

電磁気学の不思議探検

第6講

変位電流は磁界を作らないって本当？

電気通信大学名誉教授
唐沢 好男

本シリーズでは、電波技術の基礎、電磁気学の世界に足を踏み入れ、そこに見え隠れする不思議を探検している。第6回は、マクスウェルの電磁気学構築最後のピースとなった変位電流に着目。導体中を流れる電流（伝導電流）と真空中を流れる変位電流が力を合わせて磁界を作り出すイメージを我々に与えてくれる。一方、変位電流は磁界を作らないと明言する教科書もあり、電磁気学教育の現場に混乱をもたらしているとも聞く。どうなっているのだろう。



電磁気学教育現場での混乱

電磁気学の教科書として定評がある太田浩一先生の本[1]、その本の電磁場の説明の中に、「変位電流は磁界を作らない」という項がある。あれっと思わないだろうか。マクスウェルは、それまでに発見されてきた電磁気の法則（アンペアの法則やファラデーの電磁誘導の法則）を数理モデルに仕立て、解いてみても、満足する結果にならなかった。その思考の過程において変位電流（空間を流れる電流：後で説明）に気づき、それを含めることによって電磁気学が完成した。導体を流れる電流（伝導電流）が磁界を作ることはよく知られており、この変位電流の働きも伝導電流と同じと主張している。ならば、変位電流も磁界を作って当然と思うだろう。それなのに…、である。このことが、電磁気学教育の現場に混乱をもたらしているようで、さまざまな解説記事が出ている（その代表が[2]）。本講ではこの問題を考えてみよう。

となり、アンペアの法則と呼ばれる。式中の rot は場に捩れ（回転:rotation）があるとき値を持つ空間微分、 i は電流密度（単位： A/m^2 ）である。ここで言う電流は導体を流れる電流であり、後の変位電流と区別して、伝導電流と呼ぶ。伝導電流は磁界を作るとしてほしい。

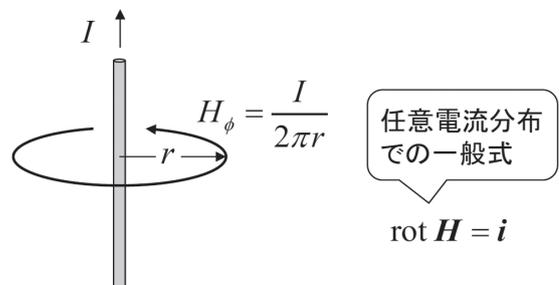


図1 導線に流れる電流が磁界を作る（アンペアの法則）

電流と磁界

高校の物理で学んだように、電流 I （単位：A（アンペア））が流れる導線の周囲には渦状の磁界 H （ A/m ）が生まれ、無限に長い直線状導線の場合、その大きさは $H_\phi = I / (2\pi r)$ （ r :導線からの距離）である（図1）。さらに、電磁気学の授業では、磁界は電流素片が生み出す微弱磁界の重ね合わせ（=積分）になるというビオ・サバルの法則を学ぶ。これを一般化して微分方程式で表すと

$$\textcircled{1} \quad \text{rot } H = i$$

変位電流とは

微分方程式 $\textcircled{1}$ は数学的に（=ストークスの定理を使って）積分形に書き換えられ、次式になる。

$$\textcircled{1}' \quad \oint_C H_s ds = \int_S i \cdot ndS$$

3次元空間内に任意の閉路（ループ）をつくり、これを経路 c （線素 ds ）とする。 H_s は磁界の経路方向成分である。この経路を縁とする任意の面を S とする。経路を固定したとき、面 S 自体はどのような形もとれ、そのどれに対しても周回積分値（ $\textcircled{1}'$ 式の左辺）は変

わらない、と言うところが味噌である。

では、図2の構成による充電中のコンデンサ（電流 I が常に流し込まれている）の周回積分値を見てみよう。経路を導線を中心とする円形にとり、その平面を S_0 とする。このときの磁界の周回積分値は同式右辺から求められて I である。この値は、面がどうなっているかは経路上の磁界には関係ないことなのだから、図に示す S_1 でも変わらないはずである。ところが、ちょうどコンデンサの極板間を通る S_1 では、面を貫通する電流がないため、①' 式右辺は 0 になる。これは等式の破綻である。確かに、コンデンサの極板間は電荷の移動がないので伝導電流は流れていないが、何かそれに代わるものがないのだろうか。よく見るとそこは電束密度（電気力線の密度） D が時間と共に大きくなっている。この時間微分値 $\partial D / \partial t$ の単位は A/m^2 なので、伝導電流の密度 i の単位と同じである。これを、新たな電流密度として、 $\partial D / \partial t \rightarrow i_d$ 、 $i \rightarrow i + i_d$ と置けば、①' 式の破綻がなくなる。このようにして見出された電流 i_d が変位電流である。変位電流は電荷の移動を伴わず、真空中を流れる電流であり、伝導電流が途中で切れても、それを連続的につなげる働きを持つ。マクスウェルは①式を以下の式に置き換え、電磁気学を完成させたのである。

$$\textcircled{2} \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} + \mathbf{i}_d, \quad \mathbf{i}_d \equiv \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

