

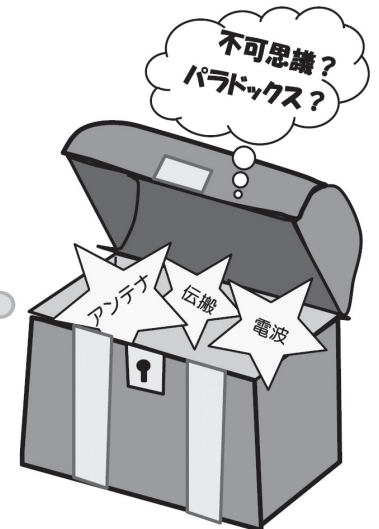
電波研究の玉手箱

第4講

電磁誘導の法則に見る電磁気学のからくり
電界と磁界の不思議な関係

電気通信大学名誉教授
唐沢 好男

毎号、電波技術の基本テーマの中に見え隠れする不思議を玉手箱につめてお届けしている。第4講は電波の基礎：電磁気学。学生時代、数式に圧倒され苦手意識が抜けない授業科目。その気分を一新。ファラデーが発見した電磁誘導の法則を取り上げ、電磁気学のからくりを楽しんでみたい。一見パラドックスに思われることも、マクスウェルの方程式に内在する相対論的性質がこの問題を見事に解決してくれる。



👉 ファラデーの電磁誘導の法則

1820年、デンマークのエルステッドは電流がそばにあると方位磁針が反応することに気づいた。別々の物理現象と考えられていた電気と磁気に関係が有ることが分かった瞬間である。その後、多くの研究者によって、今度は磁石から電気を生み出す試みがなされたがなかなかうまく行かず、ついに、その扉を開いたのはイギリスのファラデー、1831年であった。図1のように、磁石のそばでコイルを動かす、あるいは、コイルのそばで磁石を動かすときだけ検流形が振れるのに気付いたのである。ファラデーの発見によるこの現象は電磁誘導と呼ばれる。

図1に示すループに生じる起電力（誘導電圧；単位：ボルト） V は以下の式で表されることがわかった。

$$V = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (1)$$

Φ_m はループを貫く磁束の総数、符号が負となるのは、磁界の変化を妨げる方向に電圧が発生することを意味している。後にファラデーは、導線の有る無しにかかわらず、磁界の変化時には空間に電界の渦ができていて、導線に起電力が発生するのは、導線がその渦電界の作用を受けるためという解釈を示した^{*1}。

^{*1} 電磁気学において、磁場を表す物理量は磁界 H と磁束密度 B である。単位が異なるこの二つの量（ベクトル）は向きが同じで大きさは比例関係にある。電磁誘導では磁束密度 B との関係で説明されるが、本稿では広い意味で、磁束密度も含めて磁界（あるいは磁場）と呼んでいる。

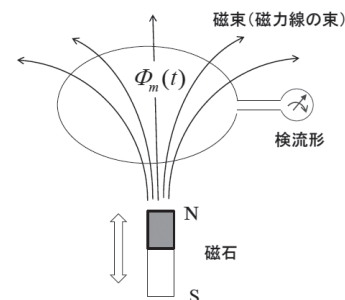


図1 電磁誘導：磁界の時間的変化が電気を生み出す

👉 応用問題とその解法

電磁誘導の典型的な応用問題を図2に示す。

【問題】 磁力線が y 軸方向に向く一様な磁場 B_y が、 $x=0$ より右側の部分にある。この中に抵抗 R で結ばれた平行導線があり、この上を導線が接触したまま一定速度 v で動く。このとき閉ループに流れる電流 I を求めよ。

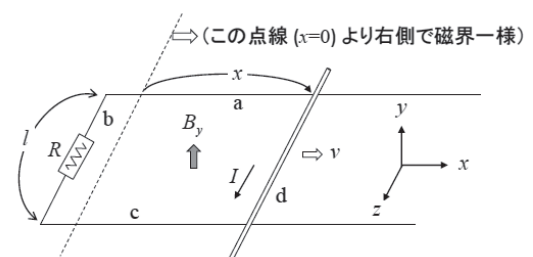


図2 電磁誘導の典型的な応用問題

【解法】(1)式より、回路に発生する起電力 V は、矩形 $abcd$ を貫く磁束が $B_y l x$ であるので

$$V = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(B_y l x) = -B_y l v$$

となる。電流 I は、オームの法則より $B_y l v / R$ 、向きは図の矢印方向（ループ内磁束の増加を防ぐ方向）。この方法を「解法 1」と呼ぶ。電磁誘導とはこういうもの、といわれれば納得せざるを得ないが、不思議な気分が抜けない。

