Close Up

電磁気学の不思議探検
第５講
ベクトルポテンシャル：透明人間の正体

電気通信大学名誉教授
唐沢 好男

本シリーズでは、電波技術の基礎：電磁気学の世界に足を踏み入れ、そこに見え隠れする不思議を探検している。本講では、ベクトルポテンシャルに着目。電場や磁場と違って、その存在を検知できる電磁手段が何もない。それゆえ、居るのかいないのかわからない透明人間みたいなものである。そのベクトルポテンシャル、量子力学ではゲージ場と呼ばれて重要な働きをしているのに、電磁気学では脇役もいいところ。でも、実は、電磁界を陰で操るボスなのである。

消された物理量

本講では電磁界の中に充満する霊気みたいな場「ベクトルポテンシャル」を取り上げる。このベクトルポテンシャルはかなり地味、誰にも気づかれずに存在する透明人間である。物理量として認められるためには、観測にかかる（＝見える）ことが大事である。そこに電気があればランプが光る、磁気があれば鉄が吸い寄せられる、このようにして電気（電界）や磁気（磁界）の存在が意識される。ところが、ベクトルポテンシャルに反応するものは何もない。何もないというのは実は嘘で、量子力学の世界では、波動状態にある電子の位相に作用する（アハラノフ・ボーム効果と呼ばれる）ので、存在することは確か。ゆえに、その透明人間ぶりは、電磁気学の世界においてはという条件付になる。

マクスウェルが電磁気学の数理モデルを立てたとき（1865年）、ベクトルポテンシャルは電流が空間につくる緊張状態（電磁運動量と呼んだ）として連立方程式の中に組み入れられていた。ところが、後にこの方程式を整理したヘヴィサイドにより、不要なものとして消されてしまったのである（1885年）。ヘヴィサイドは、電磁気学は電気力と磁力に帰すと考え、電磁場を表す電界$\boldsymbol{E}$、磁界$\boldsymbol{H}$、電束密度（電気力線の濃度）$\boldsymbol{D}$、磁束密度（磁力線の濃度）$\boldsymbol{B}$の関係を与える４つベクトル連立方程式（今日、マクスウェルの方程式と呼ばれている以下の❶～❹：第１講参照）に作り直したのである。「マクスウェルの論文には、華々しい襲撃の残骸や、野営の塹壕や、戦いの後が累々。ヘヴィサイドはこれを除去し、直接のルートを開き、広い道を作り、国のかなりの部分を探検した。」と評されている[1]。まさにその通り、ヘヴィサイドに感謝である。

【ヘヴィサイドが整えたマクスウェルの方程式】

❶ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{D}=\rho$ （電場に関するガウスの法則）

❷ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0$ （磁場に関するガウスの法則）

❸ $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ （アンペア・マクスウェルの法則）

❹ $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ （電磁誘導の法則）

電気的な場を表す電界$\boldsymbol{E}$と電束密度$\boldsymbol{D}$は、誘電率ε（真空中ではε_0）を介して$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$で、また、磁気的な場を表す磁界$\boldsymbol{H}$と磁束密度$\boldsymbol{B}$は、透磁率$\mu$（真空中では$\mu_0$）を介して$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$で結ばれる。それゆえ、以下の説明で磁場の代表として$\boldsymbol{B}$を多用し、それを磁界と呼ぶことがあるが、広義の意味と理解してほしい。

では、ベクトルポテンシャルは本当に不要だったのだろうか。

ベクトルポテンシャルとは

磁場は磁力線が張り巡らされた空間を言うが、その磁力線には出発点がない。どれも必ずループになって閉じているのである。これを式で表すと❷になり、「磁場には湧き出し（div：発散（divergence））がない」の意味になる。この磁束密度$\boldsymbol{B}$を、別の物理量$\boldsymbol{A}$を用いて次式で表してみよう。

