した。そして、電磁誘導の法則を発見した直後の 1831 年、図 7.10 に示す単極誘導発電機を発明した。その動作の解釈において、誘導効果が磁石が静止しているか回転しているかに因らないと言う結果 (図 7.11 の②と④) から、磁石の磁力線は、磁石の回転に伴わず空間に静止していると判断した (それを特異な独立性 (singular independence) と呼んだ)。これに対して、1841 年、単極誘導 (unipolar induction) の名付け親である Weber は磁力線が磁石と一緒に回転するとしても、誘導電流生成の結果を矛盾なく説明でき、むしろその方が電気粒子の運動論からも妥当であるとして磁力線回転説を主張した。その後続く長い論争の出発点がここである[3]。

Weber の磁力線回転説が正しいと確信した Preston は 1891 年の論文の中で、様々な実験を繰り返した。しかし、閉回路の実験では磁力線静止説と回転説の区別がつかないこと、開回路で帯電状況を調べるには、高度に鋭敏な検流計と高速回転できる強力な磁石が必要で、満足できる実験結果は得られなかった[4]。

その後の回路実験は、1912 年、Kennard によって行われた[10]。回転する棒磁石を円筒コンデンサで覆い、磁石の回転時にコンデンサを短絡した後解放し、磁石の回転を止めたときに、コンデンサが帯電しているかどうかを調べるものであった。結果、コンデンサは帯電しておらず、これによって磁力線静止説が証明されたと主張した。しかし、同年、Barnett も類似の実験を行い、同様の結果を得たが、結果の解釈において、磁力線静止説も磁力線回転説も同じ結果になるはずということから、Kennard の磁力線静止説の判断は誤りであると主張した[11]。Kennard はこれに対して反論を行っているが[12]、当時は、エーテルと磁力線の動きとの関連で議論されており、今日の目で見ると迷路の中を手探りしているように感じる。

この論争は今日までも続いていて、必ずしも決着がついたと言う状況には無いように見える。例えば、[8], [9]などでは、歴史的経緯が詳しくまとめられ、かつ、論文導入部を読むと磁力線静止・回転説に決着をつけるとの意気込みは感じられるが、内容的にはその議論から逃げていて、肩透かしを食らった感を受ける。

参考文献

- [1] 宇野亨, 白井宏, 電磁気学, コロナ社, 2010.
- [2] R. P. ファインマン, R. B. レイトン, M. L. サンズ (宮島龍興訳), ファインマン物理学 III 電磁気学, 岩波書店, 1969. (§ 17 誘導法則)
- [3] 須藤喜久雄, 清水孝一, “Faraday における単極誘導の実験,” 科学史研究, 岩波書店, II 期 24 巻, pp. 106-113, 1985 夏. https://www.jstage.jst.go.jp/article/jhsj/24/154/24_106/pdf/-char/ja
- [4] 須藤喜久雄, 清水孝一, 高村泰雄, “単極誘導: 磁力線静止説と磁力線運動説との相克,” 科学史研究, 岩波書店, II 期 24 巻, pp. 155-163, 1985 秋. https://www.jstage.jst.go.jp/article/jhsj/24/155/24_155/pdf/-char/ja
- [5] 今井功, 電磁気学を考える, サイエンス社, 1990. (p. 236-251) .
- [6] パリティ編集委員会 (大槻義彦責任編集), 続 間違いだらけの物理概念, 丸善, 1995. (今井功, 磁力線の

運動に意味があるか？, p. 123-141) .

- [7] 江沢洋, 上條隆志 (編), 相対論と電磁場 (江川洋選集 II), 日本評論社, 2019.
- [8] H. Härtel, “Unipolar induction; A messy corner of electromagnetism,” Euro. Phys. Education, vol. 11, Issue 1 1309-7202, pp. 47-59, 2020.
- [9] C. Baumgärtel, R. T. Smith, S. Maher, “A novel model of unipolar induction phenomena based on direct interaction between conductor charges,” Progress in Electromag. Res., vol. 171, pp. 123-135, 2021.
- [10] E. H. Kennard, “Unipolar induction,” Philosophical mag., Series 6, vol. 23, pp. 937-941, 1912.
- [11] S. J. Barnett, “On electromagnetic induction and relative motion,” Phys. Rev., Series I, vol. 35, pp. 323-336, 1912.
- [12] E. H. Kennard, “The effect of dielectrics on unipolar induction,” Phys. Rev., Series I, vol. 5, pp. 355-359, 1913.

[目次のページに戻る](#)