

電波研究の玉手箱

第2講 ランダムウォークで巡る 電波伝搬基本式

電気通信大学名誉教授
唐沢 好男



電波技術の基本テーマの中に見え隠れする不思議を玉手箱につめてお届けする。第2講は、ランダムウォークで巡る電波伝搬基本式。その昔、仲上稔博士が編み出したフェージング強度の確率分布を訪ねる。ランダムウォークで超多次元空間に迷い込んだら二度と元には戻れない怖い世界。でも、その性質が無線通信に活かされている。

👉 ランダムウォークと電波伝搬

ランダムウォークとは、一歩踏み出す毎の大きさや方向等がランダムである現象を言う。巷では、酔っ払いの千鳥足にも例えられる。本稿では、平面上や多次元空間でのランダムウォークによって出会う基本的な伝搬モデル、具体的には、その昔（1940年代）仲上稔博士が編み出したフェージングの確率分布（仲上・ライス分布やm分布）を訪ねてみたい。本文中には確率分布を表す数式（枠で囲んでいる）を載せているが、そういう形なんだと眺めてもらうだけでよい。

ここでは、ランダムウォークとして、①一歩毎のステップ幅は一定（この長さを1とする）、②次のステップの方向はその次元において完全にランダム、という最も初歩的な仮定の下で考える。

このランダムウォークには、向かう方向に自由があればあるほど、すなわち、空間の次元が高くなればなるほど、二度と出発点に戻れないという怖い性質がある。でも後で述べるように、その仕組みが、フェージング対策であるスペースダイバーシティの中に生きているのだから、電波技術との縁は深い。

2次元ランダムウォークの一歩目の距離 $r_2^{(1)}$ は、どの方向に向かっても1である（図1の点線の円）。2歩後の距離 $r_2^{(2)}$ は、同図の一点鎖線で書かれた半径2以内の範囲にある。このように歩を進めながら、歩数 N が十分大きいところ（P点）の距離 $r_2^{(N)}$ はどのような確率で分布するのだろうか。

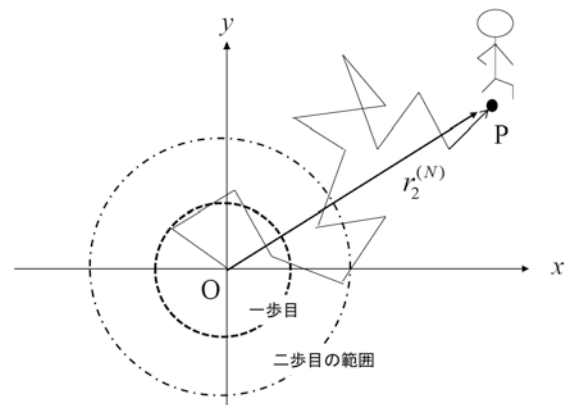


図1 2次元空間のランダムウォーク

まずは、実際にランダムウォークをしてみよう。図2は十万歩（ $N=100,000$ ）までの距離① $r_2^{(N)}$ とそれを $\sqrt{N}$ で割って正規化した距離② $\hat{r}_2^{(N)} (= r_2^{(N)}/\sqrt{N})$ の二つの結果を両対数グラフ上に示している。ランダムウォークでは、平均的には出発点から $\sqrt{N}$ に比例して離れて行くこと、それを正規化した②では、定常的な不規則変化に見える。

👉 二次元空間をさまよう 千鳥足

2次元空間、すなわち、平面上でのランダムウォークから始める（図1）。出発点から N 歩進んだところまでの距離を $r_2^{(N)}$ で表す（添え字の2は次元数）。

