Close Up

衛星伝搬の壷
第６講（最終講）
伝搬モデルの中の確率分布：温故知新

電気通信大学名誉教授
唐沢 好男

本シリーズでは衛星回線の電波伝搬に焦点を絞り、種々の伝搬現象のメカニズムやモデリングの壷を解説してきた。本講はその最終講、無線通信の電波伝搬モデルに現れる確率分布を取り上げる。伝搬モデルには、物理現象のメカニズムに合った確率分布が用いられる。そのためには、それぞれの分布がもつ意味を理解することが大事になる。基礎となる確率分布の歴史を訪ね、それぞれの分布の特徴をまとめる。それを踏まえ、良い伝搬モデルを作るための基本的な考え方を述べ、本シリーズの結びとしたい。

伝搬モデルと確率分布

正規分布、対数正規分布、レイリー分布などはフェージングが現れる無線回線にはお馴染みの分布である。また、短波通信の時代（1940年代）に仲上稔が編み出した仲上-ライス分布や仲上m分布は、今もマルチパスフェージングの基本分布として現役である。これらの分布が表す物理現象はなんであろうか。

伝搬モデルには、対象となる通信環境において、そこに起きる伝搬劣化を高精度に予測できることが求められ、伝搬研究成果のシステム開発への橋渡し役を担う。伝搬モデルは統計的推定手法であり、伝搬のメカニズムに符合する確率分布が用いられる。それゆえ、良いモデルを作るためには、それぞれの確率分布の理解が大事になる。本講では、衛星系および地上系双方のマルチパス伝搬に現れる基本的な確率分布に絞り、歴史を紐解きつつ、その特徴を述べる[*1]。

電波伝搬と定常不規則過程

無線通信のマルチパス伝搬では、受信信号の振幅と位相が時間・空間・周波数領域において不規則に変動し、かつ、それが一定の統計的性質をもつという意味において、定常不規則過程になる。この定常不規則過程には、加法性（足し算型）と乗法性（掛け算型）の二つのタイプがある。

*1 ここで取り上げる種々の確率分布には本文中に述べる提案者がいて、その出典を明記すべきであるが、本文記述にページを割きたいため、筆者の私製本 [1] のみを参考文献として、原著論文はそこからの孫引きになることを理解いただきたい。また、本文中の人名に対しては敬称を省いている。

❖ 加法性確率過程と正規分布

加法性は、個々の作用が足しあわされることによって現れる性質を言う。図1に示すように、バケツに入ったランダムな量の水を一つの容器に集める状況がそれである。バケツの水を入れ替えて試行を繰り返すたびに全体量は異なるが、バケツの数が十分多いとき正規分布（ガウス分布）になるという性質：中心極限定理が導かれる。正規分布の確率密度関数（probability density function；PDF）は平均値 μ、分散 σ^2 をパラメータとし(1)式で表される。（以下、本講で扱う確率分布の式はすべて表1に置く）

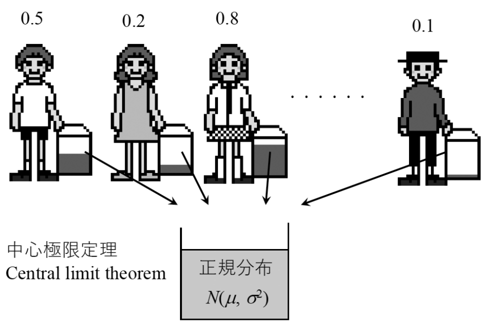

図１　加法性確率過程のイメージ

確率密度関数とは、値が x を中心とする微小区間 $\varDelta x$ の範囲に存在する確率が $f(x)\varDelta x$ となる関数 $f(x)$ を言う。確率密度関数を x の全範囲で積分すると1になる。正規分布は、加法性の現象、すなわち、ランダムなものが多数集まる現象に現れる基本分布である。正規分布の形はお馴染みの釣鐘型、簡易表記として $N(\mu, \sigma^2)$ が用いられる。

