Close Up

電波研究の玉手箱

第１講
フリスの伝達公式への温故知新

電気通信大学名誉教授
唐沢 好男

本号から、連載執筆のチャンスをいただいた。毎号、電波技術の基本テーマを選んで、そこに見え隠れする不思議を玉手箱につめてお届けしたい。第１講は、無線伝送のイロハのイ、フリスの伝達公式。通信の教科書では１ページに満たない扱いであるが、これを掘り起こして、読者の皆さんの好奇心を呼び起こしてみたい。

フリスの伝達公式とは

電波が情報伝送の主役になる無線通信の学問的基盤は電磁気学である。でも、そこから説き起こしてゆくと、本題に入るまでの道程が長いので、無線通信の授業では自由空間の電波伝送、すなわちフリスの伝達公式から入ることが多い。

図１は無線伝送の基本図である。送信アンテナの相手方向に対する利得を G_t とする。受信アンテナは、送信アンテナに対して十分遠方にあり、すなわち電波を平面波で受信できる位置にあり、その距離を d とする。送信電力を P_t とすると、アンテナから放射されたエネルギーは球面上に広がって距離の２乗で弱くなり、受信アンテナ点での電力密度は $P_tG_t/(4\pi d^2)$ 実効的な面積（アンテナ実効面積）を A_r とすると、受信電力 P_r は次式となる。

$$P_r = G_tP_t \times \frac{1}{4\pi d^2} \times A_r \qquad (1)$$

（受信電力 =（送信電力）×（空間広がり）×（拾い集める面積）

実効面積 A_r と受信アンテナ利得 G_r の関係は、アンテナの形式によらず、次式で与えられる（次節で説明）。

$$A_r = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r \qquad (2)$$

ここで、λ は電波の波長である。

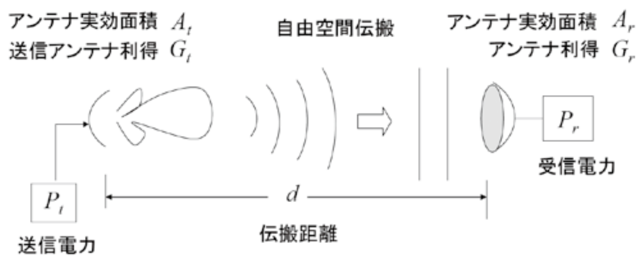


図１　無線通信の基本伝送系

これより、受信電力は、送受信のアンテナ利得 G_t, G_r, 距離 d、電波の波長 λ により、次式で整理される。

$$P_r = \frac{1}{L_p} G_rG_tP_t \qquad (3a)$$

$$L_p = \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2 \qquad (3b)$$

L_p は自由空間伝搬損と呼ばれる。式（3a）で表される無線伝送の基本式、これがフリス（Friis）の伝達公式である。

式(3)を見ると、アンテナ利得 G_t と G_r が周波数によらない場合、受信電力は周波数の２乗に反比例して弱くなることを示している。「ミリ波のような高い周波数では、電波は遠くまで届かないよ」と教わって授業は終わる。

この話のどこに不思議があるのだろうか？

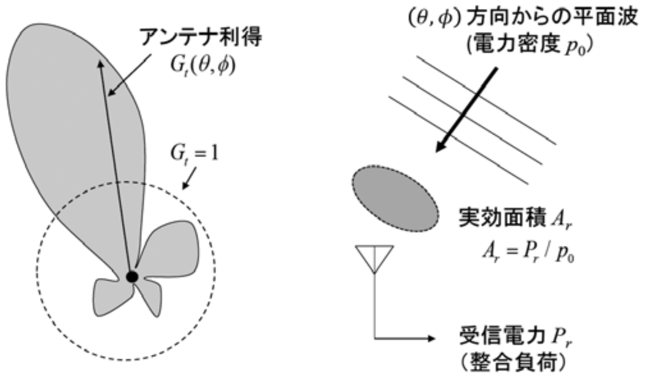
アンテナの利得と面積の関係は？

フリスの伝達公式の導出には教員泣かせの式が一つ入っている。それは⑵式のアンテナ利得と実効面積の関係式である。そのため、授業では前節の説明のように天下り的に与えられることが多いと思う。これを掘り下げてみたい。

