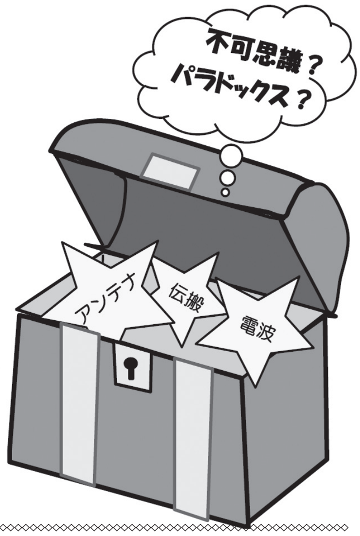
Close Up

電磁気学の不思議探検

第７講
電波送受信のからくり



電気通信大学名誉教授
唐沢 好男

電磁気学の応用にあたる無線情報伝送の基礎部分、すなわち、電波による信号の送受信の仕組みを探る。受信電力を簡易に算定する方法にフリスの伝達公式があるが、電磁気学を離れたところで組み立てられている印象を持つ。しかし、無線装置と空間のインターフェース役を担うアンテナが重要な働きを持ち、その根底を電磁気学が支えている。ここでは、フリスの伝達公式を核として、その周辺に現れる不思議に焦点を当てたい。

アンテナの特性：利得と実効面積

本講は電磁気学の応用編、無線伝送の基本式：フリスの伝達公式を取り上げる。この公式の理解には、アンテナの利得と実効面積が鍵となるため、最初にこの説明を行う。

アンテナ利得については、送信アンテナが説明しやすい。アンテナ利得の定義は、送信点から十分遠方の地点における実際の電力密度と、全方向均一に放射されたときの電力密度の比 G_t で定義される。アンテナそのものに増幅機能はないが、等方性放射（無指向性アンテナ：G_t =1）に比べて、アンテナビームが向いている方向では値が１以上になるので利得と呼ばれる。

一方、実効面積は受信アンテナの概念であり、平面波が存在する場所にアンテナを置いたときの受信電力 P_r［単位：W（ワット）］とその場所の電力密度 p_0［W/m^2］の比 P_r/ p_0［m^2］で定義される。実効面積 A_r は、電波を掬い取る空間的広がり（面積）を表す。

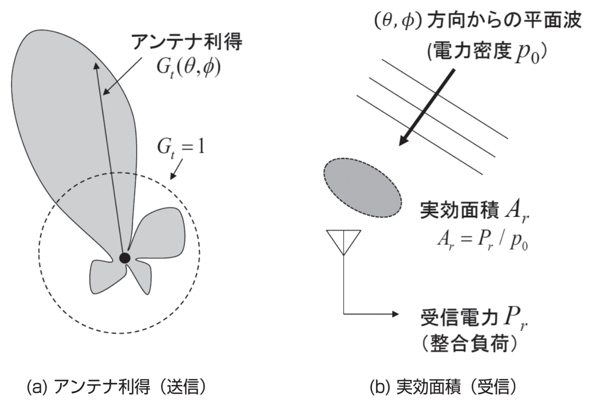


図１　アンテナの送受信性能

図１はこれを説明したものである。受信アンテナの利得 G_r と送信アンテナの実効面積 A_t もそれぞれに定義されている。同じアンテナを送信に用いる場合と受信に用いる場合の性能は同じであること、すなわち、G_r=G_t , A_r=A_t であることが証明されていて、“アンテナの送受信可逆性”と呼ばれる。

フリスの伝達公式

電波送受信の基本構成を図２に示す。受信アンテナは、送信アンテナに対して十分遠方にあり、すなわち電波を平面波で受信できる位置にあり、その距離を d とする。アンテナから放射されたエネルギーは球面状に広がって距離の２乗で弱くなり、受信点での電力密度は P_tG_t /（$4\pi d^2$）［W/m^2］となる。分母の $4\pi d^2$ は半径 d の球の表面積で、以後、これを S_p と置く。受信アンテナが実効面積分の電波を拾い集め、受信電力 P_r は次式となる。

$$P_r = G_t P_t \times \frac{1}{S_p} \times A_r \quad \left(S_p = 4\pi d^2 \right) \tag{1}$$