表１　本講で扱う確率分布の確率密度関数
（確率変数の値の定義域：$-\infty < x < \infty$，$0 \leqq r < \infty$，$0 \leqq z < \infty$；A_g, A_m は積分値が１になるための定数係数）

$$(1)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\quad\left(\mu=\langle x\rangle,\sigma^2=\langle (x-\mu)^2\rangle\right)$$

$$(2)\ f(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_L r}\exp\left(-\frac{(\log r-\mu_L)^2}{2\sigma_L^2}\right)$$
$$\left(\mu_L=\langle \log r\rangle,\sigma^2=\langle (\log r-\mu_L)^2\rangle\right)$$

$$(3)\ f(r)=\frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$(4)\ f(r)=\frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r_0^2+r^2}{2\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{r_0 r}{\sigma^2}\right)\quad\left(K\equiv\frac{r_0^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$(5)\ f(z)=\beta\exp(-\beta z)\quad(\beta>0)$$

$$(6)\ f(z)=A_g z^{\alpha-1}\exp(-\beta z)\quad(\alpha,\beta>0)$$

$$(7)\ f(r)=A_m r^{2m-1}\exp\left(-\frac{m}{\Omega}r\right)\quad\left(m\geq 0.5,\ \Omega=\langle r^2\rangle\right)$$

❖ 乗法性確率過程と対数正規分布

次に乗法性を見てみよう。これは、図２のバケツリレーのイメージである。バケツいっぱいの水からスタートし、受け渡すたびにランダムな比率で水をこぼしながらリレーしてゆく。順番 i の人がこぼす比率を η_i とすると、N 番目の人が渡す水の量 r は $=1\times\eta_1\times\eta_2\times\cdots\times\eta_N$ となる。個々の現象が掛け算で作用するので乗法性である。この量の対数をとると次式のように対数値の和の形になる。

$$\log r=\log\eta_1+\log\eta_2+\cdots+\log\eta_N\quad(\log\equiv\log_e)$$

それぞれの対数値がランダムであるので、掛け算の数が多くなると、中心極限定理により $\log r$ も正規分布に近づいてくる。対数値 $\log r$ が正規分布するときの真数 r の PDF は⑵式で与えられ、対数正規分布と呼ばれる。この性質ゆえ、対数正規分布は、乗法性の現象、すなわち、ランダムなものが多数掛け算で寄与する現象を表す基本分布になる。

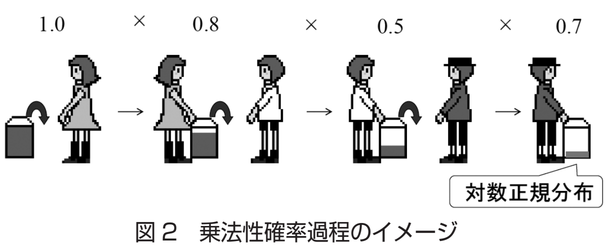

図２　乗法性確率過程のイメージ

地上系移動通信の伝搬モデル（確率過程）には、図３に示すように、電波が目的のエリアに到達する部分の乗法性（電波が遮へい物にぶつかりながら徐々に弱くなる）と端末周囲における加法性（マルチパス波が集まってくる）の両性質を併せ持っている。

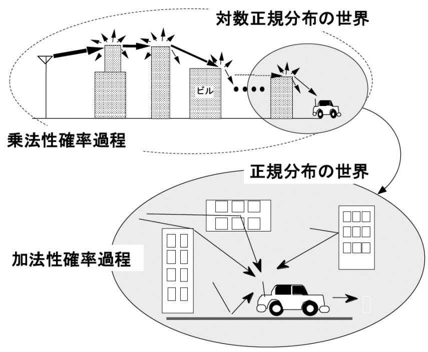

図３　移動伝搬モデルに現れる二つの確率過程

伝搬モデルに用いられる基本的な確率分布

❖レイリー分布

レイリー分布は、信号の実部と虚部のそれぞれが独立な正規分布 $N(0,\sigma^2)$ をなす変数 x, y に対して、$r=|x+jy|$ とする振幅値 r の分布であり、その PDF は⑶式である。

