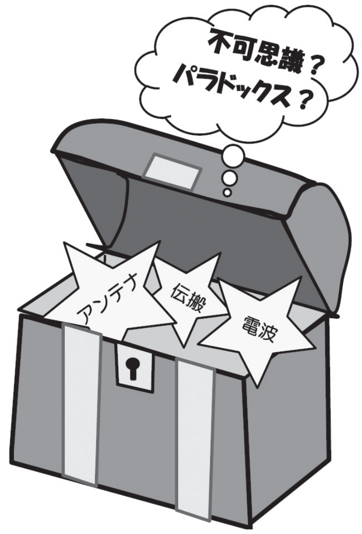
Close Up

電磁気学の不思議探検

第２講
電磁気学を支える相対性理論



電気通信大学名誉教授
唐沢 好男

「電波研究の玉手箱」としてお届けした本誌シリーズの続編として、電波技術の基礎：電磁気学の世界に足を踏み入れ、そこにある不思議を探検するシリーズ。２回目の今回は、電磁気学の中に潜む相対性理論に焦点を当てる。アインシュタインは電磁気学に現れる力学がニュートン力学と微妙に違うことへの洞察によって相対性理論を編み出したと言われている。電磁気学のどこにそれが隠れているのだろう。

電磁気学と相対性理論

電波技術の基礎は電磁気学。電磁気学といえばマクスウェルの方程式。この方程式によって、電磁現象が全て解き明かせると言うのであるからすばらしい。マクスウェルが、1865 年、それまでに積み上げられてきた種々の法則に変位電流の着想を組み入れて作り上げた電磁界理論である。

その 40 年後の 1905 年、アインシュタインは、新たな時代を切り開く力学の理論：（特殊）相対性理論を世に問うた。この論文の邦訳は［1］で読むことができる。論文のタイトルは「動いている物体の電気力学」、そう、電磁気学に対する深い洞察から生まれているのである。相対性理論の誕生は、それまで、万能と考えられていたニュートン力学を根底から見直す物理学の革命をもたらした。

本講の主題である電磁気学にも、電荷に作用する力（ローレンツ力）や荷電粒子の運動など、電気と磁気の力学が含まれている。それなのに、この電磁気学は、その後に吹き荒れた力学の嵐・相対性理論を無傷で乗り越えて、今日まで、綻びのない理論を維持している。その強さはどこにあったのだろう。本講では、この秘密を見てみよう。電磁気学と相対論というと、難しいものの掛け算みたいで敬遠されそう。でも大丈夫、基本的な話のみなので。

物理法則の原則：共変性

電磁気学の屋台骨であるマクスウェルの方程式は、前講で述べたように、電磁誘導など４つの法則をまとめた連立方程式よりなる。「法則」とは、ある物事と他の物事との間に不偏性が認められる関係を言う。物理法則は、観測や実験から帰納されたもの、すなわち、経験則であり、数学的に証明されるものではない。自然界はそのような仕組みになっていると素直に受け入れるしかない。なぜと問うても答えてくれる人はいない。

その物理法則には、ガリレオ以来、一つの要請が課せられている。その要請とは、物理空間内の直線上を一定速度で動くいかなる座標系においても、その関係が不変である（＝物理現象が同じ数式で表される）ことである。この座標系は「慣性系」、この性質は「共変性」と呼ばれる。

図１は慣性系である二つの座標系を示している。慣性系の間では、全てが相対的であってどの慣性系が基準であると言うことはない。図では、便宜上 K 系を静止系、x 軸方向に動く K' 系を移動系としているが、視点をどこに置くかによって、静止か移動かはいかようにも変わる。K 系において、$f(x,y,z,t)=0$ で表される物理法則は、K' 系においても $f(x',y'.z',t')=0$ で表される、と言うことである。