アンテナ利得については、送信アンテナの利得が説明しやすい。アンテナ利得の定義は、送信点から十分遠方の地点（r, θ, ϕ；$r \to \infty$）における、実際の電力密度と全方向均一に放射されたときの電力密度の比で定義される。アンテナそのものに増幅機能はないが、等方性放射（無指向性アンテナ:G_t=1）に比べて、アンテナビームが向いている方向では値が１以上になるので利得と呼ばれる。

一方、実効面積は受信アンテナの概念であり、平面波が存在する場所にアンテナを置いたときの受信電力（単位：W（ワット））とその場所の電力密度（W/m^2）の比（m^2）で定義される。

図２はこれを説明したものである。受信アンテナの利得 G_r と送信アンテナの実効面積 A_t もそれぞれに定義されている。同じアンテナを送信に用いる場合と受信に用いる場合の性能は同じであること、すなわち、G_r=G_t, A_r=A_t であることが証明されている［1］。アンテナの送受信可逆性と呼ばれる。



ⓐアンテナ利得（送信）　ⓑ実効面積（受信）

図２　アンテナの送受信特性

いよいよ本題である。⑵式は以下の２段階の手順で導かれる。第一段階は、無線回線の相反定理である。

図１では、左側を送信局としているが、符号を付け直し、左側のアンテナ特性を G_1, A_1、右側を G_2, A_2 とする。左側を送信局として電力 P_t を送ったときの右側の局の受信電力を P_{r2}、逆方向で、右側を送信局として電力 P_t を送ったときの左側の局の受信電力を P_{r1} とすると、相反定理より P_{r1}= P_{r2} である。それゆえ、

$$\frac{P_t G_1 A_2}{4\pi d^2} = \frac{P_t G_2 A_1}{4\pi d^2} \ \rightarrow\ \frac{G_1}{A_1} = \frac{G_2}{A_2} \qquad (4)$$

となる。この関係は、任意のアンテナについて、すなわち、アンテナがどういうタイプであろうがそのことには関係なく成り立ち、アンテナ利得と実効面積の比は一定であるということを示している。では、この比の値は何であろうか。

第２段階は、アンテナを選んでこの比を求めればよい。どんなアンテナでも良く、かつ特定の一方向でも良い。とにかく、何か一つでも理論的に求められるものがあればそれで良い。アンテナは何がよいであろうか？

この場合、微小ダイポールアンテナを選ぶのが正攻法である［1］。アンテナの利得や放射抵抗など電磁気学（マックスェルの方程式）を駆使しなければならず導出は手強いが、⑵式の関係が導かれる。その他、大形開口面アンテナの放射パターンから正面方向の利得を求め⑵式を導く方法［2］などもある。これによってこの問題は解決されるのだが、どれも導出に手間隙かかり、もっと直感的に導く方法はないのだろうかと思う。

無指向性アンテナ（G=1）の実効面積は $\lambda^2/4\pi$ であり、知る人は知るように、これは周の長さ１波長の円の面積である。こんな美しい関係を、なぜ、すっきりした方法（＝直感的な方法）で説明できないのであろうか？筆者は、無指向性アンテナから $A= \lambda^2/4\pi$ を求めたいと思って、いろいろ試みてみたがまだ納得できるものはない（試みの詳細は［3］を。読者の皆さんでよい方法をご存知でしたら教えていただきたい）。無指向性アンテナの受信イメージは、半径 $\lambda/2\pi$（電波の波数 $k=2\pi/\lambda$ を用いると半径 $1/k$）の球があり、この表面に入射する平面波のエネルギーを全部吸い取る黒体受信球（図３：ブラックホール）である。