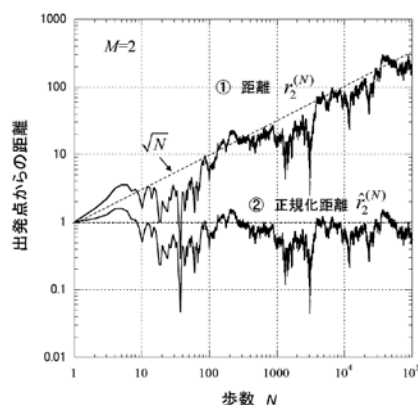


図2 2次元空間のランダムウォークの一例（両対数グラフ上にプロット）

2次元のランダムウォークは、 xy 平面を複素平面とし、 i 歩目の歩く方向 ϕ_i を $0 \sim 2\pi$ の範囲でランダムとすると、 N 歩進んだ位置 $u^{(N)}$ は以下の式で表される。

$$u^{(N)} = \sum_{i=1}^N (\cos \phi_i + j \sin \phi_i) \equiv x^{(N)} + jy^{(N)} \quad (1)$$

確率の理論に、 N が十分大きい場合には、ランダムな数の和は元の分布の如何に関わらず正規分布になるという中心極限定理がある。(1)式の $x^{(N)}$ と $y^{(N)}$ がそれぞれ、それぞれ平均値0、分散 $N/2$ （標準偏差 $\sqrt{N/2}$ ）の正規分布になる。 x 軸方向にも y 軸方向にも独立に正規分布するときの中心からの距離 $r^{(N)} (=|u^{(N)}|)$ の確率分布（正確には確率密度関数）は次式で与えられるレイリー分布になる（導出略、詳しくは[1]に）。

$$p(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{【レイリー分布】} \quad (2)$$

ここで、 $r = \lim_{N \rightarrow \infty} r_2^{(N)}$, $\sigma = \sqrt{N/2}$

レイリー分布は、移動通信の伝搬環境（直接波が見えない環境でのマルチパスフェージング）における信号強度の確率を与える基本分布である。図3は、式(2)で計算したレイリー分布の特性である。 $r_2^{(N)}=0$ と無限遠では確率が0であり、 $\sqrt{N/2}$ で最大値（この辺りに居る確率が一番高い）を示している。

さて、ランダムウォークしている酔歩君を「彼は今のあたりをうろついているのだろう」と太郎と花子が捜しに行くことにした。歩数は N 歩。太郎は、出発点から $\sqrt{N/2}$ 離れた付近にいる確率が高いので、どこかその辺りを捜しに行った。花子は、確率0ではあるが出发点付近を捜しに行った。先に見つけられるのはどちらだろうか？ 軍配を花子に上げたい。

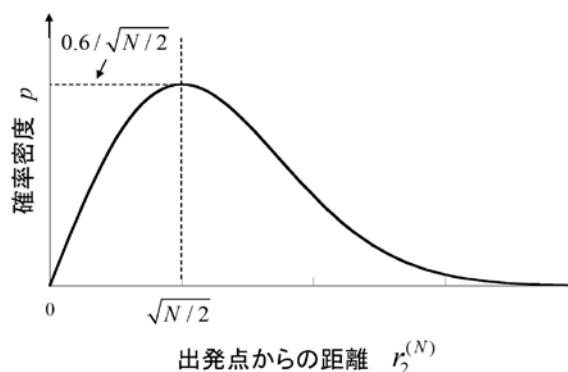


図3 出発点から N 歩地点の距離の確率を与えるレイリー分布（ N が十分大きい場合）

図4はその種明かし。半径 r の円環（幅 Δr : 十分に狭い）に酔歩君が居る確率 $p(r) \Delta r$ は、単位面積当たりの存在確率（ $\exp(-r^2/N)$ ）に比例する正規分布の形と円環の面積（半径 r に比例）との積になる。酔歩君が居そうな場所の確率は図4の色の濃い順で、出发点付近が最大である。図3で $\sqrt{N/2}$ が最大なのは、外へ行く程大きくなる円環の面積を掛けているから。円環毎には（すなわち r の関数としては） $r = \sqrt{N/2}$ で最大になるが、同じ面積当たり（例えば、中心の黒丸と半径 r 地点の点線の円）で比べれば、花子に軍配を上げたくなると思う。レイリー分布の意味が見えたでしょうか。