❺ $\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$

演算記号rotは回転（rotation）を検知する空間微分で、場$\boldsymbol{A}$に捻れがあるときにその強さを表す。数

学公式により div rot $\boldsymbol{A}$ はベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の如何によらず（恒等的に）0となるため、div $\boldsymbol{B}$ は常に0になり、❺は❷を代理する式になる。このようにして与えられるベクトル関数 $\boldsymbol{A}$（単位：Tm（テスラ×メートル））が、今回の主役、ベクトルポテンシャルである。❺は「磁場はベクトルポテンシャルの空間的捻れ」と読めそうであるが、これでは、何のことかは分からないであろう。以下、その正体を少しずつ解き明かしてゆきたい。

ベクトルポテンシャルは電流に寄り添う

高校の物理では、電流 I の周りに渦状の磁界 $\boldsymbol{H}$ が生まれる、と習う。電流から距離 r にある円周上での磁界の大きさ H は $I/(2\pi r)$ であり、これをアンペアの法則と呼ぶ。❸式の一部、すなわち、❸' rot $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}$ から導かれる。しかし、電流と磁界の関係がずいぶん唐突と感じないだろうか。風が吹くと桶屋が儲かる、のような。その隙間を埋めてくれるのがベクトルポテンシャルである。詳しい説明は省くが、❸'と❺より、ベクトルポテンシャルは、電流と同じ向きに、電流のそばでは強く、離れると弱くなるように、電流に寄り添う場を作っている。図1はこのイメージを描いている。

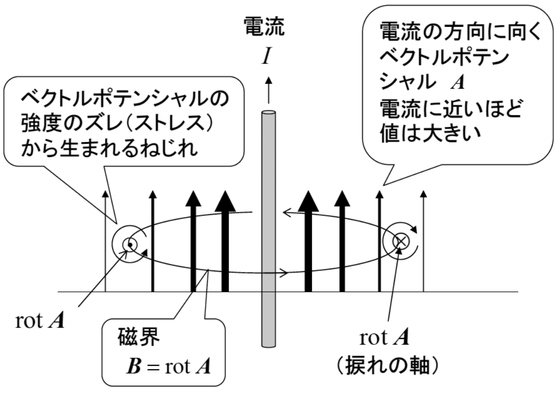


図1　電流に寄り添うように生まれるベクトルポテンシャル、その強度のストレスが磁界を生む

図をよく見てみよう。ベクトルポテンシャルは同じ向きながら、隣と少しずつ強度が違っている。と言うことは、この空間にはねじれ（ストレス）が存在していると言うことになる。ここに指を挟めば、ひねられるような。❺はこのストレス（回転力）こそが磁界だといっているのである。回転軸方向を辿ると、図のように電流を取り巻くループになる。このようにして磁界の渦が生まれている。“電流→磁界（アンペアの法則）”で抱いた唐突さが、“電流→ベクトルポテンシャル（電流に寄り添うように発生し空間にストレスを作る）→磁界（ストレスが捩れを生み、捩れの軸方向に磁界ができる）と見ることにより、幾分緩和されたのではないだろうか。まとめると、ベクトルポテンシャルは、1）電流に寄り添うような場であり、2）そのストレス（捻れ）から磁界がうまれる、ということになる。

マクスウェル方程式の解

電磁気学には、スカラーポテンシャル ϕ と呼ばれるもう一つのポテンシャルがある。スカラーポテンシャルは、空間の電位（あるいは電圧）を表し、単位はボルトである。電位 ϕ_1 の地点から電位 ϕ_2 の地点に電荷 q を動かすには $q(\phi_2-\phi_1)$ の仕事（＝エネルギー）が必要であり、ゆえに、力学由来のポテンシャルと言う名前が充てられている。スカラーポテンシャルが電界中の電荷に対する力学量に対し、ベクトルポテンシャルは磁界中の電流素片に対する力学量になる。二つのポテンシャル（ϕ と $\boldsymbol{A}$）をまとめて電磁ポテンシャルと呼ぶ。