移動通信の見通し外（NLOS）伝搬環境では、多数の散乱波が集まった結果として、受信信号の実部も虚部も正規分布に近似でき、その受信強度（包絡線レベル）がレイリー分布する。このメカニズムによる伝搬現象はレイリーフェージングと呼ばれる。$2\sigma^2=1$ とする計算結果を後述する図６中に示す。確率密度は $r=0$ と無限大で０になり、$r=\sigma$ で最大値を持つ。

図４はレイリー分布の意味を説明している。確率密度は変数の値 x や r に対して連続的に変化するが、変化の違いを際立たせるために微小幅 $\varDelta r$ ごとに色の濃さを変えている。複素面上（実部→x、虚部→y）での存在確率が最も大きい場所は原点付近であるのに、レイリー分布はそこ($r=0$)の確率密度を０としている。一見、不思議に感じられるが、これは r と $r+\varDelta r$ の円環内に入る確率を見ているからである。

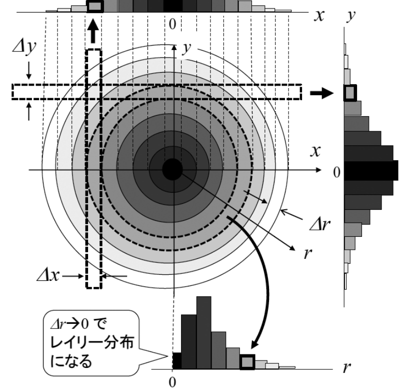

図４　レイリー分布の説明図

❖ 仲上－ライス分布

変数xの分布をN（r_0, σ^2）、yの分布をN（$0, \sigma^2$）、とするときの絶対値r（$=|x+jy|$）の分布を仲上-ライス分布という。レイリー分布に定常成分が１つ加わったときの振幅の確率分布を与える。図５はこの説明図であり、PDFは変形ベッセル関数I_0を用いて⑷式で表される。

仲上-ライス分布は見通し内（LOS）マルチパス環境を表す伝搬モデルに用いられる。見通し環境の良さを、直接波成分の電力P_Dとマルチパス波成分の平均電力P_Sの比K(ライスファクタと呼ばれる)を用いて、$K \equiv P_D/P_S=r_0^2/(2\sigma^2)$で表す。仲上-ライス分布は、その極限（すなわち$K$=0）にレイリー分布を含むので、LOS/NLOS双方の環境を包含した汎用的な分布である。図6はライスファクタK(dB値で与えている)をパラメータとして、分布の計算結果を示している(図には、後述する仲上m分布も点線で示している)。

