

## 無線技術者のためのヒルベルト変換

～比帯域の広い実数信号を処理したいときに～

唐沢 好男

### 1. はじめに

ヒルベルト変換は通信・音響・レーダ・制御など様々な分野の信号生成や信号処理に現れてくるが、利用分野の広さゆえ、入り方を間違えるとその理解が回り道になってしまう恐れがある。そこで、本資料では、無線分野の応用に焦点を当てる。具体的には、帯域幅を有する実数領域時系列信号（例えば IF 帯変調信号）に対して、その直交信号を作り出す変換技術と捕らえる。直交信号が何に役立つのだろうか？そのような信号を作り出す目的がどこにあるのだろうか？本稿では、無線技術者の視点から、この問いに切り込んでみたい。

ヒルベルト変換は、2節以降で述べることからわかるように、通信信号解析や無線機製作などの場面に現れてくるが、筆者等がそれを必要とした具体的な例をひとつ挙げておきたい。フェージングエミュレータ（あるいはフェージングシミュレータ）という装置がある。変調が掛かった通信信号に対して所望のフェージングを加えて出力し、無線端末の伝送特性評価等に使われる装置である。この装置では入力信号にフェージングを作り出すウェイトを掛け、目的信号を得る。このときのウェイトは、振幅と位相情報を持つ複素数である。この演算処理をベースバンドで行う場合は、IQ 座標で表現される複素信号に複素数のウェイトを掛ければよく、本稿が対象とするヒルベルト変換はどこにも出てこない。一方、近年の演算性能の高速化を背景に、変調が掛かっている IF 帯信号をそのまま用いて演算を実現したい場合もある（例えば、ある種のソフトウェア無線機や上述のフェージングエミュレータなど）。その際には、実数信号に複素数ウェイトを掛ける？そんなことしてよいの？という疑問が浮かぶ。もちろんそれはできないことであり、そのために実数信号にも実効的な IQ 信号が必要になり、それを生み出す変換がヒルベルト変換である。特に、RF 帯から IF 帯に変換された信号に対しては比帯域（帯域幅と中心周波数の比）が広くなり、そのような信号に対する直交信号の生成にヒルベルト変換が力を発揮する。

ヒルベルト変換器を具体的に設計したい場合には、デジタルフィルタの知識が求められるが、そのことは他の専門書に譲る。本稿では、ヒルベルト変換とは何か、通信に関する信号表現や変換手法の中で、どのような位置づけにあるかなどの、基礎部分に焦点を当て、大学院の教科書風にまとめている。

## 2. 信号表現

以下、ヒルベルト変換の基礎になる三つの信号表現（ベースバンド信号、帯域通過信号、解析信号）についておさらいする。

### (1) ベースバンド信号

相手に伝えたい情報は、1と0とで構成されるデジタル信号列であるとしても、実際に送られる量は、その情報を複素平面上にマッピングしたアナログ信号である。このアナログ信号  $x$  は、振幅  $r$  と位相  $\phi$  によって与えられ、故に、実数軸（in-phase 成分、以下 I 成分と呼ぶ）と虚数軸（quadrature-phase 成分、Q 成分と呼ぶ）の平面上に置かれた複素数信号であり、式(1)で表現する。

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \exp\{j\phi(t)\} \\ &= x_I(t) + jx_Q(t) \end{aligned} \quad (1)$$

例えば、QPSK 変調信号であれば、 $r$  一定の下で、 $\phi = \pm\pi/4, \pm3\pi/4$  の 4 値をもつ。

本稿では、この信号を**ベースバンド信号**（baseband signal: **基底帯域信号**）と呼ぶ

【注1】。周波数 0Hz を中心に、信号の帯域幅内に周波数成分を有する信号であるので**等価低域通過信号**（equivalent low-pass signal）とも呼ばれる。また、このように信号を表現する系を**等価低域通過系**（equivalent low-pass system）、あるいは**ベースバンド系**（baseband system）と呼ぶ。

---

【注1】 アナログ通信の場合は、ベースバンド信号と変調の定義が明確である。周波数 0Hz を中心としたアナログ信号を“ベースバンド信号”、この信号を搬送波の振幅・位相・周波数の変化に変えて高周波信号を得る操作が“変調”である。情報（＝ベースバンド信号）を電波に乗せる（＝変調）というイメージである。デジタル変調では、電波に乗せるというよりは、ビット列を複素平面状にシンボル点としてマッピングするその仕方が変調と呼ばれる（BPSK, QPSK, QAM など）。電波への変換は、周波数変換（アップコンバージョン）に過ぎない場合が多い。ベースバンド信号は音響波形のように実数量をさす場合もあるが、本稿では、IQ 面上にマッピングされた複素量（シンボル情報）の時間変化信号をベースバンド信号と呼んでいる。

---

### (2) 帯域通過信号

実際に、アンテナから空間に送り出される信号は、搬送波（周波数  $f_c$ ）の振幅・位相を  $r$ 、 $\phi$  に対応させて変化させたもの（変調された信号）であり、搬送波周波数（ $f_c$ ）を中心とした限られた周波数領域にだけ有効な成分をもつ**帯域通過信号**（バンドパス信号）である。このような高周波信号を搬送波を含めて実数領域で表現する系を**帯域通過系**（band-pass system）と呼ぶ。