式②の形からも明らかなように、伝導電流と変位電流は対等であり、両者が力を合わせて磁界を作っていると読める。伝導電流は磁界を作るのであるから、変位電流も磁界を作ると考えるのは、至極当然である。

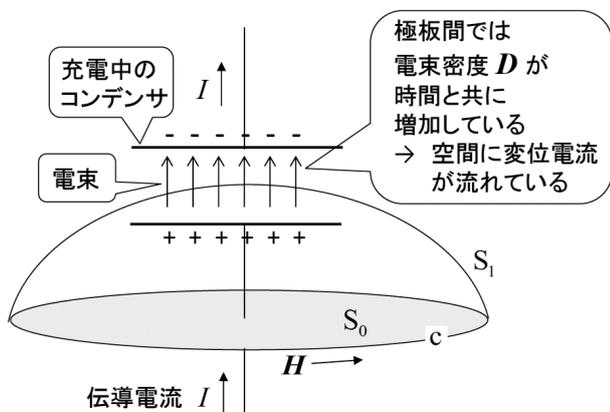


図2 コンデンサ充電中の電流と磁界の関係
(コンデンサの極板間には電荷の移動は無いので伝導電流は流れていないが、そこを埋めるものとして変位電流が空間を流れ、全体を電流が連続して流れていると考える)

☞ 変位電流は磁界を作らない

では、「変位電流は磁界を作らない」は、どこからそういう話になってくるのであろう。その根拠をいくつかの例で示したい。

< ビオ・サバールの法則 >

図3のように、 z 軸上の $-\infty$ から 0 まで電流 I が流れている場合を考える。 $z=0$ の原点から距離 a の位置にある点 P の磁界は前述のビオ・サバールの法則を使って求められ、 $H_\phi = I / (4\pi a)$ になる。

しかし、この設定は $z=0$ でいきなり電流が 0 になってしまうので、端点においては、時間 t と共に電荷 Q が $Q=It$ ($t>0$) で、どんどん溜まってゆくことになる。そうするとこの電荷により放射状に存在する電束の密度 D が時間とともに増えてゆく。ゆえに、②式により、 $z=0$ の端点から変位電流が放射状に流れ出ていることになる。そうするとこの変位電流によって生まれる磁界があるはずである。しかし、一点から角度的に均一に放射状に流れる電流からは磁界が生まれず（=計算してみると 0 になる）ことが分かり、このケースでは変位電流による磁界は無い。でも、変位電流から磁界を求めたら、偶然 0 になっただけなのであるから、変位電流は磁界を作らない、が普遍的な意味にはならないだろうと読者は思うであろう。

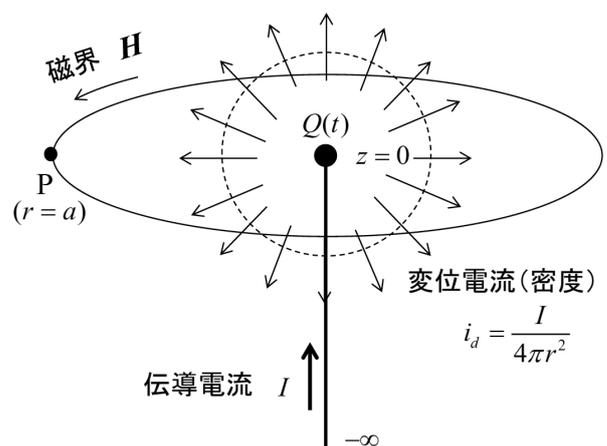


図3 半無限長直線導線に電流が流れている場合
(導線の先端に電荷が溜まり続け、そこから変位電流が放射状に流れ出ている)

では、図4に示す一般的なコンデンサ回路を考えてみよう。コンデンサの左側の極板には伝導電流 I が流れ込んでいる。流れ込んだ電流は極板の縁で 0 になるように弱くなりながら極板上を広がってゆく。この過程において、極板上に均一に電荷が蓄積され、かつ時

間と共に増加してゆく。ゆえに、そこから変位電流が流れだし、空間全体に広がってゆく。変位電流が極板間を平行に流れると言うような近似を入れて磁界をもとめることは可能であるが、これを厳密に解くことは非常に難しい。