図１の場合、K 系と K' 系の座標の関係は、以下のようであるとするのが自然であろう。

$$x' = x - vt,\ \ y' = y,\ \ z' = z,\ \ t' = t \qquad (1)$$

この変換はガリレイ変換と呼ばれ、ニュートン力学の共変性を保証している。K 系の人が x 軸正方向に速度 v_0 で投げた球は、K' 系の人が見れば v_0-v の速度に見えると言う、素直に納得できる変換である。

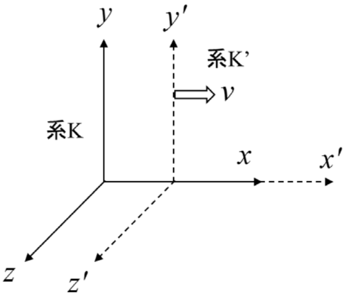


図１　慣性座標系（系Ｋ：静止系；系Ｋ’：移動系）

電磁気学は共変性が成り立たない？

電磁気学の共変性をガリレイ変換を使って調べてみよう。最もシンプルな環境は、静止系（K 系）において電界だけある環境（ケース 1）と磁界だけある環境（ケース 2）である。先ず、電界だけある環境（ケース 1）を見る。図２のような電極が無限に大きな平板コンデンサを考える。① K 系において下の電極には電荷密度 σ［C/m²］で、上の電極には $-\sigma$ で電荷が一様に分布しているとする。②の空間（電極間）には上下の電荷によって電界が y 軸正方向に向き $E_y=\sigma/\varepsilon_0$ であり、磁界は無い。（この後も含めて、電界と磁界の計算はマクスウェルの方程式に因るが、導出方法は気にせず結果だけを見てほしい）。

③これを、K’ 系で見てみよう。①’ そうすると電荷を伴った上下の電極が左方向に速度 v で動いており、下板を電流が単位幅当たり $J=-\sigma v$［A/m］で左側（x 軸負方向）に、上板は反対方向に流れている。④この電流によって z 軸方向に磁界 H_z' が生まれ、$H_z'=J=-\sigma v$ となる。電界は変わらず $E_y'=Ey=\sigma/\varepsilon_0$ である。

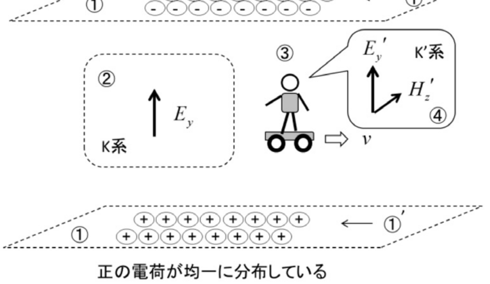


図２　ケース１：Ｋ系において電界のみが存在する環境
（K’ 系の人には、上下の平板が左の方向に動くように見えるので、上と下で反対方向の電流が生まれ、その電流によってＫ系にはなかった磁界も見える）

次に、磁界だけの環境（ケース 2）を考える。図 3 のように、奥行きが十分長い矩形断面の構造物考え、①矩形の平板側面を電流が図の方向に、単位幅当たり J［A/m］で流れている。② K 系において、管内の空間には $H_z=J$ の磁界ができ、電界は無い。③これを K’ 系で見てみよう。④ H_z' は H_z と同じで $H_z'=J$ である。一方、ファラデーの電磁誘導効果で K 系では見えなかった電界が現れ $E_y'=-vJ/(\varepsilon_0 c^2)$ となる（c：光速）。

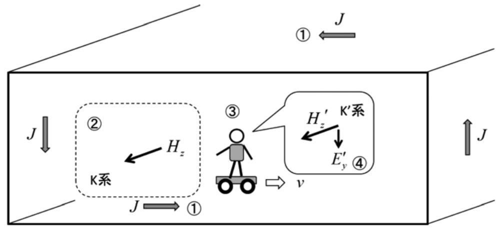


図３　ケース２：Ｋ系において磁界のみが存在する環境
（K’ 系の人には、電磁誘導効果による起電力が感じられ、Ｋ系にはなかった電界も見える）

上記二つの結果をまとめて書くと以下のように整理できる。

$$\begin{pmatrix} E_y' \\ H_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v/c^2 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ H_z \end{pmatrix} \qquad (2)$$