帯域通過信号  $s(t)$  は、次式で表される。

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \text{Re}[x(t) \exp(j2\pi f_c t)] \\
 &= r(t) \cos\{2\pi f_c t + \phi(t)\} \\
 &= r(t) \cos \phi(t) \cos(2\pi f_c t) - r(t) \sin \phi(t) \sin(2\pi f_c t) \\
 &= x_I(t) \cos(2\pi f_c t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_c t)
 \end{aligned} \tag{2}$$

このようにして伝送されてきた信号は、受信系において二つに分離し、一方に  $\cos 2\pi f_c t$  を、もう一方に  $\sin 2\pi f_c t$  を掛けて、それぞれ一定時間の平均処理（低域通過フィルタ処理）を行うことにより、 $x_I$ ,  $x_Q$  成分を分離識別することができる。図1は、ベースバンド信号と帯域通過信号（RF 信号）との関係をまとめている。図2は、二つの信号のスペクトルの関係を表している。ベースバンド信号は、時間領域でも周波数領域でも成分は複素数で表されるが、帯域通過信号は、時間領域では実数で、周波数領域では複素数（正負の周波数成分毎では複素共役の関係）で表現される。（注：正の周波数は時間と共に位相が正の方向に進む、負の周波数はその逆で、位相が負の方向に進む）