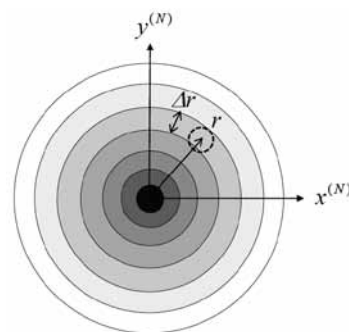


図4 酔歩君の居場所確率（色が濃いほど確率が高い。円環 Δr の幅は無限小で色の濃さは連続的に変化する）

最後の一步を大股で

前述のランダムウォークでは毎回の歩幅を一定にしていたが、最後の一步（ $N+1$ 歩目）だけ長さ a にするとどうだろうか？ a は長くても短くてもよく、方向もどちらでもよいが、 x 軸方向に長い一步を踏み出すと思って欲しい。この場合は

$$u^{(N+1)} = a + u^{(N)} = a + x^{(N)} + jy^{(N)} \quad (3)$$

であり、 N が十分大きいときは距離 $r(=|u^{(N+1)}|)$ の確率分布は、仲上・ライス分布と呼ばれる次式になる（レイリー分布の導出よりは難しい [1]）。

$$p(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{ar}{\sigma^2}\right) \quad \left(\sigma = \sqrt{\frac{N}{2}}\right) \quad (4)$$

【仲上・ライス分布】

ここで、 I_0 は 0 次第一種変形ベッセル関数である。

仲上・ライス分布は直接波が有る（見通し内の）フェージング環境での信号強度を表す分布として無線通信では重要な働きをしている。（名前の由来について、末尾のティータイム参照）

👉 多次元空間をさまよう

ランダムウォークを多次元（ M 次元）空間に拡張してみよう。3 次元空間でのランダムウォークは、重力が無い環境を思い浮かべればよい（無重力では足の置き場がなく歩けないと言う心配は脇に置き）。3 次元の世界で生きている我々には、4 次元以上の空間をイメージしにくい、直交する M 本の軸で構成される仮想的な空間（3 次元空間のジャングルジムをもっと複雑にしたイメージ）で、この中をランダムウォークしていると思って欲しい。中心からの正規化距離 $\hat{r}_M^{(N)}$ （図 2 の②に対応）のシミュレーション値を、 $M=3, 10, 100$ について示したのが図 5 である。図より、 M が大きくなるほど、すなわち次元数が大きくなるほど変動が小さくなる様子がわかる。

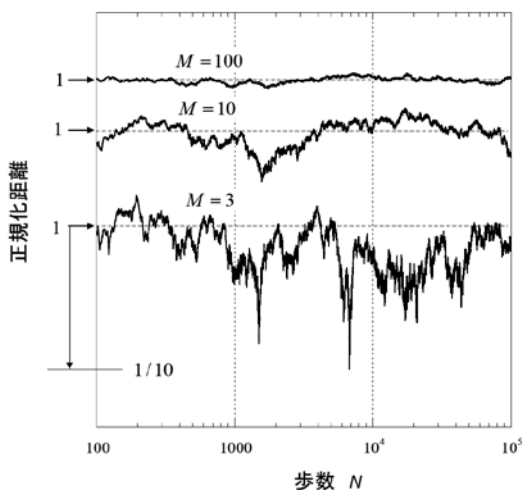


図5 M 次元空間ランダムウォークでの正規化距離 $\hat{r}_M^{(N)}$ の変化（図の縦軸は対数メモリで、図を見やすくするために、正規化距離 1 のライン（点線）をすらしている。1/10 の低下幅は共通）

歩数 N が十分大きいとき $r_M^{(N)}$ の確率分布は次式で与えられ、仲上 m 分布と呼ばれる [1]。

$$p(r) = A_0 r^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} r^2\right) \quad \text{【仲上 } m \text{ 分布】} \quad (5)$$