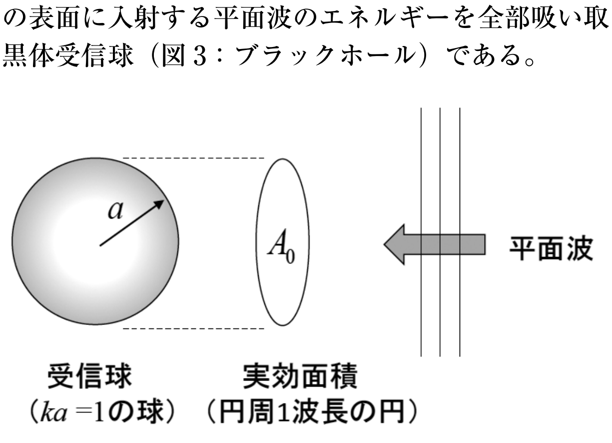


図３　無指向性アンテナ（全方向 G=1）の受信球

自由空間の伝搬になぜ周波数特性がでるの？

フリスは、原著論文の冒頭に式(5)の形を示し、その導出説明を行っている［4］（公式の原点はこの形）。

$$P_r / P_t = A_r A_t / (d\lambda)^2 \qquad (5)$$

式(2)により送信アンテナ利得 G_t をアンテナ実効面積 A_t に変換して式(1)に代入すれば、式(3)と(5)が、同じことの別表現であることが分かる。式(5)では、4つの基本パラメータ（A_t, A_r, d, λ）が数値係数を含まず結ばれていて、美しい形になっている。

式(5)からは式(3)とは別の景色が見えてくる。式(5)では、アンテナ実効面積 A_t, A_r が周波数によらないなら、受信強度は周波数が高いほど強くなると言っている。式(3)で述べた結論と一見矛盾するように感じられる。「アンテナの特性が周波数によらないとき、周波数が高くなると受信電力はどうなるの？」と問われたとき困ってしまう。言えることは、問がよくない。なぜなら、アンテナの特性である利得と実効面積の関係そのものが周波数特性を持ち、両方の特性が周波数に依存しないアンテナは存在しないからである。図4(a)に示すダイポールアンテナ対向での回線（利得一定）と(b)のパラボラアンテナ対向の回線（面積一定）の違いであり、例えば、同図(c)のように、一方をパラボラアンテナ、一方をダイポールアンテナで対向させれば、この回線では周波数特性はなくなっている。

自由空間（真空中）の伝搬損は（3b）式で定義される。周波数と関係なさそうな自由空間の伝搬に周波数特性が入ることに違和感を持たないだろうか。これは、アンテナ特性から利得を引き出して作った（3a）式の表現に起因する。周波数に対して利得が同じアンテナは、周波数の増加と共にサイズが小さくなる。すなわち電波を受信する面積が小さくなるわけで、その分が自由空間伝搬損に組み入れられ、アンテナの都合を伝搬特性に押し付けているとも解釈できる。もし、先輩達が(5)式をフリスの伝達公式として使い続けていれば、自由空間伝搬損は（$d\lambda$）^{2} と定義されていたのではないだろうか。そう、高い周波数ほど強く受かると。

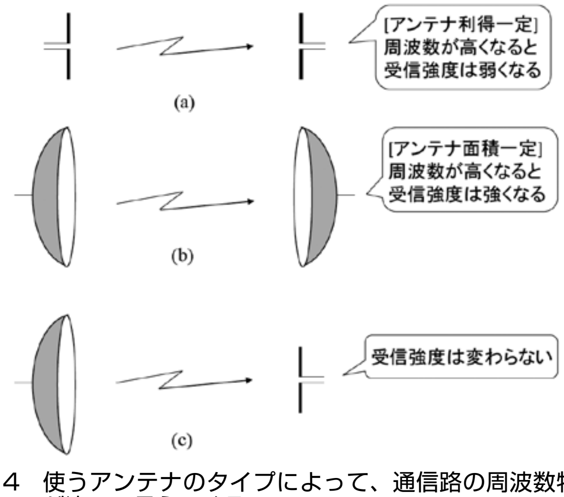


図４　使うアンテナのタイプによって、通信路の周波数特性が違って見えてくる

最強の無線伝送

唐突だが、フリスの伝達公式を忘れてしまったときに思い出す方法を一つ。波長 λ の電波を距離 d 伝送するシステムを考える。そのとき、送信点と受信点の間に幅1波長のレッドカーペットが敷かれている、と言う場面を想定して欲しい。その上で、図5に示す手順で話を進めて行く。