☞ もう一つの解法

この問題は、電磁誘導の法則を知らなくても、以下の方法で解ける（これを「解法 2」と呼ぶ）。

4つの辺のうち、電磁現象が起きそうなのはどれかを探す。辺 a 、 b 、 c は磁界も導線の位置も時間的に変化無く、何も起こりそうにない。一方、辺 d は磁界中を動いているので、何かあるとしたらここである。辺 d は導線なので、この中には、荷電粒子（電荷）が存在する。辺 d の導体棒に存在する荷電粒子は磁界と直角に動くので、一つ一つの電荷はローレンツ力と呼ばれる力を受ける。力の向きは動く方向にも磁界の方向にも直角な方向、すなわち、導線方向である（図 3）。途中を省略するが、この結果、導線に起電力が生まれ、その大きさは $V = -B_y l v$ となって、解法 1 と同じになる。

現場（＝導線）に起きることは現場の周囲環境に原因があるはず、という考えに立てば、解法 2 はその精神に合致している。これで、解法 1 で感じた不思議な気分は少し和らぐ。ところが、この考え（解法 2）には、次に述べる落とし穴がある。

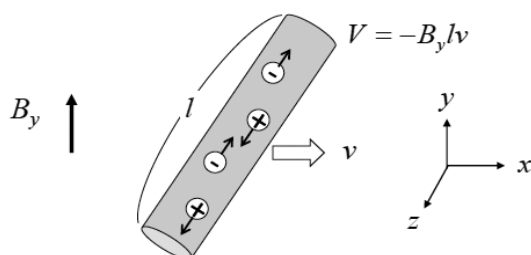


図 3 磁界中を動く導体内の荷電粒子に働くローレンツ力（磁界中を動く荷電粒子には、磁界と動きの向きの両者と直交する方向（図の z 軸方向で電荷の正負によって力の向きは反対）にローレンツ力が働く）

☞ 棒と一緒に動く人から見るパラドックス

解法 2 をもう少し見てみよう。図 4 に示すように、 y 軸方向に一樣な静磁界の中に長さ l の導線が z 軸方向に置かれていて、 x 軸方向に速度 v で動いている。この導線には、ローレンツ力によって $V = -B_y l v$ の起電力が発生していることを前節の解法 2 で述べた。では、この現場を、導線と同じ速度で動く観測者（視点）が図 4 の K' 系で動く）にはどう見えるであろうか？この観測者には、静磁界中に動かない導線が置かれているだけであるから、すなわち $v = 0$ であるからローレンツ力は生まれず、起電力は 0 のはずである。同じ物理現象が、見る人の動きによって異なるのは不合理である。ではこれはパラドックスなのだろうか？この問題の答えとして、電磁気学は以下のことを教えてくれる。

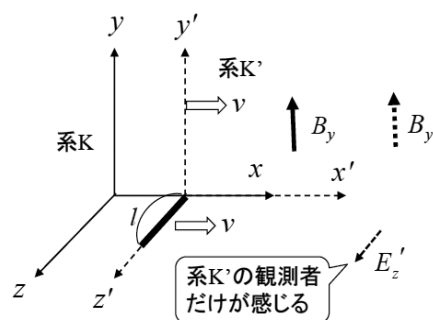


図 4 一樣磁界の中を一定速度で動く導線の起電力を異なる慣性系で見る（系 K ：静止系；系 K' ：移動系（観測系））

☞ 電界と磁界は一心同体・変幻自在

電界と磁界は、それぞれが独立な物理量として空間にあるのではなく、異なる慣性系（＝一定速度で動く系）においては、同じ電磁界が、形を変えて現われるのである。ある観測者には磁界だけしか見えないものが、別の観測者には電界と磁界の両方が見えると言ったようにである。ではどう移り変わるか、それは、異なる慣性系間においてローレンツ変換に従う、という規範（原理）である。ローレンツ変換と聞くと、アインシュタインの相対性理論を思い浮かべると思うが、そう、それである。ニュートン力学の規範であるガリレイ変換（動いている人が投げるボールの速度は、動いている速度が加わる）でなく、ローレンツ変換（空間も時間も縮んだり延びたりする）なのである。電磁界のローレンツ変換については [1] にまとめているので、導出等はそれを見て欲しいが、 x 軸方向について、ガリレイ変換とローレンツ変換は、それぞれ、次