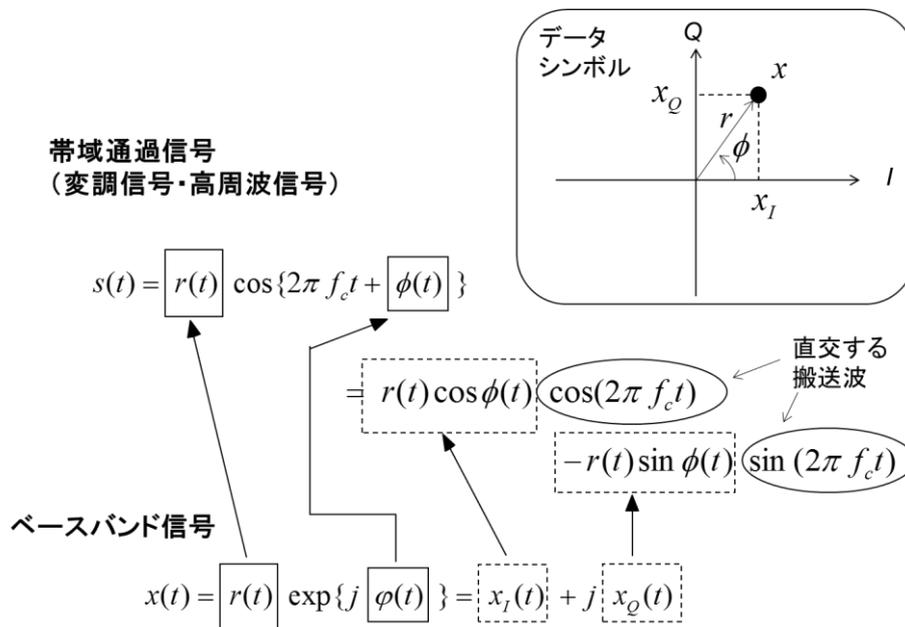


図1 ベースバンド信号と帯域通過信号（RF 信号）

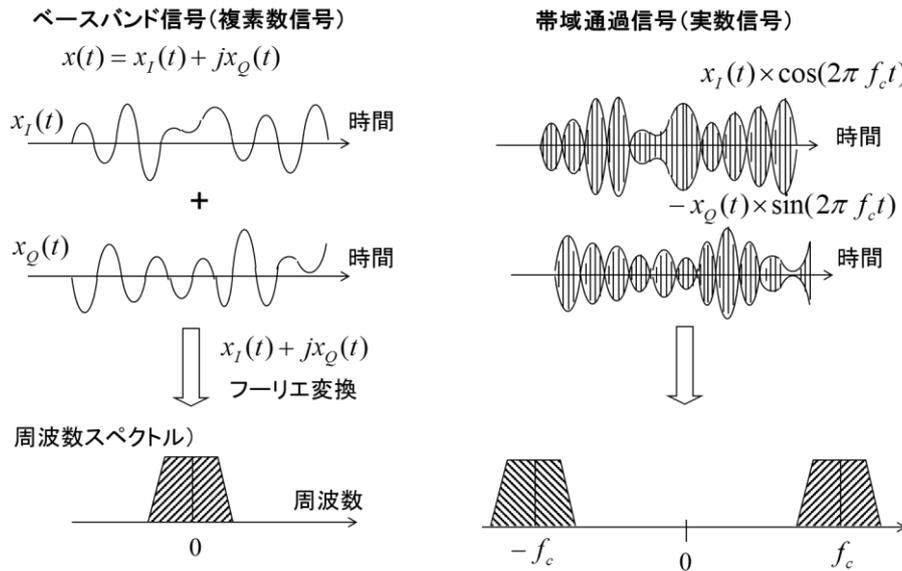


図2 二つの信号のスペクトルの関係

(3) 解析信号

実信号である帯域通過信号  $s(t)$  をフーリエ変換すると  $f_c$  と  $-f_c$  を中心に、複素共役の関係を持つそれぞれのスペクトル成分が現れる (図2)。この正負の二つの帯域の成分のそれぞれに全情報が含まれているので、どちらか一方の帯域に着目して信号表現しても問題ない。このうち、正の周波数成分のみを取り出した信号  $(x(t) \exp(j2\pi f_c t))$  は**解析信号(analytic signal)**と呼ばれる。これは時系列においても複素数信号であり、 $s^{(+)}(t)$  とする。実信号  $s(t)$  の位相を  $\phi$  だけ進める演算を数式で表すには4節で述べるヒルベルト変換を持ち出さなければならないが、解析信号表現では  $s^{(+)} \exp(j\phi)$  とするだけでよいので、信号処理の表現 (回路解析) には、ベースバンド信号や解析信号のような複素数表現が便利である。なお、解析信号は電気回路 (交流回路) で学ぶフェーザ表示に対応する。(注: フェーザ表示では交流信号を  $e^{j\omega t}$ , コイルのインピーダンスを  $j\omega L$  のように、複素数で表し、回路計算を容易にしておき、その便利さを体感していると思う)

解析信号  $s^{(+)}(t)$  と帯域通過信号  $s(t)$  は以下の関係式で結ばれる。

$$\begin{aligned}
 s^{(+)}(t) &= r(t) \exp\{j(2\pi f_c t + \phi(t))\} \\
 &= x_I(t) \cos(2\pi f_c t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_c t) + j\{x_I(t) \sin(2\pi f_c t) + x_Q(t) \cos(2\pi f_c t)\} \\
 &= s(t) + j\hat{s}(t)
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