（受信電力＝送信電力×空間広がり×拾い集める面積）

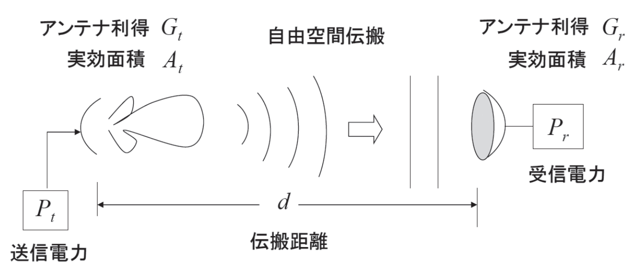


図２　無線通信の基本伝送系

実効面積 A_r と受信アンテナ利得 G_r の関係は、アンテナの形式によらず､次式で与えられる（次項で説明）。

$$A_r = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r \quad (\lambda：電波の波長) \tag{2}$$

これより、受信電力は次式で表される。

$$\boxed{P_r = \frac{G_r G_t}{L_p} P_t, \quad L_p = \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2} \tag{3}$$

これが無線伝送の基本式“フリス（Friis）の伝達公式”である。式中の L_p は自由空間伝搬損と呼ばれ、損失がないとき 1、通常はこれよりはるかに大きい値を持つ（逆数で使うので電力を弱くする働き）。この公式は、送受信アンテナの利得さえ分かれば、受信電力を簡単に求めることができるので、無線回線設計に重宝されている。例えば、半波長ダイポールアンテナ対向回線であれば、アンテナ利得は 1.64（デシベル換算では 2.14 dBi）なので、送受信電力比 P_r/P_t は次式になる。

$$\frac{P_r}{P_t} = 1.64 \times 1.64 \times \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 \approx 0.017 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \tag{4}$$

アンテナの利得と実効面積の関係

フリスの伝達公式の導出には教員泣かせの式が一つ入っている。それは(2)式のアンテナ利得と実効面積の関係式である。そのため、授業では前項の説明のように天下り的に与えられることが多いと思う。これを掘り下げてみたい。

(2)式は以下の2段階の手順❶, ❷を踏んで導かれる。

❶ G/A の値はアンテナの種類によらない

図2では、左側を送信局としているが、符号を付け直し、左側のアンテナ特性を G_1, A_1､ 右側を G_2, A_2 とする。左側を送信局として電力 P_t を送ったときの右側の局の受信電力を P_{r2}、逆方向で、右側を送信局として電力 P_t を送ったときの左側の局の受信電力を P_{r1} とすると､相反定理より $P_{r2} = P_{r1}$ である。それゆえ、

$$\frac{P_t G_1 A_2}{4\pi d^2} = \frac{P_t G_2 A_1}{4\pi d^2} \rightarrow \frac{G_1}{A_1} = \frac{G_2}{A_2} \rightarrow \frac{G}{A} = 一定 \tag{5}$$

となる。アンテナがどういうタイプであろうがそれには関係なく常に成り立ち、アンテナ利得と実効面積の比は一定であるということを示している。では、この比の値は何であろうか。

❷ その値は？

比率一定と示された G/A の値を知りたい。アンテナのタイプによらないのだから、何かひとつ答えが分かるアンテナがあれば、その結果が全てに使える。解析できるアンテナには何があるであろうか？

理論（マクスウェルの方程式）で解ける微小ダイポールアンテナを選ぶのが正攻法である。その他、大形開口面アンテナの放射パターンから正面方向の利得を求め (2)式を導く方法などもある（実際の導出は［1］参照）。これらによってこの問題は解決されるのだが、どれも導出に手間隙かかり、もっと直感的に導く方法はないのだろうかと思う。

無指向性アンテナから実効面積を求めたい

無指向性アンテナ（G=1）の実効面積 A_0 は $\lambda^2/4\pi$ であり、知る人は知るように、これは周の長さ 1 波長の円の面積である。こんな美しい関係があるなら、A_0 を求め、

$$A = GA_0 \quad \left(A_0 = \frac{\lambda^2}{4\pi}\right) \tag{6}$$

の形に表されれば、流れが美しい。しかし、これが手ごわいのである。

特性が単純である無指向性アンテナで考えることの難しさは、そのアンテナが空想上のアンテナであって、具体的な形がないということにあるからかもしれない。以下の方法は開口面放射の一般問題を無指向性アンテナに特化した導出で、図 3 を見ながら一緒に考えてほしい（具体的な式展開は［1］に）。