のような変換になる（ y 軸と z 軸は $y=y'$, $z=z'$ で変わらない）。

$$\begin{aligned} x' &= x - vt & (\text{ガリレイ変換}) \\ x' &= \gamma (x - vt) & (\text{ローレンツ変換}) \end{aligned}$$

γ はローレンツ因子と呼ばれ次式で与えられる。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \geq 1 \quad (c: \text{光の速度})$$

電界と磁界も慣性系の違いに対してローレンツ変換で結ばれる。詳細を省いて結果のみを示す（具体的な変換は [1] に）。静止系 K に磁界 B_y があるとすると、図 4 に示した移動系 K' では

$$E'_z = \gamma v B_y, \quad B'_y = \gamma B_y$$

となり、静止系では見えていなかった電界の z' 軸方向成分 E'_z が見えてきたことになる（図 4）。ここで考えている移動速度 v は光速に比べて十分遅く $v \ll c$ であるので、 $\gamma \approx 1$ であり、

$$E'_z \approx v B_y, \quad B'_y \approx B_y$$

である。 K' 系では止まって見える導体棒に、静止系にはなかった電界 E'_z が現われて作用し起電力 $-B_y l v$ が生まれ、解法 2 の結果とも一致する。この説明によって、慣性系 K と K' での起電力に関するパラドックスが解消されたことになる。

電磁気学理論（を構成するマクスウェルの方程式）には慣性系に対してローレンツ変換の下で不変と言う性質が具備されていたのである。マクスウェルがそれを意識して方程式を作ったからではなく、電磁気に関する法則にそういう性質が隠れていて式に表したらそうなっていたのである。電界と磁界は別々の物理量ではなく、一つのものが、見方によって異なる形（電界とか磁界とか）で現れてくるのである。円柱のように横から見れば長方形に、上から見れば円であるが、それは見方による違いであって、実体は一つのもの、と言うようなイメージである。不思議ですね。

解法 1 はこういう議論に無頓着である。止まっている人にも動いている人にも (1) 式は成立しているからである。電磁気学（マクスウェルの方程式）が慣性系に対して不変と言うことはそういうことなのである。

☞ 電界も磁界もないところ

ここで、話題が変わる。電磁現象は、電界や磁界があるところに起きる。逆に、電界も磁界もないところでは電磁現象は何も起きないのだろうか。これを考える。

図 5 に示すらせん状のコイルで密に巻かれた無限に長い円形ソレノイドがある。電磁気学は以下のことを教えてくれる。

- ① ソレノイドの内部では軸方向に一樣な磁界ができ、その大きさは電流と巻数（単位長さ当たりの）に比例する。
- ② ソレノイドの外側は、磁界は 0 である。
- ③ ソレノイドの内外において電界は 0 である。（電流は電子（負の電荷）の動きで作られるが、それと同量の静止した正の電荷で電氣的には中和している）。

これより、ソレノイドの外側は電界も磁界もない空間になる。電界も磁界もないところには電磁現象は何も起きないはず、でも、電磁誘導はそんなところでも起きるのである。

ソレノイドの電流 I を時間と共に徐々に強くしてみよう。ソレノイド内の磁界は比例して強くなるが、ソレノイドの外の電界と磁界は存在しないままである。でも、その外側をループで囲むと、そのループを貫く磁束は変化しているので、(1) 式の電磁誘導の法則によって起電力が発生することになる。ループが置かれている場所には電界も磁界もないのに、電磁現象が起きているではないか、ということになる。

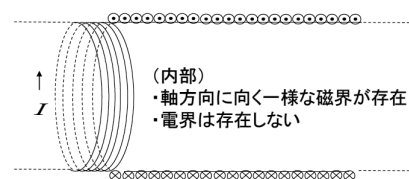


図 5 無限ソレノイドが作る電磁界

☞ 電界も磁界もなくとも別の電磁界はある

ソレノイドの外側には、確かに電界も磁界もないのであるが、何にもないわけではなく、実はベクトルポテンシャルと言う別の形の電磁場ができていのである。ベクトルポテンシャルの説明をこの解説記事で詳しくすることはできないが、磁界の元になる場と思って欲しい。（電磁気学の教科書では、ベクトルポテン

シャルはベクトル A で表され、 $B = \nabla \times A$ (微分演算子 ∇ との外積) で定義されるが、今は、そういうものだと思ってくれれば良い)