マクスウェルの方程式❶～❹の電磁界を解いて、電磁ポテンシャルで表すと以下の形になる（と思ってほしい）。

❻ $$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

❺ $$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$$ （再掲）

この式から、電界 $\boldsymbol{E}$ と磁界 $\boldsymbol{B}$ は、電磁ポテンシャル ϕ と $\boldsymbol{A}$ が分かれば、微分演算（$\partial/\partial t$（時間微分），grad（勾配），rot（回転））によって求められるということになる。（$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$）を求めたいなら、（$\phi, \boldsymbol{A}$）を求めれば良いということである。

脇役の宿命：ゲージ場

❺、❻式は、時空間領域の偏微分方程式であるので、（$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$）を定める（$\phi, \boldsymbol{A}$）の組は、積分定数（＝微分すると消えてしまうもの）に由来して一意には定まらず、無限に存在する。電磁界問題では、（$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$）が求めたいもの（＝主役）になり、（$\phi, \boldsymbol{A}$）はそれを求めるための補助的な場（＝脇役）と言う位置づけになる。（$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$）が正しく求められるのであれば、すなわち、❺、❻式を満たすものであれば（$\phi, \boldsymbol{A}$）の組は何でもよいのである。それなら、（$\phi, \boldsymbol{A}$）を定める際、式が簡

単になる等、都合の良い形のものを勝手に選んでよいと言う考えに行き着く。($\phi, \boldsymbol{A}$) と ($\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$) が一対一対応できるよう ($\phi, \boldsymbol{A}$) に条件をつけて一つの形を選ぶことをゲージ（物差し）を固定すると言う。そしてこのように決まるポテンシャルの場をゲージ場と呼ぶ。電磁気学では、ローレンツゲージと呼ばれる条件式が採用される（式は図２中に）。このゲージにより、ϕ は電荷密度 ρ から、$\boldsymbol{A}$ は電流密度 $\boldsymbol{i}$ から得られると言う見通しの良い形になるからである。

❼ $\Box\phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad \phi(\rho) = \int_{V'} f_\phi(\rho)dV'$

❽ $\Box\boldsymbol{A} = -\mu\boldsymbol{i} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{i}) = \int_{V'} f_A(\boldsymbol{i})dV'$

式中の□はダランベルシアンと呼ばれる時空間領域の２階微分演算子である（式省略）。マクスウェルの方程式である４つの連立方程式が、上記左側２式とローレンツゲージの条件式、計三つの連立方程式に置きかえられたのであるが、❼、❽に見られるように双対性に優れた美しい形になっている。電磁ポテンシャル（ゲージ場）こそが本質的な物理量、と言われる所以である。

❼、❽の左側式は数学的に解けて、右側式のように $\phi(\rho)$、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{i})$ の形で与えられる。特に $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{i})$ は、アンテナの放射電磁界を求めるに際して、アンテナ上の電流分布 ($\boldsymbol{i}$) →ベクトルポテンシャル ($\boldsymbol{A}$) →放射電磁界 ($\boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}$) と手順を踏んで求めることができ、ベクトルポテンシャルの有用性が発揮される。図２は電磁界の発生源 ($\rho, \boldsymbol{i}$)、電磁ポテンシャル ($\phi, \boldsymbol{A}$)、電磁界 ($\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$) の関係を示している。電磁気学の景色として眺めてほしい。

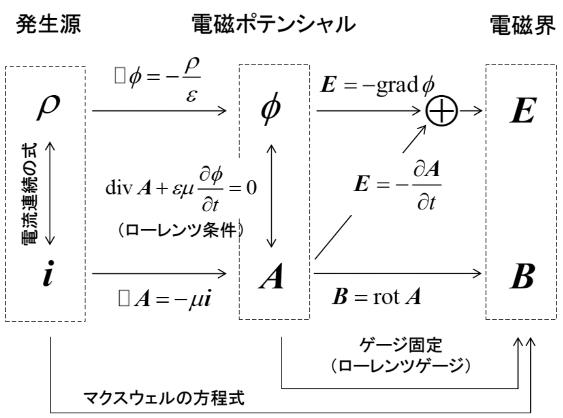


図２　電磁界の発生源 ($\rho, \boldsymbol{i}$)、電磁ポテンシャル ($\phi, \boldsymbol{A}$)、電磁界 ($\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$) の関係