ここで、

$$\hat{s}(t) \equiv x_I(t) \sin(2\pi f_c t) + x_Q(t) \cos(2\pi f_c t)
 \tag{4}$$

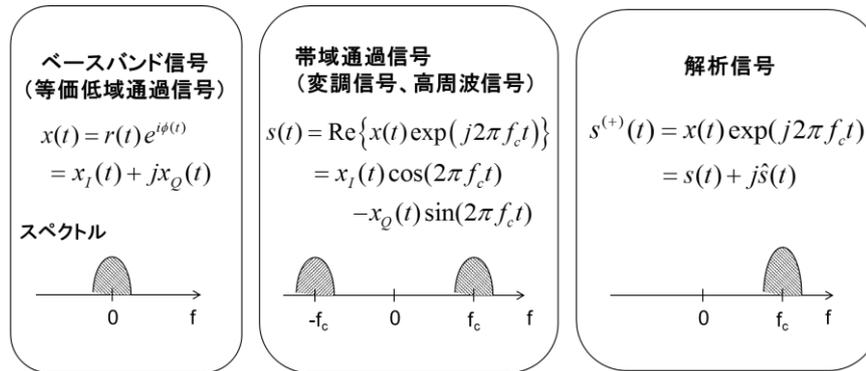


図3 三つの信号表現の定義とそれらのスペクトル

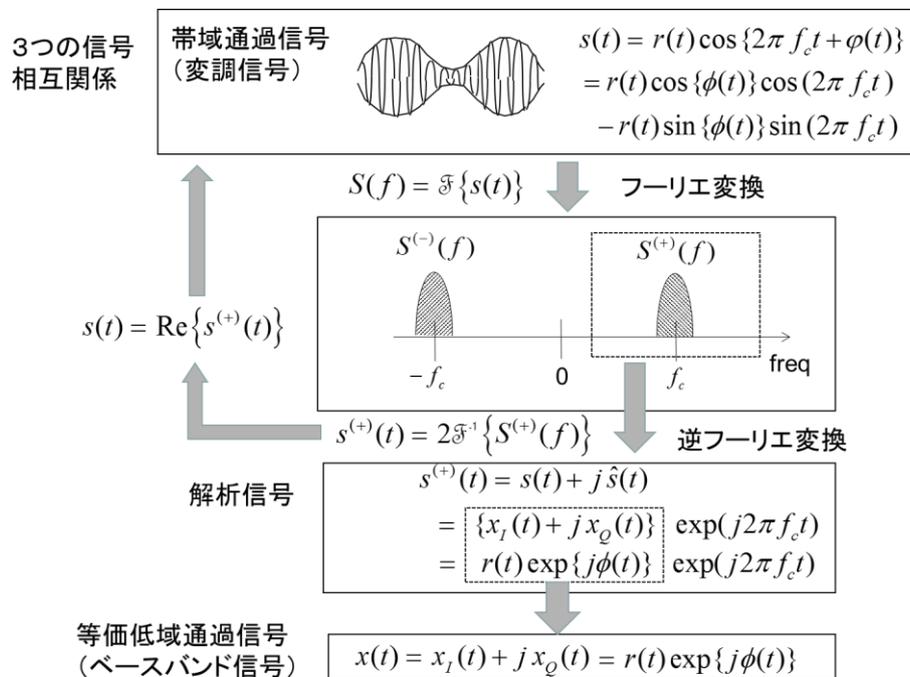


図4 三つの信号表現（ベースバンド信号・帯域通過信号・解析信号）の関係

$\hat{s}(t)$  は帯域通過信号  $s(t)$  の搬送波の位相を  $90^\circ$  遅らせたもの、すなわち、 $s(t)$  の  $\cos(2\pi f_c t)$  を  $\sin(2\pi f_c t)$  に、 $\sin(2\pi f_c t)$  を  $-\cos(2\pi f_c t)$  に置き換えたものである。この変換がヒルベルト変換 (Hilbert transformation) と呼ばれるものである。【本資料では、このように主題であるヒルベルト変換が徐々に顔を出してくるが、詳しくは4節で整理して述べる】

図3はベースバンド信号、帯域通過信号、解析信号の定義と式表現を、図4は三つの信号の関係を整理して示している[1]。これらの関係のより深い理解を得たい読者は信号表現を扱っている専門書（例えば、文献[2]）で学んでほしい。

### 3. 理想フィルタと信号変換

#### 3. 1 理想フィルタ

ヒルベルト変換の導入部分の予備知識として、理想フィルタ（概念上のフィルタ）をまとめておく。

(a) 正の周波数領域の通過フィルタ： $U(f)$

正の周波数部分のみを無歪で通過させ負の周波数を遮断するフィルタを  $U(f)$  とする (図 5

(a) 【以下、項目番号(a), (b), ..., (f)は同図の番号に対応】。

(b) 負の周波数領域の通過フィルタ： $U^*(f)$

$U(f)$  を  $f=0$  で負側に折り返したもの。

(c) 正の周波数領域において、周波数  $f_1(>0)$  以上を通過するハイパスフィルタ： $U(f-f_1)$

(d) 正の周波数領域において、周波数  $f_1 \sim f_2$  ( $0 < f_1 < f_2$ ) を通過するバンドパスフィルタ：

$U(f-f_1)U^*(f-f_2)$ 。 ( $f_1=0$  とすれば、ローパスフィルタ)

(e) 正負の周波数成分を持つ実数信号のバンドパスフィルタ： $U(f-f_1)U^*(f-f_2) + U^*(f-f_1)U(f-f_2)$

(f) 正の周波数領域で位相偏移  $-90^\circ$ 、負の周波数領域で位相偏移  $90^\circ$  のフィルタ：

$-jU(f)+jU^*(f)$

このフィルタ特性を  $H(f)$  とすると

$$H(f) = \begin{cases} -j (= e^{-j\pi/2}) & (f > 0) \\ 0 & (f = 0) \\ j (= e^{j\pi/2}) & (f < 0) \end{cases} \quad (5)$$