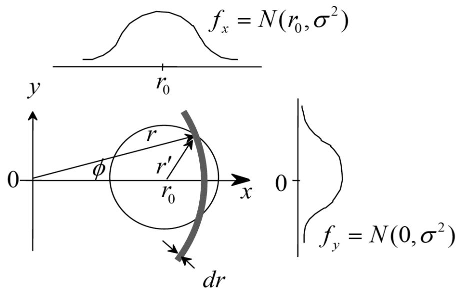

図５　仲上－ライス分布の原理図

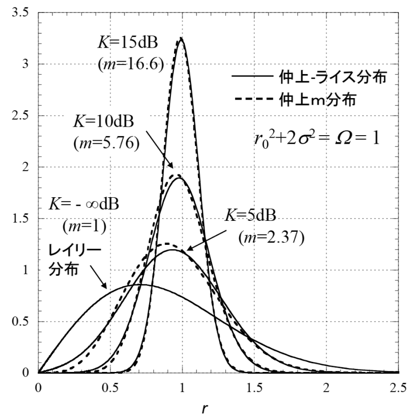

図６　仲上－ライス分布（実線）と仲上ｍ分布（点線）

1940年代、不規則信号の振幅の確率分布の理論的研究は、我が国では国際電気通信株式会社（当時の国策会社）の仲上稔により､米国ではベル研究所のライス（S. O. Rice）により独立に行われていた。仲上は短波の受信信号の強度分布の理論的考察から、一つの確率分布を与える⑷式を1940年の電気通信学会誌に発表した。同じ式は、ライスにより、雑音下での信号の強度を与える分布として、ベル研の技術論文誌BSTJに1945年に発表された。論文誌の国際性や認知度の違いから、この分布は世界（主に欧米）では長らく「ライス分布」と呼ばれてきたが、我が国先達の努力によって「仲上－ライス分布」の呼び名が定着しつつある。

ライスは、この分布を定常成分（信号）と不規則変動成分（雑音）の和の分布として導いていて、この手順は素直で、学生に教えやすい（図５による説明はライス流）。一方、仲上の方法は、ハンケル変換形特性関数による方法を採っており、初めて学ぶには敷居が高い。このようにして、同時代の洋の東西で、異なる目的･異なる手法で､後の時代の移動伝搬に生きる「仲上－ライス分布」が生まれたことが興味深い。(歴史的経緯の詳細は［1］を見てほしい)。

❖ 指数分布とガンマ分布

レイリー分布や仲上－ライス分布は信号振幅の分布を表すのもであったため、変数に文字rを用いた。ここでは、$z=r^2$で表されるzの分布を考える。zは次元として電力やSN比に対応する。振幅rがレイリー分布するとき、電力zのPDFは、確率分布の変数変換の公式から⑸式になる。式の形から指数分布と呼ばれる。独立でかつ同一な指数分布の和の分布は⑹式で表されるガンマ分布になる。パラメータαは指数分布の和の数に相当し、それが実数に拡張されている（α=1とすると指数分布)。スペースダイバーシチ(最大比合成)では、ブランチ信号のSN比の和が合成信号のSN比になるが、上述の仕組みにより、合成信号のSN比はαをアンテナ素子数とするガンマ分布になる。

❖ 仲上m分布

⑺式で与えられる仲上m分布は、短波の受信強度変動データが示す性質から仲上稔（1943）が経験的に見出した分布である。mとΩが分布のパラメータであり、式の形からm=0.5で半ガウス分布（正規分布の右側半分の形)、m=1でレイリー分布となる。mが1より大きい部分では仲上-ライス分布に似た形になる。前掲の図6にΩ=1のもと、mをパラメータにして分布の形を点線で示している。図中のmの値は、仲上-ライス分布とのパラメータ換算公式を用いて対応するKの値に合わせている。図に見られるように、仲上m分布と仲上-ライス分布は、変数の広い範囲において良い近似関係がある（近似の注意点については［1］に)。仲上m分布の方が数式処理がしやすいため、LOS環境やそれに近いマルチパスフェージング環境

の伝送特性解析に重宝されている。

この分布が生まれた経緯を見てみよう。当時、デシベル値で表される信号強度の度数分布を表すのに、レイリー分布が$y=x$の直線で表される特殊目盛りの方眼紙（相対頻度図：累積分布ではなくて度数分布）が使われていた。仲上は、短波フェージングのデータをプロットしてみると、イベント毎の特性が様々な傾きを持つもののどれも直線状になる性質を見出した。この傾きをmとし、$y=mx$となる分布を求めると⑺式になるのである。しかし、このように経験的に見出した分布であるので、仲上自身もその理論的な説明付けに苦労していた様子が当時の論文から読み取れる。(詳細は［1］に)。