① 原点に置かれている無指向性アンテナから P_t の電力が放射され、これを十分遠方にある距離 d の点で観測する。その点では平面波であり、電力密度は $p_r=P_t/(4\pi d^2)$ である。これを以下の⑤の比較規準とする。
② 原点に無指向性アンテナの実効面積 A_0 に相当する平面を考え、その面が遠方受信点に向いている。その面上には平面波電磁界（電界 E_0 と磁界 H_0；両者の大きさの比 Z_0（$=E_0/H_0$）は自由空間の特性インピーダンス 377 Ω）がある。原点の場所に、面積 A_0 の窓をもつ無限大の導体壁があって、壁の後ろ側から到来する平面波がその窓を通り抜けるイメージを持ってほしい。
③ このとき、面を通過する電力が P_t になるように電界強度 E_0 を定める。
④ 反射面正面方向の距離 d 地点での電界強度 E_r を、マクスウェルの方程式を使って求める。

⑤ 受信点での④を電力密度 p_r に換算する。
⑥ ①と⑤の電力密度が等しいとして、無指向性アンテナの実効面積 A_0 が導かれる。

　無指向性アンテナに特化することによって、直観的導出を目指したのではあるが、④のステップで、電磁気学（マクスウェルの方程式）の助けを借りざるを得ず、思ったほど簡易とは言えない方法になってしまった。無指向性アンテナと言えども、マクスウェルの方程式無くしては求まらない、と言うことのようである。

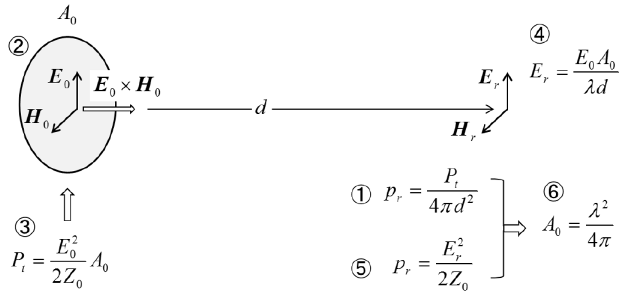


図３　無指向性アンテナの実効面積を求める一つの方法

フリスの伝達公式の送受信系ダイヤグラム

　フリスの伝達公式として⑶式を示した。この式を分解して、送受信アンテナのそれぞれの働きが見える形（ダイヤグラム）にしてみよう。ここでは、3つの面積 A_0（$=\lambda^2/4\pi$）、S_p（$=4\pi d^2$）、S_0（$=d\lambda$）が重要な役を担う。A_0 と S_p については既に説明しているが S_0 は新登場。これは A_0 と S_p の相乗平均で、値は $d\lambda$ になる。$d\lambda$ と言う量は、電波の通り道に敷いた幅1波長のレッドカーペットをイメージし、その面積と思えば良い。この3つの面積は以下の関係に整理できる。

$$\left.\begin{aligned} S_0 &= \sqrt{A_0 S_p} = d\lambda \\ S_p / A_0 &= L_p = \left(4\pi d/\lambda\right)^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow A_0 : S_0 : S_p = 1 : \sqrt{L_p} : L_p$$

　⑶式の構造を分解すると図4のように表すことができる。$G_t P_t$ の電力が半径 d の球（面積 S_p）の面上に均一に分布し、これを A_0 の面積分汲み上げ、それを G_r 倍した結果が受信電力 P_r であると言うことになる。

　図4は式構造を表しているが、アンテナの働きの送受信等価性が見えにくい。そこで、共通土俵である S_p の部分を A_0 と S_p の相乗平均である S_0 ずつにわけ、掛け算の形で表してみよう。図5⒜がそれである。このように表すと、送信アンテナと受信アンテナの働きが同じであることが分かる。この図で、$G_t A_0 \rightarrow A_t$, $G_r A_0 \rightarrow A_r$ と置き換えれば同図⒝になる。