しかし、次のようには言えるのである。導線や極板上の伝導電流をビオ・サバルの式に入れて磁界を求めることができる。変位電流は極板上の部分部分から生まれている。微細に見れば、点から生まれている電流の集合である。図3で述べたように点から生まれて均一に空間に広がる電流は磁界を作らない。作らないものの集まりなのだから、全体としても作らない。故に、この場合も変位電流は磁界を作らない、と結論して良さそうに見える。

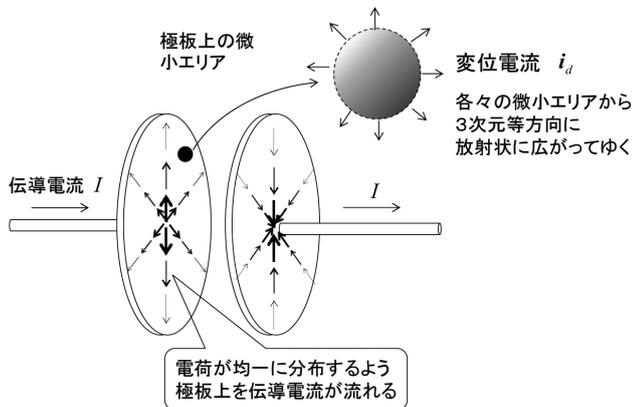


図4 平板コンデンサ充電時の伝導電流と変位電流の関係

<マクスウェルの方程式の解>

では、真打、マクスウェルの方程式に聞いてみよう。自由空間において、磁束密度 B はベクトルポテンシャル A を用いて次式で表される（前講参照）。

$$B = \text{rot } A \quad (\text{または } H = \frac{1}{\mu} \text{rot } A)$$

そのベクトルポテンシャルは伝導電流密度で与えられる関数を電流が存在する空間 V' 全体に亘って積分することによって、次式で与えられる。

$$A = \int_{V'} f_A(\mathbf{i}) dV'$$

関数 f_A の式形を与えていないが、具体的に計算可能な式が得られている。これから言えることは、伝導電流が存在する電磁環境の全体で見ると磁界は伝導電流から生まれ、変位電流を考慮する必要は無い、ということになる。

論点整理

上記議論を整理すると

- ① 伝導電流も変位電流も電流の働きと言う点では対等である
- ② ゆえに、伝導電流も変位電流も磁界を作る
- ③ ただし、変位電流が作る磁界は部分部分の寄与を全部足すと消えてしまう
- ④ ゆえに、変位電流は磁界を作らない（= 変位電流が作った磁界は生き残らない）

ということになる。

平面波のように、伝導電流がない空間を飛んでいるような波動の磁界は周囲に存在する変位電流（= 電界の時間変動）が作っていると解釈できるが、その場合であっても、電磁波の発生源（例えばアンテナ）にまで立ち返って、そこに流れている伝導電流の効果をきちっと計算すれば、それだけで求められるということである。

図5は、これまでの議論をまとめている。変位電流全体が作る磁界は打ち消されて0になるが、一部を使って磁界を求める場合には、その部分の変位電流が作る磁界も含めなければならない、ということである。先にも述べたが、大事なことなので繰り返すと、「磁界を求めるに際し、変位電流を考慮すると2重加算になっていけないという意味ではなく、本来ならば変位電流を含んだ電流全体で考えなければいけないのであるが、考慮しても変位電流からの寄与は打ち消されて0になり、伝導電流だけ考えれば十分である」と言う意味である。

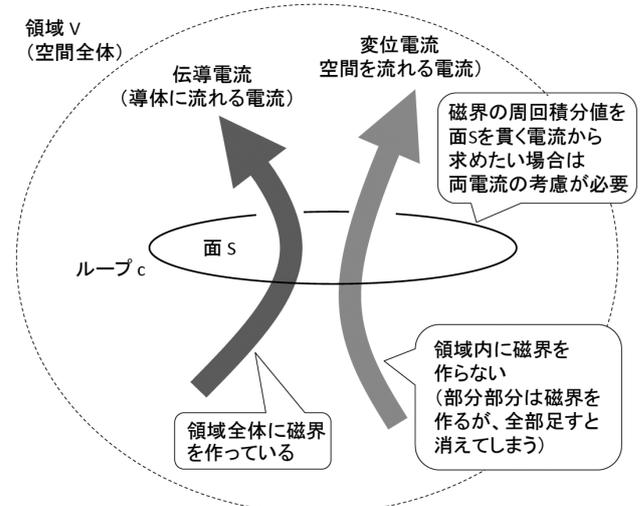


図5 電流と磁界の関係（まとめ）

磁界の周回積分値 (①' 式左辺) のように、空間の一部の情報 (経路を縁とする面上を貫く電流) から求める場合は、伝導電流と変位電流の両方を用いなければいけないことは既に述べたとおりである。その場合でも、両電流の磁界生成寄与比率は面の取り方によって違うため、何が磁界を作っているかという原因探しの議論にはならないのである。