上式は、K’ 系の電磁界を K 系の電磁界で表しているが、系を逆から見れば、移動方向が反対だけの違いなので、v を $-v$ に置き換えて

$$\begin{pmatrix} E_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v/c^2 \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y' \\ H_z' \end{pmatrix} \qquad (3)$$

とならなければならない（立場が違うだけなので式の構造は同じ）。しかし、(3)式を(2)式の右辺に代入すると、行列の積の部分が

$$\begin{pmatrix} 1 & -v/c^2 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v/c^2 \\ v & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \geq 1 \qquad (4)$$

となり、単位行列になるべきところが、$1/\gamma^2$ 倍になっている。K’ 系の動き v が光速 c より十分遅ければ γ は 1 に近似できるとはいえ、厳密な意味では、電磁気学は共変性が満たされていないと言うことになってしまう。それは大変、ニュートン力学を厳密な理論とすれば、電磁気学は近似の理論と言うことになる。電磁気学完成当時はそういう目で見られていた。その立場を逆転させ、厳密性の視点で電磁気学に軍配を上げたのがアインシュタインである。

アインシュタインの慧眼

アインシュタインは、電磁気学にこそ共変性があると考えてみた。もしそうなら、原因は、ガリレイ変換に従って、K系でもK'系でも電荷密度や電流密度は変わらないとしたことにある。もし、両系で値が異なるとして、

$$\sigma' = \gamma\sigma, \quad J' = \gamma J \tag{5}$$

であれば、行列の積の部分は(4)式の $1/\gamma^2$ がなくなって単位行列になり、それなら、共変性が成立する。どういうことだろうか。

$\sigma' = \gamma\sigma$ を考えてみよう。電荷の値そのものは、慣性系に対して不変と言うことが分かっている。と言うことは密度を決める空間の長さが違っていると言うことになる。「K系に対して運動するK'系での長さは、K系では $1/\gamma$ 倍に短縮して観測される」ということである。(これは、ローレンツ短縮と呼ばれる)

次に、$J' = \gamma J$ を考えてみよう。電流は1秒間に通過する電荷の量であるから両系で1秒の長さ（＝時間の進む速さ）が違っていると言うことになる。「K系に対して運動するK'系の時計の読みは、K系の時計の読みの $1/\gamma$ 倍に縮小する（＝動く系の中では時間の進みが遅くなる）」ということである。

この論理が正しいとすれば、図1に示す慣性系の座標変換は、空間と時間が一体になった次式の変換でなければならないのである。

$$\begin{aligned} x' &= \gamma x - \gamma v t,\ y' = y,\ z' = z \\ t' &= -\gamma(v/c^2)x + \gamma t \end{aligned} \tag{6}$$

この変換はローレンツ変換、γ はローレンツ因子、この性質をもつ空間はミンコフスキー空間と呼ばれ、相対性理論を学んだ人にはお馴染みであろう。(注：相対性理論の教科書等では、上記のような電磁気学との結びつきではなく、ミンコフスキー空間の性質 $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$ より(6)式を直接導く解説が多い。)

これを踏まえて、アインシュタインは物理学に対して二つの規範（原理）を提唱した。

❶相対性原理：物理法則は慣性系に対して共変性をもつ（これは従来からある考え方）

❷光速度一定の原理：光の速度は慣性系に因らない一定速度（絶対速度）である。

マクスウェルの方程式を解くと電波の進む速度が求められる。その速度は、$1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$（約30万km/s）となり、光の速度 c と見なして良さそう。さらに、どのような系で見ても、電波の速度は変わることなく c である。故に、従来の原理❶に、新たな原理❷を加えた。これによって❶の原理を満たす座標変換はガリレイ変換（(1)式）でなくローレンツ変換（(6)式）だったのである。相対性理論（特殊相対性理論）には、こういう誕生の歴史がある。この経緯からわかるように、電磁気学、すなわちマクスウェルの方程式には、ローレンツ変換に対する共変性が具備されていて、相対性理論の嵐を無傷で乗り越えることができたのである。別の言い方をすれば、電磁気学がアインシュタインに相対性理論誕生の手掛かりをもたらしたのである。