であるので、 $U(f)$  は  $U(f) = (1+jH(f))/2$  と表される。このフィルタがヒルベルト変換フィルタである【2回目の登場】。

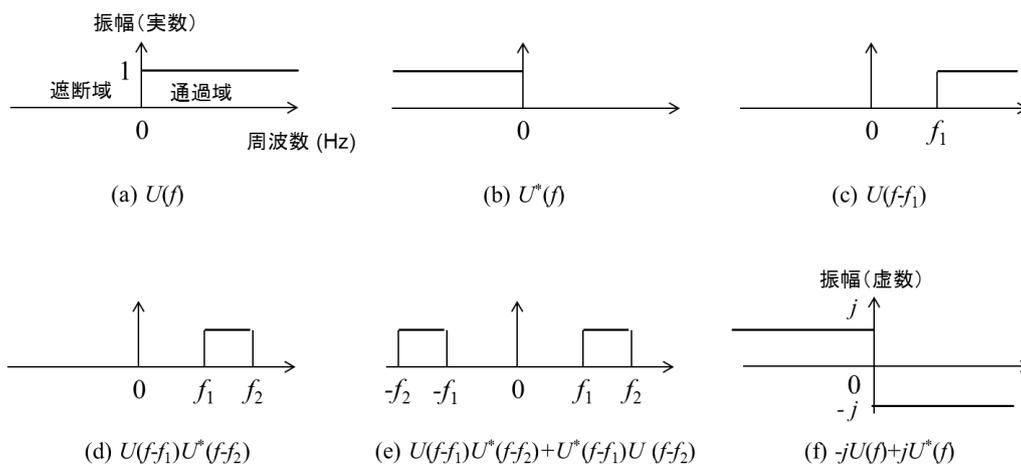


図 5 各種フィルタの周波数特性

### 3. 2 信号のシフト変換

ここでは、通信の信号処理の中でよく用いられる周波数・時間・位相に着目した三つの信号シフト変換（シフト量はそれぞれに固定）について整理する。

#### (1) 周波数シフト

ある周波数  $f_{c1}$  を搬送波として変調を受けた解析信号を  $s_1^{(+)} = x(t) \exp(j2\pi f_{c1}t)$  とする。この信号を搬送波周波数のみを  $f_{c1}$  から  $f_{c2}$  に  $\Delta f (= f_{c2} - f_{c1})$  変化させる ( $s_1^{(+)} \rightarrow s_2^{(+)} = s_1^{(+)} \exp(j2\pi \Delta f t) = x(t) \exp(j2\pi f_{c2}t)$ )。無線機の機能で言うと、アップコンバージョン ( $f_{c1} < f_{c2}$ ) やダウンコンバージョン ( $f_{c1} > f_{c2}$ ) である。 $f_{c1}$  または  $f_{c2}$  が 0 Hz であれば、変調や復調になる。図 6 (a) はその回路構成とスペクトルである。中心周波数  $f_{c1}$  から見た帯域内の周波数成分に対する位相関係が、どのように周波数  $f_{c2}$  に変換しても維持されている (=  $s_1^{(+)}$  の信号を  $f_{c1}$  から見た景色と  $s_2^{(+)}$  の信号を  $f_{c2}$  から見た景色が同じものである) ため、アップコンバージョンやダウンコンバージョンによっても、信号の性質は維持されている。

#### (2) 時間シフト

デジタルフィルタによって所望の特性を実現したい場合には、種々の遅延素子を必要とする。信号全体を遅延回路を用いて  $\Delta \tau$  だけ遅らせたい場合 ( $s_1^{(+)} \rightarrow s_2^{(+)} = s_1^{(+)}(t - \Delta \tau)$ ) には、信号の伝送時間分の長さを持つ遅延線を用意すればよい。フィルタとしての周波数特性は、各成分の位相  $\phi(f)$  が  $\phi(f) = -2\pi f \Delta \tau$  で与えられる傾斜移相特性を持つべきである。図 6 (b) はその構成とスペクトルの特徴を表している。

#### (3) 位相シフト

信号の全ての周波数成分に対して、その位相を  $\Delta \phi$  だけシフトする ( $s_1^{(+)} \rightarrow s_2^{(+)} = s_1^{(+)} \exp(j\Delta \phi)$ ) ただし、正の周波数領域を  $\Delta \phi$  としたら、負の領域は  $-\Delta \phi$ 。信号変換として実用的な意味を持つのは  $\Delta \phi = -\pi/2$  で与えられるときであり、これが式(5)で示したヒルベルト変換  $H(f)$  を与える。【3回目の登場】。広帯域で動作する  $90^\circ$  ハイブリッド回路（理想  $90^\circ$  ハイブリッド回路；2分岐のうちの  $90^\circ$  出力ポートの方）と思えばよい。図 6 (c) はこの位相変換の特徴を示している。本稿のテーマであるヒルベルト変換は、その機能上、位相シフト変換に分類される。