電磁界の支配者：親と子

電波の伝搬（自由空間での平面波の伝搬）に対するベクトルポテンシャルの役割を見てゆこう。電磁気学では、電界の時間的変化が空間に渦状の磁界を生み（変位電流：❸式右辺第２項)、磁界の時間変化が渦状の電界を生み（電磁誘導：❹式)、この電界と磁界が相互に技を掛けあうようにして伝わってゆくイメージを学ぶ。マクスウェルの方程式から、その解（の一つ）として、z 軸の正方向に光速 c で進む角周波数 w の平面波（電界 $\boldsymbol{E}$ の振動方向を x 軸に、磁界 $\boldsymbol{H}$ の振動方向を y 軸にとる）が得られ、それぞれの成分 E_x, H_y は次式で表される。

$$E_x = E_0 \sin\{\omega(t - z/c)\}$$

$$H_y = H_0 \sin\{\omega(t - z/c)\} = E_x / Z_0$$

電界と磁界の大きさの比 $Z_0 (=E_0/H_0)$ は自由空間の特性インピーダンスと呼ばれ、377 Ωになる。電磁気学の授業では、ここまでを学んでいると思う。

この電磁波伝搬をベクトルポテンシャルの視点で見てみよう。真空中なので❽左側式で $\boldsymbol{i}=0$ と置き、それを解くと、電界や磁界と同様、横波（＝進行方向と直角方向に振動面をもつ）として、以下の形が得られる（と思ってほしい)。

$$A_x = A_0 \cos\{\omega(t - z/c)\}$$

空間にこのようなベクトルポテンシャルの波動があると、❺、❻式（ただし、$\mathrm{grad}\,\phi = 0$）により、この波動は以下の形の電界と磁界（先に示した式と同形）を生み出している。

$$E_x = -\frac{\partial A_x}{\partial t} = E_0 \sin\{\omega(t - z/c)\}$$

$$H_y = \frac{1}{\mu_0}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_y = H_0 \sin\{\omega(t - z/c)\}$$

$$(E_0 = \omega A_0,\ H_0 = E_0 / Z_0)$$

このように表してみると、電界はベクトルポテンシャルの時間微分が、磁界は空間微分（回転）が現れているだけである。ベクトルポテンシャルを親、電界と磁界を親から生まれた双子と見ると、親が子供の性質を決めていて、子供同士で技を掛けあうような相互

作用はない、と言うようにも見えてくる。やはり、電磁界の親分はベクトルポテンシャルなのだという気持ちが強まったことと思う。図3は空間軸に対する（すなわち時間を $t=0$ に固定したときの）ベクトルポテンシャルと電界と磁界の波形を示している。また、図4はこの三者の働きをまとめている。

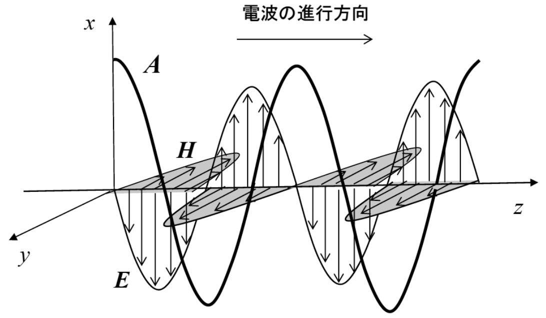
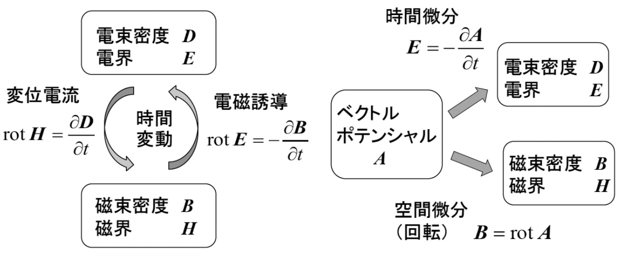