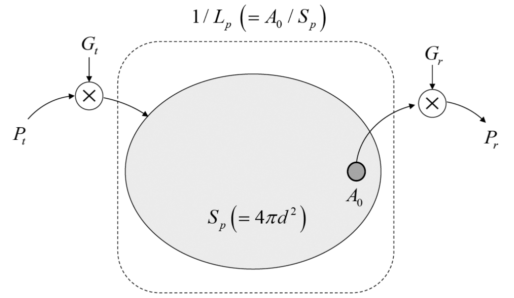
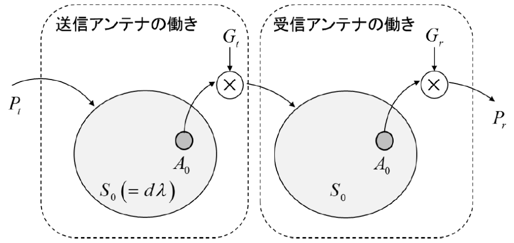
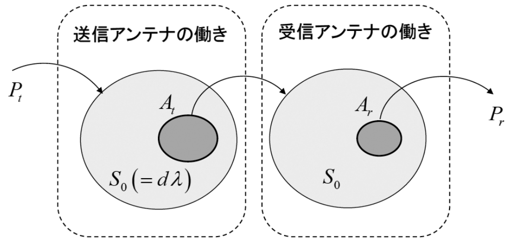


図４　式 (3) のダイヤグラム



(a)　利得を用いた縦続接続



(b)　実効面積を用いた縦続接続

図５　フリスの伝達公式における送・受信アンテナの働き

　図5⒝の構造を式で表すと以下のようになる。

$$P_r / P_t = A_r A_t / S_0^2 \quad \left(S_0 = d\lambda\right) \qquad (7)$$

　この式形はフリスが1946年の論文［2］に示したもの、すなわち、フリスの伝達公式の原型である。

　図5⒝の意味を、それぞれ点線で囲った「送・受信アンテナの働き」と言う視点で考えてみたい。空間的な広がりを持った面からの放射であっても、十分遠方であれば、送信点から角度指向性を保った球面波が伝搬している（＝放射パターンが距離によって変化しない）。また、遠方に有る受信点では平面波が来ているように見える。このような領域は、遠方界領域と呼ばれる。送信アンテナの開口径 D に対して、遠方界とみなせる距離は $d>2D^2/\lambda$ が目安とされている。フリスの伝達公式はこの領域に適用できる公式である。$2D^2$ の部分を大雑把な意味でのアンテナ開口面積と捉えると、距離 d にある受信点に平面波を送りたいなら、

アンテナの開口面積は $d\lambda$（すなわち S_0）より小さくしなさい（＝アンテナの大きさは S_0 が上限)、と言うことである。図 5⒝において、点線枠の「アンテナの働き」の意味は、アンテナの頑張れる範囲、すなわち、アンテナの働きのテリトリーと言うことであり、実効面積（A_t あるいは A_r）と S_0 の比が送・受信アンテナそれぞれの伝送能力を表すのである。

この遠方界領域の境界当たり（＝アンテナの面積が S_0 に近い）は、送信電力効率とアンテナ面積の有効利用の観点で、最強の無線伝送領域になる。アンテナのできることにおいて伝送に無駄がないという意味であり、例えば、宇宙太陽光発電衛星システムにおける衛星 - 地上間の電力伝送におけるアンテナ設計に有効な指針を与えるものになる。一例として、周波数 2.5GHz、距離を 40,000km として、$A_t = A_r = S_0$（$= d\lambda$）とすると、送・受信それぞれのアンテナは直径 2.5km サイズになる。このとき、計算上、$P_r / P_t = 1$（無損失伝送）になるが、適用限界付近の話なので、余裕をもった設計が求められる。

電磁気学的アプローチ

電磁気学をきっちり学んだ人には、フリスの伝達公式ではもの足りないかもしれない。そこで、電磁気学（マクスウェルの方程式）を使って、半波長ダイポールアンテナ対向回線について受信電力を求めてみよう。手順は以下である（詳細は［1］に)。