❶レッドカーペット上（底面積が波長（λ）×伝搬距離（d）（$=S_0$））に、高さが1mの容器を用意する。これに、水を満タンにする。

❷底面積が A_t となるところに仕切り板を入れ、残りの水を全部こぼす。

❸仕切り板を外し、下がった水の高さを a とする（$a=A_t/S_0$ となる）

❹次に底面積が A_r となるところに仕切り板をいれ、残りの水を全部こぼす。

❺仕切り板を外し、さらに下がった水の高さを b とする（$b=(A_r/S_0)a$ となる）

このようにして得た水の高さ b が総合減衰量（P_r/P_t）を与える。

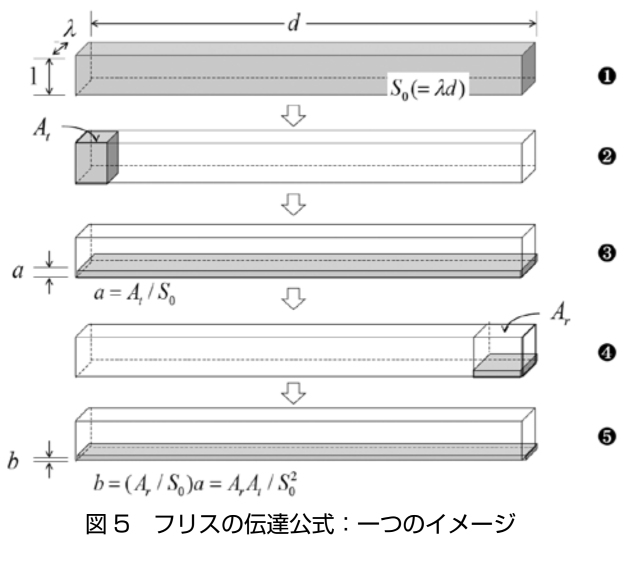


図５　フリスの伝達公式：一つのイメージ

ここからが、本節の本題である。空間的な広がりを持った面からの放射であっても、十分遠方であれば、送信点から角度指向性を保った球面波が伝搬している（＝放射パターンが距離によって変化しない）。また、遠方に有る受信点では平面波が来ているように見える。このような領域は、フラウンホーファー領域（遠方界）と呼ばれる。フラウンホーファー領域は $d>2S/\lambda$（S は送信アンテナ面積）が目安とされている。フリスの伝達公式はこのフラウンホーファー領域に適用できる公式である。

一方、伝送距離がフラウンホーファー領域より短いところでは、開口面（波長サイズに比べて十分大きい）から出た平面波は、その面形状を保持したままビーム状に伝送される。この領域内に同じサイズの開口面アンテナを対向させて受信すれば、原理上の伝送損失はない（実際には、回折による漏れもあるので、ある程度の損失はあるが、ここでは大雑把な話として）。このような伝送ができる距離範囲はフレネル領域と呼ばれる。

実効面積で表したフリスの伝達公式（(5)式）で、$P_r/P_t=1$、$A_t=A_r=S$ としてみると、$d=S/\lambda$ を得る。係数２の違いは有るが、フラウンホーファー領域の境界付近と言う意味でオーダー的には合っている。フリスの伝達公式は、$P_r/P_t<<1$ で使うべきだが、距離を小さくしてきて値が１以上になったら、それより短い距離では $P_r/P_t\ \simeq 1$ のフレネル領域であると理解してよい。$P_r/P_t=1$ を実現する $S=\lambda d$ は、図５においては、A_t, A_r ともレッドカーペットの面積 S_0 になって、水位が下がらず $b=1$ のままと言うことである。

このフラウンホーファー領域とフレネル領域の境界当たりは、送信電力効率とアンテナ面積の有効利用の観点で、最強の無線伝送領域になる（図６）。アンテナのできることにおいて無駄がないという意味である。