では、今日においてはどう解釈されているのであろうか。図７は、本講で取り上げた基本確率分布の関係をまとめている。レイリー分布と指数分布は、その変数を振幅rと電力zの次元で換算すれば、同じ電波環境（＝レイリーフェージング）を表すものになる。指数分布の和の分布はガンマ分布になり、ダイバーシチ最大比合成信号のSN比を与えることも述べた。この関係には、図の？部分にも対応する確率分布が存在するはずである。図７に示した分布は、仲上-ライス分布以外、数学・物理分野で20世紀初頭には既に知られていた分布である。ゆえに、そのころ、誰かが、ガンマ分布を電力変動を表す分布と捉え、「その実効値（電圧次元）の分布は？」という思いに至れば、図の？に収まる式は変数変換によってたちどころに得られるものであった。しかし、歴史はそうではなく、1940年代、電波工学者の仲上稔が短波のフェージングの性質として、実験データから経験的に導いた⑺式がそれであったのである（必要は発明の母）。今や、仲上m分布は、確たる位置をもつ理論分布として、現在の移動通信の伝搬モデル（マルチパス伝搬モデル）の中に生き続けているのである。

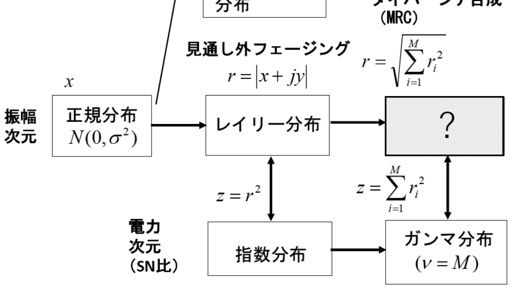

図７　確率分布の相互の関係（「？」に入る分布は？）

良いモデルとは

以上述べたように、確率分布は伝搬モデルの骨格を成す。良いモデルとは何かを述べることによって、本シリーズの締めとしたい。

得られたデータからその元となる構造を推定する、あるいは、未来に起こることを予測する手法は統計的モデリングと呼ばれる。そのモデリングでは、正確さ（偏りとばらつき）、複雑さ（適用のしやすさやパラメータの数）、物理的意味との整合性などの種々の視点があり、出来具合にも優劣がある。そのようなモデルについて、よさの評価を行う有力な手法として赤池情報量基準（AIC：Akaike Information Criterion）があり、以下の式で表される（詳しいことは［1］の９章に）。

AIC= -2 ×（最大対数尤度）+2 ×（パラメータの数）

AICではこの値が小さいほど良いモデルであると判断する。式中の最大対数尤度は評価したいモデルと実測データとの類似の程度（＝尤度）を表す量で、もちろん、この値は大きいほど良い。そして、この式は、尤度が同程度ならパラメータ数が少ないほうが良いモデルである、というものである。まさに、オッカムのかみそりである。実測データの確率分布への近似においては、1パラメータのレイリー分布よりは2パラメータの仲上m分布が、さらには３パラメータの分布（例えば一般化ガンマ分布）の方が、また、回帰曲線近似では次数の高い方が尤度を高くできるが、それだけではモデルの良さは計れないということである。

尤度とパラメータ数が同じ次元で結ばれている奇跡のような評価式：AICは、赤池弘次（1973）が数理統計理論を駆使して編み出したモデル選択指標のパラダイムである。無線通信、特に自然現象を相手にする電波伝搬においては統計的モデリングが重要であり、良いモデルがシステム設計の高信頼化・効率化に寄与する。上式で表されるAICはモデル評価の基本的考え方においても、評価式そのものものにおいてもシンプルでありながら、応用範囲が極めて広い。AICは評価のエンジンとしてより良いモデル（深層学習やベイズ推定に基づく新しいモデル）を作ることにも役立ち、範とすべきであろう。

本講では、基本的な分布のみを取り上げた。［1］では筆者が研究の過程で出会 った確率分布を総ざらいしているので、モデル作りの際に活用してほしい。

＜参考文献＞
[1]唐沢好男，“電波伝搬モデルの確率分布，”私製本，2023.
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-078_Probability_Distributions.pdf