マクスウェル自身が作り上げた当時の電磁気学 (マクスウェルの方程式) は、多くの物理量 (ベクトルポテンシャルも含む) がごちゃ混ぜになった複雑怪奇な連立方程式で、同分野の研究者にも理解が難しい代物であったらしい。これを、ヘルツとヘビサイドが、電界と磁界を主役にする 4 つの連立方程式に整理してくれ、今日、我々はその恩恵に浴してはいるのだけれど、そのときから、ベクトルポテンシャルは式から見えなくなってしまうのである。そのこともあって、ベクトルポテンシャルは本当に実在する物理量なのかとの論争が続いてきた。そして、その答えは、量子力学が教えてくれたのである。

量子力学の世界に、Y. Aharonov と D. J. Bohm が 1959 年、その存在を指摘したアハラノフ・ボーム効果 (AB 効果) というのがある。詳しくは、解説記事 [2] を見て欲しいが、一言で言うと、ベクトルポテンシャルがある場では、電子を P 点から Q 点に移動させるとその位相変化 (電子波の位相: 量子力学的な物理量) が経路に依存する、と言うものである (図 6)。これを確認する実験は大変難しくなかなかできなかったが、日立製作所の外村彰博士が、1986 年、電子線ホログラフィーの手法を用いて、その存在を実証した (漏れの無い磁場を作ることの難しさ等の苦労話が [2] に)。これによって、ベクトルポテンシャルが単なる数学上の表現ではなく、実在する物理量であることが明らかになったのである。

電界・磁界の無いところにも電磁誘導は起きる

上述のことを踏まえて、無限ソレノイドが内部を貫通する導線円形ループを考える (図 6 の A_ϕ を円形ループに置き換えたイメージ)。ソレノイドの電流が一定であれば、ループは何も反応しない。ソレノイドの電流を徐々に増やして行くとループを貫く磁束が時間的に変化し、電磁誘導により、起電力が発生する。ループの場所には電界も磁界もなく、それなのに、ループには起電力が発生する。現場で起きることは現場に原因がある、と言う視点に立つと、現場には電界も磁界もないのだから、起電力が生まれるはずがない、ということになる。しかしその場には、前述のとおりベクトルポテンシャルの渦ができています。そして、ソレノイドの電流変化と共に時間的に変化している。そう、

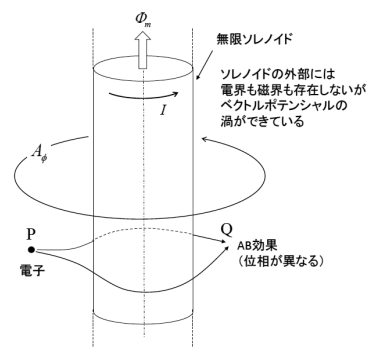


図6 無限ソレノイド外部の電磁界 (ベクトルポテンシャルの渦ができています)

電界がなくても、ベクトルポテンシャルの時間変化 ($-dA_\phi/dt$: 正確には常微分ではなく偏微分) が電界と同じ働きをしているのである (マクスウェルの方程式がそう言っている)。現場で起きることは現場に原因があったのである。

おわりに

19 世紀後半に完成した電磁気学は、電磁現象に関する 4 つの法則 (①電界に関するガウスの法則、②磁界に関するガウスの法則、③ファラデーの電磁誘導の法則、④電流と磁界に関するアンペール・マクスウェルの法則) より成り、我々が生業とする電波の世界に起きることを全て説明できるという優れたものである。20 世紀冒頭に吹き荒れた相対性理論の嵐も無傷に乗り切り (=マクスウェルの方程式の中に相対論の性質が入っていたので)、現代物理学 (力学理論) の一翼を担っている。電磁誘導は、その中の一つの法則であるが、一事が万事、電磁気学には謎めいたことが一杯詰まっている。ガラス細工のようにデリケートに組み立てられているが、どこにもほころびはない。「物理のパラドックスは理解の迷いに過ぎない (ノーベル賞学者ファインマン)」とまでは達観できなくてもそれはそれでまた楽しい。

このように、一つの現象がいろいろに解釈できて議論は尽きないが、それらはみな解釈であって確かなことは唯一つ、電磁誘導の法則が式(1)で表されること。法則の正しさを証明できる人は誰もいない。

<参考文献>

- [1] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ(4): マクスウェル方程式のローレンツ変換,” 技術報告(私報), TR-YK-026, 2019.07. http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-026_EM-4.pdf
- [2] 外村彰, “電子波で見る電磁界分布 (ベクトルポテンシャルを感じる電子波),” 信学会誌, vol. 83, no. 12, 99. 906-913, 2000. <https://www.ieice.org/jpn/books/kaishikiji/200012/20001201-1.html>