ここで、 $r = \lim_{N \rightarrow \infty} r_M^{(N)}$, $\Omega = N$, $m = M/2$ である。

式中の係数 A_0 は確率分布を r の範囲（ $0 \sim \infty$ ）で積分したとき 1 になるように定める正規化係数である。

図 5 から分かるように、 M が大きくなると正規化距離は値 1 のライン付近に留まり、出発点（値 0）付近に帰ってくる確率はどんどん小さくなる。一旦、足を踏み入れたら最後、二度と元には戻れないという蟻地獄の世界である。ちなみに、多次元空間において原点から一定距離の点の集合は超球面と呼ばれる。2 次元では円、3 次元では球がそれである。次元が大きくなるほど、超球面から逃れられなくなる。自由の追求は不自由をもたらすの体である（図 6）。

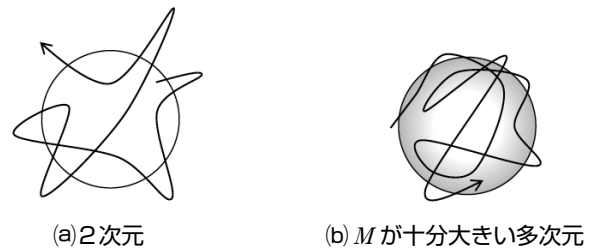


図6 超球面（2 次元の場合は円）と正規化距離の動き（超球面の次元数が高くなると超球面に張りつくような動きになる）

スペースダイバーシチと言うフェージング対策技術がある。1 本のアンテナの受信では大きなレベルの落ち込みが発生するので、複数本のアンテナで助ける技術である。合成の仕方によって性能は変わるが、最高の性能を得る方法は最大比合成ダイバーシチ（MRC）である。一つのアンテナでの受信振幅変動はレイリー分布、 K 本のアンテナでの最大比合成ダイバーシチでの振幅（＝実効値レベル）の変動は $m=K=M/2$ の仲上 m 分布になる（電力や SN 比の変動は、よく知られているガンマ分布 [1]）。

図 7 はこの説明をまとめている。1 本のアンテナでの受信の振幅分布は激しい変動を伴うレイリー分布。これは 2 次元ランダムウォーク（RW）に相当する。アレー素子のそれぞれの変動はお互い独立であり、全体では直交する $2K$ 次元空間でのランダムウォークに

相当するが、この場合は次元間の歩幅の制約がなく冒頭で示した①の前提とは違う。これに最大比合成ウェイトとして一步の幅を1とする制約等を課すと結果としてこの状態は $2K$ 次元空間ランダムウォークの世界と等価(=受信振幅が仲上 m 分布($m=K$))になる。スペースダイバーシチとは、ランダムウォークの次元 M を2から $2K$ に上げて、信号レベルを超球面(ただし、ダイバーシチ利得により半径が $\sqrt{K}$ になる)に張り付けさせるようにする技術、すなわち強度0の原点に回帰させない技術と読み解くことができる。