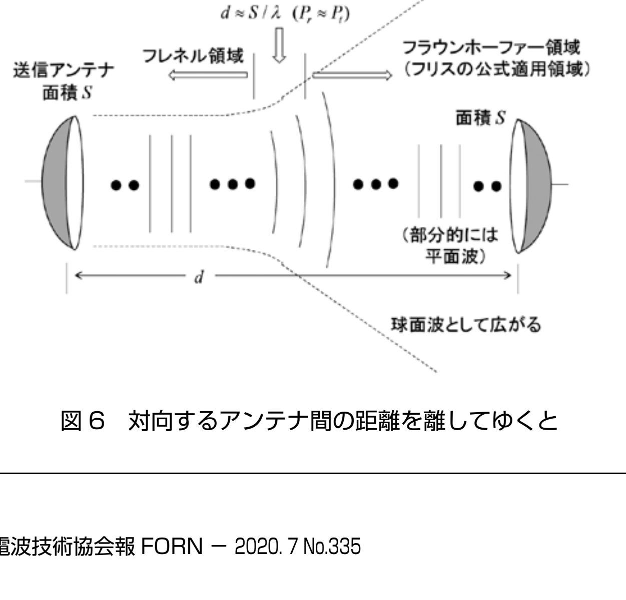


図６　対向するアンテナ間の距離を離してゆくと

この領域の利用には、大電力を宇宙から地球上に低損失に伝送したい太陽光発電衛星システム（SPS）での無線電力伝送がある。周波数を 2.5GHz、距離を 40,000km として、$P_r/P_t=1$、$A_t=A_r$ の条件で、双方のアンテナの大きさを求めると、直径 2.5km の円形サイズ規模になる。米国 NASA/DoS が 1981 年に検討した SPS では、宇宙側を直径 1km の、地上側を直径 10km のアンテナアレー（受信側はレクテナ）となっていて、送受アンテナの面積は、受信側許容電力密度条件（地上での電磁波防御ガイドライン）からアンバランスではあるが、アンテナ面積の積 A_tA_r でみればオーダー的に合っている。

おわりに

筆者は、大学で学部生や大学院生に無線通信を教えてきた。その授業ではフリスの伝達公式からスタートするが、その折に、ここで取り上げたような内容で、学生たちと議論するのは結構楽しかった。教科書では１ページにも満たない内容で扱われてしまうフリスの伝達公式の中にもたくさんの不思議があるように、今日、基本と言われている当たり前の式（原典にある湯気が出ているような式が、洗練された式になっていることも多い）も、その源を尋ねてみると意外な発見もある。次号以降も、肩肘張らない、でも電波技術の根本理解に大事な話題を取り上げてゆきたい。

<参考文献>
[1]虫明康人, アンテナ・電波伝搬, 電子通信学会編, コロナ社, 1961.
[2]中嶋信生, “微小アンテナ実効面積の分かり易い求め方,”信学会AP研第２種研究会(楽しく学ぶ電波教室), A.P85-S8, pp. 47-50, 1986.01.
[3]唐沢好男, “フリスの伝達公式：その周辺の不思議を探る,” 技術レポート(私報：唐沢研究室HP), YK-040, 2020.01. http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-040_Friis-Formula.pdf
[4]H. T. Friis, “A note on a simple transmission formula,” Proc. IRE and Waves and Electronics, pp. 254-256, May, 1946.

唐沢 好男

電気通信大学 名誉教授
IEEE Fellow
電子情報通信学会フェロー

1950 年（長野県）生まれ。学部の卒研テーマは結晶成長、就職した会社の部署は半導体課。量子力学を本格的に学びたく大学院受験。合格するも希望の研究室は満杯。このとき、シュレーディンガーを神様とする世界からマックスウェルを神様とする世界に宗旨替え（24 歳）。偶然が導いてくれた電波の道であったが、40 年以上を歩き続けてみると面白いことがいっぱい。研究者（KDD（現 KDDI））、研究マネージャー（ATR）、研究教育者（大学）を経てフリーに。今は、次世代を担う若者に向け、培った電波技術の継承を願って技術レポートをせっせと書いている。唐沢研究室 HP (http://www.radio3.ee.uec.ac.jp) より公開中。