電磁力学のパラドックス？

電磁気学は間違っている、という話がたまに出る。数では圧倒的に相対論や量子論に対しての方が多いが、電磁気学にもそういう都市伝説がある。これらは、時代と共に消えつつあるのだが、パラドックスに見える現象に対して言われることが多い。代表的な例は、電気と磁気の力学、すなわち、ローレンツ力に関するものである。

電界と磁界が共にある空間において、速度 v で動く電荷 q に作用する力はローレンツ力と呼ばれ、次式で与えられる。

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\mu_0\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} \equiv \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_m \tag{7}$$

電界中にある電荷は電界方向に、磁界中を動く電荷は動く方向とも磁界とも直交する方向（フレミングの左手の法則）に力が働くことを示している。この式も、マクスウェルの方程式同様、ローレンツ変換に対する共変性を有する厳密式である。ここで、図4に示すよう、E_y と H_z が存在する空間を正の電荷 q をもつ荷電粒子が速度 v で x 軸方向に動いている環境を考える。電荷にかかる力は、電場による y 軸方向の力 $F_e=qE_y$ と磁場による y 軸方向の力 $F_m=-q\mu_0vH_z$ の合力 F_e+F_m となる。静止系（K系）において、二つの力の釣り合いがとれていて $F_e+F_m=0$ であるとしよう。電磁界の強さ（E_y と H_z）をそうなるように設定するのである。こうすれば、質量を持つ荷電粒子は、速度 v で、x 軸正方向にまっすぐ進んでゆくであろう。

これを、電荷と同じ速度 v で動くK'系で見てみよう。電荷は止まって見えるので、磁界から受け受ける力 F_m' はなくなっている。一方、電界による力 F_e'

Close Up

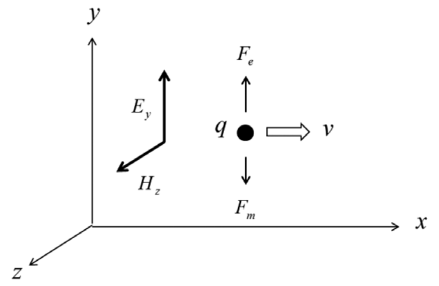


図４　電磁界中を動く電荷に作用するローレンツ力
(F_e=F_m となるよう E_x, H_y を調整すれば、荷電粒子は x 軸正方向に速度 v で定速移動する)

は残っているので、合力０のバランスが崩れｙ軸の正方向に、動き始めるであろう。でもそれは、K系においてｘ軸方向にまっすぐ進む動きとは矛盾することになる。すわ、パラドックスだ、と言う話である。

このパラドックスは、K'系での電磁界を上述のローレンツ変換してみると解消されることが分かる。K系の磁界 H_z を上記条件でローレンツ変換すると、K'系に $-E_y'$ の電界を生み出し、合成電界が０になるのである。これで、K'系では電荷は静止し続け、パラドックスが消えた。めでたしめでたしである。

こんな例もある。図５のように、xy 面上に、原点を中心とする半径 a の円があり、電流 I が流れている。その原点に、正電荷 q が置かれている。q の場所には、ループ電流により z 方向（手前方向）に向く磁界ができているが、電荷は静止しているのでローレンツ力は無く、そのままそこに静止している。一方、これを移動系K'で見るとどうだろう。電荷が磁界中を動いていることになり、磁気力が生まれ、これによって、（上向きの）力を受けるはず。そうするとバランスが崩れて…。でも、当然、そうはならないはずで、ローレンツ変換を使ってしっかり計算してみると、磁気力を打ち消す電界が現れ電磁力のバランスが保たれていると言う結果が得られるのである。