図３　平面波伝搬の描像（ベクトルポテンシャルの時間微分が電界を、空間微分が磁界を作る）



(a) 電界と磁界の相互作用（❸と❹）

(b) ベクトルポテンシャルが生み出す電界と磁界（❺と❻）

図４　電磁波伝搬に見る電界・磁界・ベクトルポテンシャルの関係

電磁誘導の法則再考

前講「ファラデーに学ぶ電磁誘導の法則」の続きを述べたい。ファラデーは電磁誘導発見をまとめた1831年の論文の中で「誘導起電力は、導線が磁力線を切るとき発生する」と見抜き、自らそれを法則と呼んだ。現在の電磁気学においては、電磁誘導は電界 $\boldsymbol{E}$ と磁界 $\boldsymbol{B}$ による場の関係式❹で与えられ、磁力線の動きで説明されることはない。故に、以下の説明は余興と思ってほしい。

磁場を非常に細い無数の磁力線が密に張り巡らされている場としよう。その中の一本の磁力線に着目し、その磁束の大きさを ϕ_{m0} と置く。❺式から数学的（＝ストークスの定理）に導かれるように、磁力線の周囲はベクトルポテンシャルの渦が取り巻いている（図5）。この磁力線を任意の閉曲線（ループ）c で囲み、その線上のベクトルポテンシャルの経路方向成分を A_{s0} とすると、経路一周分の線積分（周回積分：積分記号に○を付けて表記）は、磁力線の場所によらず ϕ_{m0} になる。一方、磁力線がループの外側にあるときはこの周回積分値は0になる。まとめると

$$\oint_c A_{s0}\,ds = \begin{cases} \Phi_{m0} & \text{（磁力線がループ内にある）} \\ 0 & \text{（磁力線がループ外にある）} \end{cases}$$

さらに、導線の位置に生まれる誘導電界の経路方向成分を E_{s0} とすると、起電力 V_0 は電界成分 E_{s0} の周回積分で得られ、かつ、その電界とベクトルポテンシャルの関係は❻（ただし grad $\phi=0$）であるので、以下のように表される。

$$V_0 = \oint_c E_{s0}\,ds = -\oint_c \frac{\partial A_{s0}}{\partial t}\,ds = -\frac{d}{dt}\oint_c A_{s0}\,ds$$

空間積分と時間微分の順序を入れ替えた上式最終辺中の周回積分は、ループが磁力線を切ったとき（＝図の☆に来たとき）、すなわち、磁力線がループの外に出る、あるいは入るときに値が変わるので、その微分値、すなわち、起電力 V_0 は、この瞬間だけ値をもつ。定量的にはさらに詰めが必要であるが、ベクトルポテンシャルの働きとして見れば、ファラデーの説明に納得ゆくであろう。ファラデーの慧眼、さすがである。

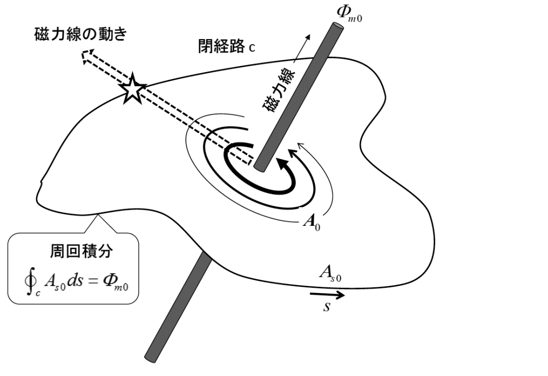


図５　誘導起電力（導線が磁力線を切るとき（☆）に生まれる）の説明図（無数に敷き詰められた磁力線の一本に着目）

本講の最後で、電磁誘導の法則におけるベクトルポテンシャルの働きを見たが、次講では、ベクトルポテンシャル視点で、変位電流と磁界の関係を見てみたい。「変位電流は磁界を作らない」って本当だろうか。

<参考文献>
[1N. Forbes, B. Mahon（米沢富美子他訳）, 物理学を変えた二人の男：ファラデー , マクスウェル , 場の発見 , 岩波書店 ,p. 241, 2016.