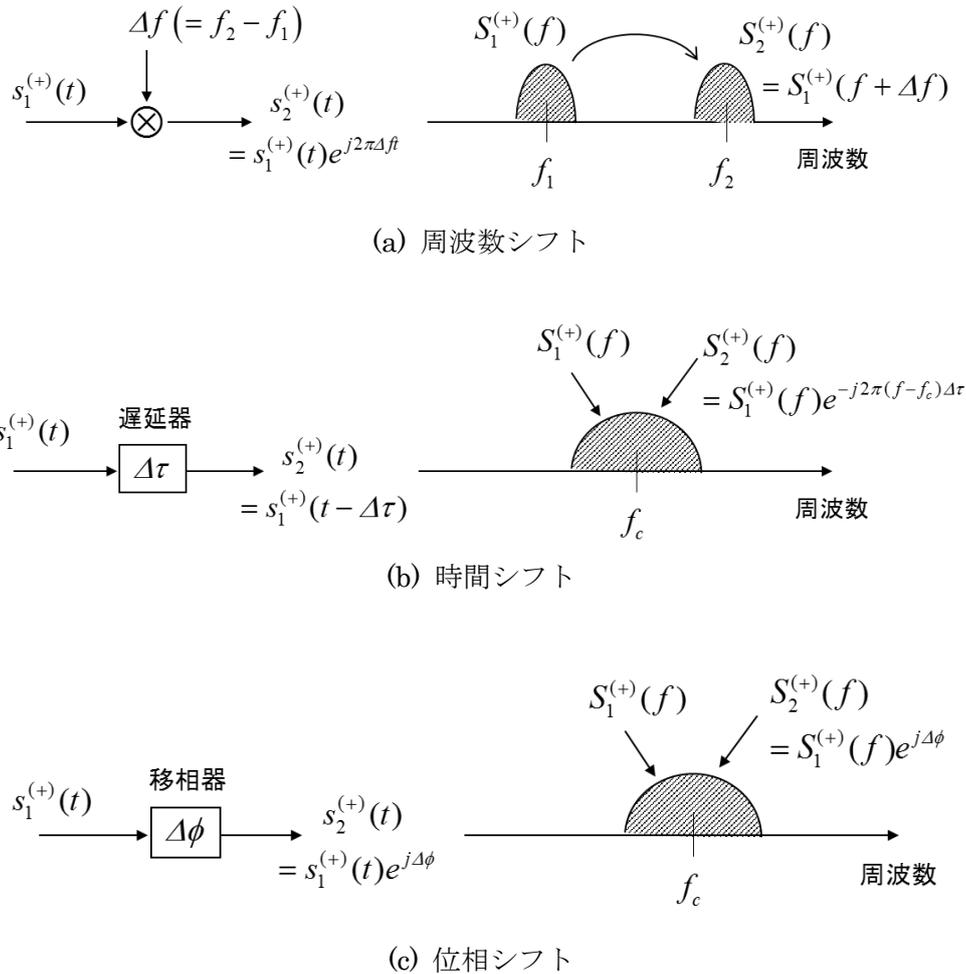


図6 各種信号変換の回路構成とスペクトル

#### 4. ヒルベルト変換とその応用

##### 4. 1 ヒルベルト変換とは

3節で述べたように、ヒルベルト変換は位相シフト変換に分類されるものであり、その周波数特性は(5)式であるが、これを再掲する。

$$H(f) = \begin{cases} -j & (= e^{-j\pi/2}) & (f > 0) \\ 0 & & (f = 0) \\ j & (= e^{j\pi/2}) & (f < 0) \end{cases} \quad \text{(5)式の再掲} \quad (6)$$

上式を伝送路の伝達関数とみなせば、そのインパルス応答  $h(t)$ とは、フーリエ変換対となり、以下で与えられる。

$$h(\tau) = \frac{1}{\pi\tau} \tag{7}$$

実際にフーリエ変換してみると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j2\pi f\tau}}{\tau} d\tau \\ &= \frac{-j2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi f\tau)}{\tau} d\tau \\ &= H(f) \end{aligned} \tag{8}$$

となり、それが確かめられる。上式中の積分は、数学公式 [3]

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \operatorname{sgn}(a) \frac{\pi}{2} \quad \left\{ \operatorname{sgn}(a) \equiv \begin{cases} 1 & (a > 0) \\ -1 & (a < 0) \end{cases} \right\} \tag{9}$$

を利用している。

式(2)で表される帯域通過信号  $s(t)$  とヒルベルト変換のインパルス応答との畳み込み積分で求めると、以下のような手順を経て、式(4)のヒルベルト変換信号  $\hat{s}(t)$  が得られる【導出の詳細は付録に】。

$$\begin{aligned} h(t) \otimes s(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ x_I(t-\tau) \cos(2\pi f(t-\tau)) - x_Q(t-\tau) \sin(2\pi f(t-\tau)) \right\} \frac{1}{\tau} d\tau \\ &= x_I(t) \sin(2\pi ft) + x_Q(t) \cos(2\pi ft) \\ &= \hat{s}(t) \end{aligned} \tag{10}$$

帯域通過信号  $s(t)$  とそのヒルベルト変換信号  $\hat{s}(t)$  が直交関係にあることは以下の式で確認できる。

$$\begin{aligned} \langle s(t)\hat{s}(t) \rangle &= \left\langle \left\{ x_I \cos(2\pi f_c t) - x_Q \sin(2\pi f_c t) \right\} \left\{ x_I \sin(2\pi f_c t) + x_Q \cos(2\pi f_c t) \right\} \right\rangle \\ &= \left\langle \left( x_I^2 - x_Q^2 \right) \cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t) + \left\{ x_I x_Q \left( \cos^2(2\pi f_c t) - \sin^2(2\pi f_c t) \right) \right\} \right\rangle \\ &= \left( x_I^2 - x_Q^2 \right) \left\langle \frac{\sin(4\pi f_c t)}{2} \right\rangle + x_I x_Q \langle \cos(4\pi f_c t) \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

上式の平均操作に  $x_I$  と  $x_Q$  の時間変化の分を外している。この時間変化を含めれば  $(x_I^2 - x_Q^2) \rightarrow \langle x_I^2 - x_Q^2 \rangle$ ,  $x_I x_Q \rightarrow \langle x_I x_Q \rangle$  となるが、独立性に関しては、正弦信号の平均操作の部分で 0 になっているので、 $x_I$  と  $x_Q$  の相関の有無は関係ない。

実数  $s(t)$  の形がわかっているならば、ヒルベルト変換は、式(4)により簡単に変換して求められそうに見えるが、入力信号として手に入る信号は  $s(t)$  そのものであって、 $x_I$  や  $x_Q$  が分かっているわけではないため、そうは問屋が卸してくれない。一方、 $s(t)$  信号から中心周波数 (= 搬送波周波数)  $f_c$  を再生し、それを用いて、 $x_I, x_Q$  を復調し、そこから、式(4)によって、ヒルベルト変換信号を作り出すことは可能であるが、それはまさにベースバンドでの信号処理であり、それをせずに直接求めたいと言う目的からすれば、何をやっているのかということになる。

#### 4. 2 適用例

本稿の冒頭で取り上げた信号にウェイトを掛けて変換する例を示す。

先ず、ベースバンドでそれを行う場合を考える。元の信号  $x$  と変換ウェイト  $w$  を以下で与える。

$$x = x_I + jx_Q \quad (12a)$$

$$w = w_I + jw_Q \quad (12b)$$

このとき、合成信号は以下になる【注2】。

$$\begin{aligned} y &= wx \\ &= w_I x_I - w_Q x_Q + j(w_Q x_I + w_I x_Q) \end{aligned} \quad (13)$$