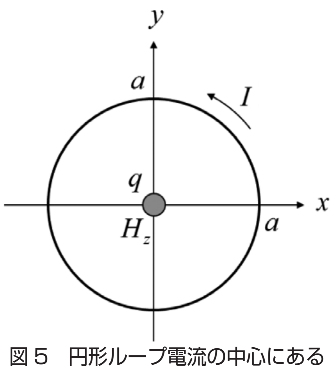


図５　円形ループ電流の中心にある電荷が受ける力

上記二つの例は簡単なケースであり、もっと複雑な構成のパラドックスがいろいろ考えだされている（例えば[2]ではアインシュタインが相対論を生み出すきっかけになったと言われている思考実験（同書の図 13-10）が紹介されている）。その多くは、上述の例のように、移動する観測者から見ると電気力と磁気力のバランスが崩れることに着目してのパラドックスである。そして、その大部分（たぶんほとんどすべて）において、本講で述べたような相対論によって、すなわち、電磁界のローレンツ変換（電界から磁界が、磁界から電界が生まれる変換）によってパラドックスは解消できるはずである。

ここで見てきた例から分かるように、電界と磁界はそれぞれ独立な物理量ではなく、見る人の動きによって様々に変身するものである。ならば、電界と磁界を陰で操っている黒幕を知りたくなりませんか。

ティータイム

電磁気学は砂上の楼閣？

本文では電磁気学の中に潜む危機（共変性の破綻）を相対論が救ったと言う話をした。ここでは、別の危機を量子力学が救う話をしたい。

中学校の理科では、陽子や中性子よりなる原子核の周りを電子が回転していると言う「素朴な原子モデル」を学ぶ。長岡半太郎が 1903 年にアイデアとして唱え、イギリスのラザフォードが 1911 年、アルファ線の散乱実験から導き出した原子モデルである。太陽（＝重い陽子）の周りを回る地球（＝軽い電子）のイメージである。電気引力（クーロン力）と遠心力が等しくなる半径で円運動が持続できる。ところが、マクスウェルの方程式では、荷電粒子が円運動のような加速度運動をするとそこから電磁波が放射され、エネルギーを失った電子はやがて陽子に衝突してしまう。衝突するまでの時間を計算してみると 10^{-11} 秒程度になる。なんと、電子の寿命は一瞬。そんな電子がもつ電気量（電荷）を理論の出発点におく電磁気学は、砂上に楼閣を建てているようなものでは？という心配である。

この窮地を救ったのが、デンマークのボーアである。師と仰ぐラザフォードの原子モデルには何か安定する仕組みがあるはずと確信していたボーアは、思索の果てにある仮説にたどり着いた［3］。1913 年のことである。その仮説とは、「電子の角運動量の大きさがちょうど定数$\hbar$(プランク定数 h を 2π で割ったもの；エイチバー）の整数倍のときだけ、電子は安定した軌道を保っていられる」である。当時としては突拍子も無い仮説であったが、後に量子力学の基盤を確たるものにしたシュレーディンガーの波動方程式（1926 年）から導かれる結果と一致するのである。すなわち、ボーアの仮説は、量子力学的に正しかったのである。波動方程式からの解釈では、電子を波動（量子）と見るとき、周方向１周分に対して定在波の状態になっていて、この定在波状態が維持できる波動のみが安定に存在できる、ということである。素朴な電子モデル自体に問題があったと言うことになり、量子力学が電磁気学の土台を支えてくれていたのである。

＜参考文献＞
[1] 内山龍雄（訳・解説）, アインシュタイン 相対性理論 , 岩波文庫 , 1988.
[2] ファインマン他（宮島龍興訳）, ファインマン物理学 III, 電磁気学 , 岩波書店 , 1969.
[3] マンジット・クマール（青木薫訳）, 量子革命 , 新潮文庫 , 2017.（文庫本 700 頁の大作。量子力学誕生から完成までの歴史物語で、主要な登場人物に焦点を絞って深く掘り下げている。