①送信アンテナに流れる電流 I を、給電点をピーク値 I_0、端点を 0 とする正弦波形で近似する（この近似の妥当性は数値解析や実測でも確認されている）

②アンテナ入力インピーダンス（複素数）を電磁解析手法（モーメント法等）で求める。その実数部が入力抵抗 R であり、R=73.13Ω を得る

③入力電力 P_t と入力抵抗 R から入力電流 I_0 を算定する

④送信アンテナの電流分布から受信点電界強度を求める

⑤受信アンテナ端子間電圧を求める

⑥アンテナ抵抗 R に整合する負荷抵抗から受信電力を算定する

このような手順を経て、送受信電力比 P_r / P_t が以下の式で求められる。

$$\frac{P_r}{P_t} = \frac{1}{16R^2}\left(\frac{\lambda Z_0}{\pi^2 d}\right)^2 \approx 0.017\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \qquad (8)$$

当然ながら、⑷式の結果に一致。手順を比べてみれば、利得だけで一網打尽なフリスの伝達公式の便利さがよくわかると思う。

両算定手法を結ぶもの

フリスの伝達公式では、送信電力と送信アンテナ利得が出発点になるが、電磁界的手法では、送信アンテナに流れる電流から解析が始まり、算定法が異なっている。直感的推論に基づいているように見えるフリスの伝達公式と厳密な算定である電磁気学的方法との接点はどこにあるのだろう。

ここでは、その謎を解く二つの点を指摘したい。フリスの伝達公式の鍵は、アンテナ利得と実効面積の関係を表す⑵式である。先に述べたように、この式には電磁気学のエッセンスが埋め込まれていて、マクスウェルの方程式の力を借りずしては得ることができない式なのである。一方の電磁界的手法の鍵は、アンテナ入力抵抗 R である。73.13Ω の値は理論解析から得たものであるが、フリスの伝達公式はこの値に対して縛りを与えている。すなわち、両手法で求めた受信電力が等しくなるためには

$$1.64 \times 1.64 \times \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 = \frac{1}{16R^2}\left(\frac{\lambda Z_0}{\pi^2 d}\right)^2 \;\rightarrow\; R \approx 73.13 \qquad (9)$$

のように、フリスの伝達公式が入力抵抗 73.13Ω を要求しているのである。⑼式のように、放射特性と結び付けて定められる抵抗は放射抵抗と呼ばれ、こうあるべき値を示している。アンテナ入力抵抗（ミクロの視点：理論解析や実測から得られる）と放射抵抗（マクロの視点）が等しくなることが理論からの帰結なのであるが、実際その通りになり、電磁気学お見事と言いたい。図 6 は二つの受信電力算定法の仕組みと相互の関係を半波長ダイポールアンテナを例にしてまとめている。

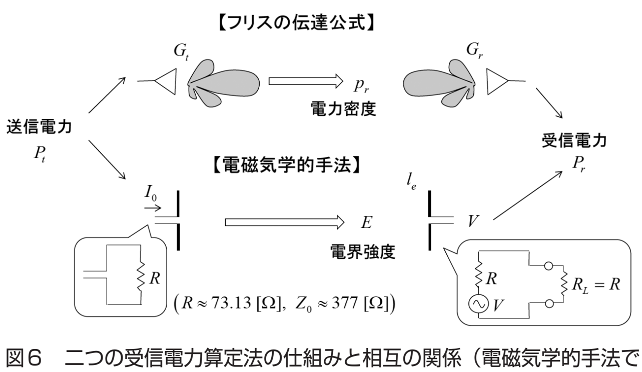


図 6　二つの受信電力算定法の仕組みと相互の関係（電磁気学的手法では、半波長ダイポールアンテナを送受信に用いた場合を示している）

<参考文献>
[1] 唐沢好男，謎解き電磁気学（第 11 章フリスの伝達公式），ネット公開私製本 http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/EM_Wonderland_Chap_11.pdf
[2] H. T. Friis, "A note on a simple transmission formula," Proc. IRE and Waves and Electronics, pp. 254-256, May, 1946.