---

【注2】無線通信での信号表現において、ウェイトを  $w$  で与えるとき、 $y = w^* x$  のように、 $w$  の複素共役を掛ける書き方が多い。これは定義の問題でありどちらでもよいが、本稿では  $y = wx$  の書き方を採る。複素共役を掛ける書き方にする場合には、本稿の式表現(式(13),(14))において  $w_Q \rightarrow -w_Q$  と置き換えればよい。

---

次に、これと等価な処理を帯域通過信号で行うことを考える。式(1)と式(2)の関係から、(13)式の信号を帯域通過信号(実数信号)で書き表すと、

$$\begin{aligned} u(t) &= (w_I x_I - w_Q x_Q) \cos(2\pi f_c t) - (w_Q x_I + w_I x_Q) \sin(2\pi f_c t) \\ &= w_I \{x_I \cos(2\pi f_c t) - x_Q \sin(2\pi f_c t)\} - w_Q \{x_I \sin(2\pi f_c t) + x_Q \cos(2\pi f_c t)\} \\ &= w_I s(t) - w_Q \hat{s}(t) \end{aligned} \quad (14)$$

となる。

実数信号に対する複素数ウェイト変換（振幅・位相変換）では、元の信号  $s(t)$  に  $w_I$  を、そのヒルベルト変換信号  $\hat{s}(t)$  に  $w_Q$  を掛け、その差を求めればよいということになる。図 7 はこの仕組みをまとめている。

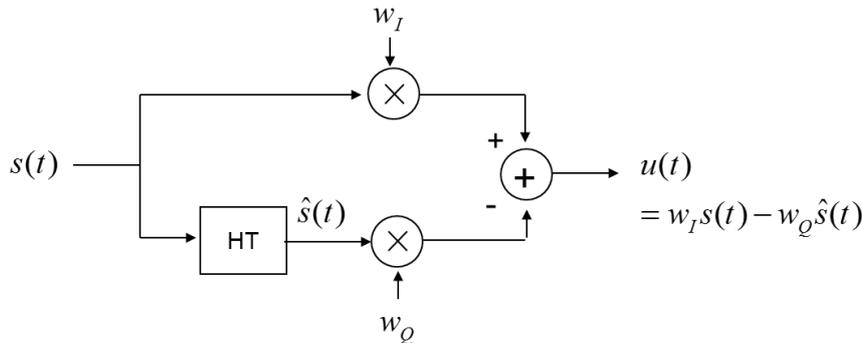


図 7 帯域通過信号（実数信号）に複素数ウェイトを掛けて変換する方法

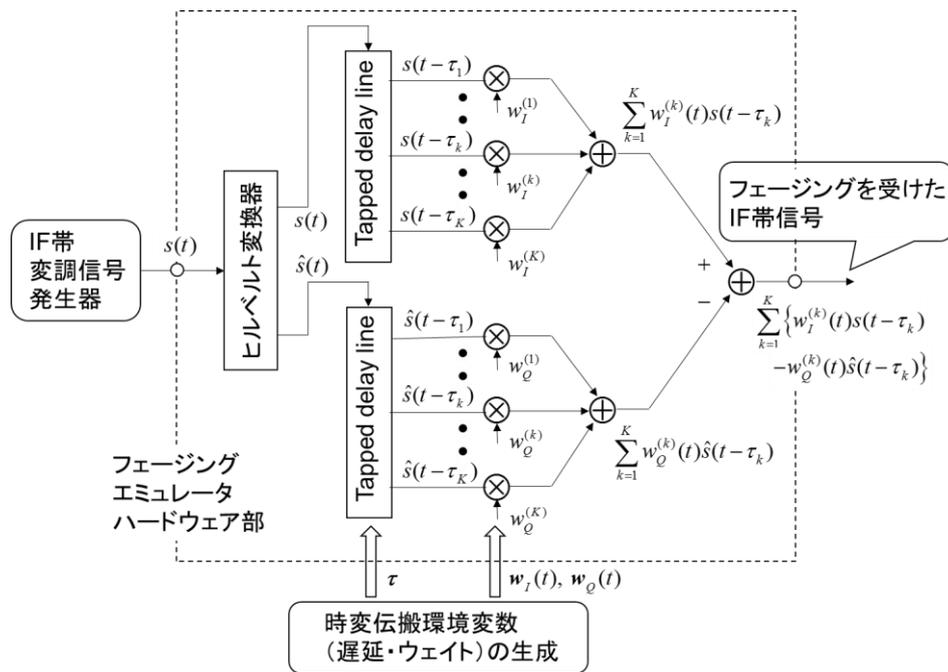
最も単純な信号変換の例を二つ挙げる。帯域通過信号の搬送波位相を  $\theta$  だけシフトしたい場合には、 $w_I = \cos \theta$ ,  $w_Q = \sin \theta$  とすればよい。搬送波の周波数を  $\Delta f$  だけ変えたい場合には、 $w_I = \cos(2\pi\Delta f t)$ ,  $w_Q = \sin(2\pi\Delta f t)$  とすればよい。スペースダイバーシチ、アダプティブアレーや MIMO のように複数ブランチが受信側にある場合でも、それぞれが IF 帯信号である場合には、各部ブランチ毎にヒルベルト変換対を作って、同様のウェイト合成を行えばよい。