図6は、ここまで行ってきた議論 (前講で述べた電磁ポテンシャルを含む) に基づき、電磁気学の全体構造をまとめている [3]。この図を用いて、因果関係と相互関係や変位電流の位置づけを整理してみたい。

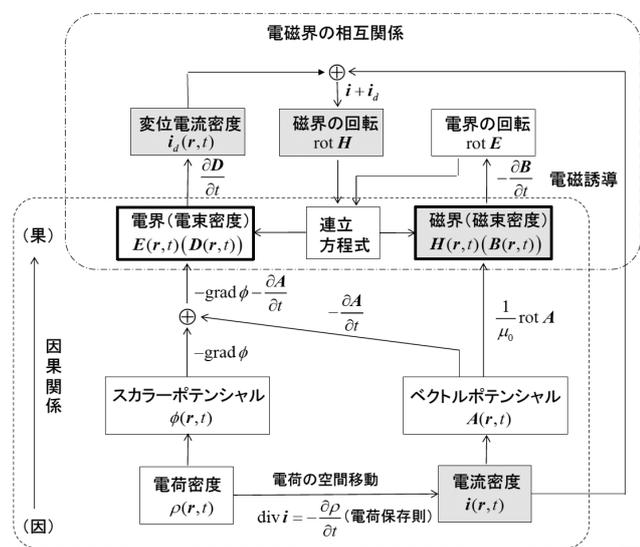


図6 電磁気学の仕組み (因果関係と相互関係)

同図の下半分、点線で囲った部分は、原因と結果の関係を示している。「桶屋が儲かる」理由が、「風が吹くから」なのか、「鼠がいなくなるから」なのかは、視点の置き場所によって何とでも言え、原因追及がはぐらかされてしまうのは世の常である。図6の点線枠内の矢印の向きを見たとき、磁界をつくるのは伝導電流 (電流密度 i) であるというのは納得できるであろう。もっと根本は電荷 (電荷密度 ρ) であると言ってもよいし、近いところでは、ベクトルポテンシャルだと言ってもよいのであるが、変位電流が名乗りをあげることは無い。

次に、同図の上部、一点鎖線で囲まれた部分を見てみよう。この部分は関係が複雑に入り組んでおり、因果関係でなく相互関係というのが良いであろう。この部分が、まさに、マクスウェルの方程式が表す物理法則で、電界と磁界の関係を定めている。この部分から

は、電界が磁界を作っている、あるいはその逆に、磁界が電界を作っているとも言えるが、原因と結果と言うよりも相互作用である。その目で見れば、お互いがお互いに関係しているのであるから、その役者の一人である変位電流だって、自分は磁界を作っていると言っても別に不合理ではない。しかし変位電流の意義は、そういう議論とは関係なく、電磁界が持つ4つの性質 (電界と磁界それぞれの発散 (div) と回転 (rot)) を表すのに不可欠な存在であるということである。因果関係と違って、相互関係の中で、何が何を作っていると言う原因探しをすると、電界 (その一つの形が変位電流) が磁界を作る、磁界が電界を作る、ゆえに電界が電界を作ると言うようなことになって、話がおかしくなるのである。虎が互いの尾を噛み合っている様子をぐるぐる回っている様を見て、因果関係を議論するから混乱を招いているのではないだろうか。

ティータイム



変位磁流は電界を生むか

本講のテーマは「変位電流は磁界を生むか」であった。結論としては、磁界を作るのは伝導電流、さらには、その遺伝子をすべて引き継いだベクトルポテンシャルであって、変位電流ではない (= 変位電流は磁界を作らない)、ということであった。では、もう一度、図6を見てほしい。 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ を変位電流と呼んで、磁界との関係を議論したわけである。電界と磁界の双対性を考えれば、 $-\partial \mathbf{B} / \partial t$ を変位磁流と呼んで、「変位磁流は電界を生むか」を考えてみたい気になる。同じように考察すれば、電界も図6から電荷と伝導電流によって生まれているので、「変位磁流は電界を生まない」が正解になる。

しかし、勝手につけた呼び名の変位磁流を元に戻して、磁界の時間変化量と読み替れば、「磁界の時間変化は電界を作らない」と言っているわけである。これって、電磁誘導の法則を真っ向から否定しているように聞こえないだろうか。

<参考文献>

- [1] 太田浩一, 電磁気学の基礎 I, 東京大学出版会, 2012. (変位電流の話題は11.5節に)
- [2] 北野正雄, 変位電流をめぐる混乱について, 大学の物理教育, vol. 27, no. 1, 2021. http://kir018304.kir.jp/nc/htdocs/?action=common_download_main&upload_id=197
- [3] 唐沢好男, 謎解き電磁気学 (8章 変位電流), ネット公開私製本 http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/EM_Wonderland_Chap_8.pdf