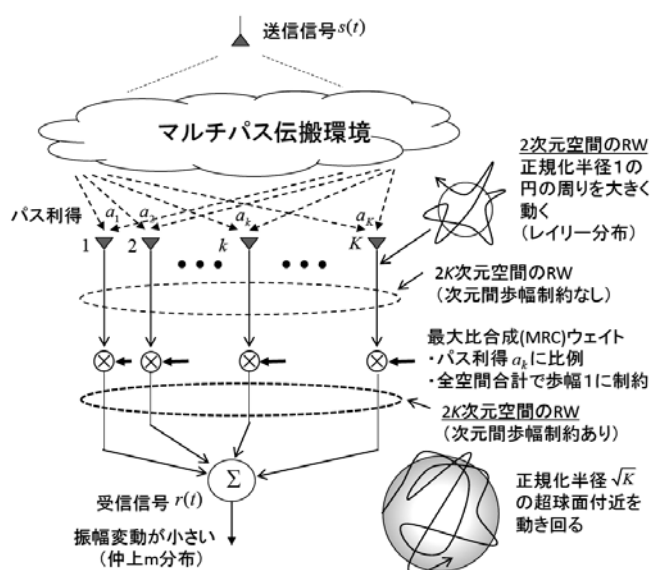


図7 スペースダイバーシチ (MRC) には多次元ランダムウォークの特徴が組み込まれている

雑感

ランダムウォーカー視点の人生論を二つ。

一つは時間の重み。図2の①に見られるように、一步一步の努力がその数の平方根で報われると言うのは、人生だいたいそうではないであろうか？やることなすこと全てうまく行くような、すなわち成果が努力に比例するような順風満帆な人生は普通ない。そしてその時間スケール。図2の②や図5の $M=3$ に顕著のように、対数軸上での変化の周期があまり変わらない。百年かけて積み上げてきたものの変化は百年の、千年のものは千年の時間がかかる。今の位置を変えてゆくにはそれに費やした時間と同じくらいの長い時日が必要ということのよう。あわてずあせらず、である。

もう一点は、自由とは何か。ここで述べてきた空間次元は「自由の数」と読み替えることもできる。与えられた自由が少ないと、その範囲の中でダイナミック

に動き回ることができる(変幻自在:図6(a))。自由が多すぎると、本人はそれを謳歌しているつもりでも、周りから見れば、超球面の表面付近をうろうろしているだけになり(同図(b))、結果的にはお釈迦様の手のひらの上から抜けられないということになる。自由がありすぎるって、どうなんだろう。

本稿では、電波伝搬に現われる基本式を、ランダムウォークという一般の教科書とは違う道を通って訪ねてみた。多次元空間には安定な世界があり、それは無線通信が求める信号劣化のない世界(アレーアンテナが作り出す世界)でもある。ものごとく視点を変えると、見えなかったものが見えてくることもある。本テーマを詳しくまとめた技術レポートを公開している[2]。興味あったら是非見て欲しい。

ティータイム

仲上・ライス分布：名前の由来

1940年代、不規則信号の振幅の確率分布の理論的研究は、我が国では国際電気通信株式会社(当時)の仲上稔により、米国ではベル研究所のライス(S. O. Rice)により独立に行われていた。仲上は短波の受信信号の強度分布の理論的考察から、一つの確率分布を与える式((4)式)を1940年の電気通信学会誌に発表した(当時の呼び名は「 n 分布」)。同じ式は、ライスにより、雑音下での信号の強度を与える分布として、ベル研の技術雑誌BSTJに、1944/1945年に発表された。論文誌の国際性や認知度の違いから、この分布は世界(主に欧米)では長らく「ライス分布」と呼ばれてきたが、我が国先達の努力によって「仲上・ライス分布」の呼び名が定着しつつある。(IEEEの論文誌などではまだライス分布と呼ばれることが多い)。

ライスはこの分布を定常成分(信号)と不規則変動成分(雑音)の和の分布として導いていて、この手順は素直で、学生に教えやすい。一方、仲上の方法は、ハンケル変換特性関数による方法(多数の正弦波信号の合成信号の包絡線分布、本稿のランダムウォークの考え方)を採っており、初めて学ぶには敷居が高い。

さはさりながら、このようにして、同時代の洋の東西で、異なる目的・異なる手法で、後の時代の移動伝搬の基本式「仲上・ライス分布」が生まれたことが興味深い。なお、仲上を世界的に有名にしている分布は、本稿でも取り上げている「仲上 m 分布」であり、これにも生誕のドラマがある(この項の詳細は[3]に)。

<参考文献>

- [1] 唐沢好男, 改訂: デジタル移動通信の電波伝搬基礎, コロナ社, 2016.03.
- [2] 唐沢好男, “ランダムウォークと電波伝搬(改訂版),” 技術報告(私報), TR-YK036_rev, 2020.03.
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_036_Random_Walk.pdf
- [3] 唐沢好男, “電波伝搬: 物理現象とモデリング-先達の足跡をたどる-,” 信学誌, vol. 99, no. 8, pp. 792-798, 2016.
[https://www.journal.ieice.org/summary.php?id=k99_8_792&year=2016&lang=J\(無償公開\)](https://www.journal.ieice.org/summary.php?id=k99_8_792&year=2016&lang=J(無償公開))