では、同じ信号処理がベースバンドでできる現状において、あえて、実数系信号で演算処理をするメリットはどこにあるのであろうか？

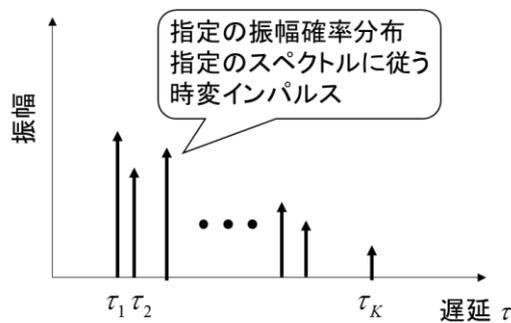
答えは、今手にしている信号が何であるかということに依る。受信機において、復調処理後の信号、すなわちベースバンド信号を手に入れている場合には、その後はベースバンド系での信号処理を行えばよい。もし、手に入れている信号が受信機の IF 帯信号で、かつその信号がそのまま AD 変換されて手元まで来ているというような場合、その信号のまま演算を進めた方が都合が良い場合がある。（ソフトウェア無線機にその例が多い）。また、無線端末特性評価用に電波伝搬環境を生成するフェージングエミュレータで、そのエミュレータが IF 帯信号で入出力される場合には、全体の信号処理をベースバンドに変換してから行うより少ない演算量で実行できる。図 8 は IF 帯信号を入出力とするフェージングエミュレータの構成例で、IF 帯変調信号に対して遅延および任意変動を与える機能を持つ。この機能を拡張した MIMO フェージングエミュレータも実現されている[4],[5]。

ベースバンド信号処理との比較において、その利点はケースバイケースであるが、両方の手法を知っておくことによって、無線機構成の最適化実現の選択肢を増やすことができる。

本節では、筆者の経験に基づき通信信号の重み付け変換の例を取り上げたが、変調方式への応用としては SSB 変調信号の作成に[6]、さらには、比帯域が広い音響信号やレーダ信号の処理にも用いられており、その応用範囲は広い。



(a) 構成



(b) 実現する時変マルチパス伝搬環境

図8 ヒルベルト変換を組み入れたIF帯入出力フェージングエミュレータの構成例

## 5. ヒルベルト変換器の設計

アナログ信号に対するヒルベルト変換器の最も身近なものは  $90^\circ$  ハイブリッド回路である。ただし通常市販のハイブリッドは  $90^\circ$  移相出力が得られるのは中心周波数の付近の狭帯域のみであり、比帯域の広い信号に対するヒルベルト変換器としては不十分である。

比帯域の狭い信号に対しては以下の近似的方法もある。中心周波数を  $f_c$ 、信号のサンプリング周波数を  $f_s$  とし、 $f_s=4f_c$  に設定する。このとき、サンプリング時間番号  $i$  ( $i=1, 2, \dots$ )、サンプリング周期  $\Delta T$  ( $=1/f_s=1/(4f_c)$ )、実数信号のサンプリング値を  $s(i)$  で表すと、

$$\begin{aligned}
 s(i) &= x_I(i) \cos(2\pi f_c i \Delta T) - x_Q(i) \sin(2\pi f_c i \Delta T) \\
 &= x_I(i) \cos \frac{\pi}{2} i - x_Q(i) \sin \frac{\pi}{2} i
 \end{aligned} \tag{15}$$

このヒルベルト変換を  $s(i)$  の 1 サンプル前の信号  $s(i-1)$  で代用すると

$$\begin{aligned}
 \hat{s}(i) \rightarrow s(i-1) &= x_I(i-1) \cos \frac{\pi}{2} (i-1) - x_Q(i-1) \sin \frac{\pi}{2} (i-1) \\
 &= x_I(i-1) \sin \frac{\pi}{2} i + x_Q(i-1) \cos \frac{\pi}{2} i \\
 &\approx x_I(i) \sin \frac{\pi}{2} i + x_Q(i) \cos \frac{\pi}{2} i = \hat{s}(i)
 \end{aligned} \tag{16}$$

となり、 $x_I(i-1) \approx x_I(i)$ ,  $x_Q(i-1) \approx x_Q(i)$  の近似が成立すれば、ヒルベルト変換になる。この近似は、比帯域が狭い信号に対してのみ成立するので、適用もその範囲である。

広比帯域信号に対するヒルベルト変換器（ヒルベルト変換フィルタ）は図9に示す FIR 型デジタルフィルタで構成される。理想的な特性に近づけるには遅延素子の段数  $M$  も比帯域の広がりに応じて大きくしなければならない。フィルタの設計では、通過帯域を決め、その帯域内での振幅の平坦性、位相の  $90^\circ$  一定性が求められる。通常、 $M$  は偶数値を与え、 $M/2$  の中間タップから信号成分  $s(i)$  が取り出される。

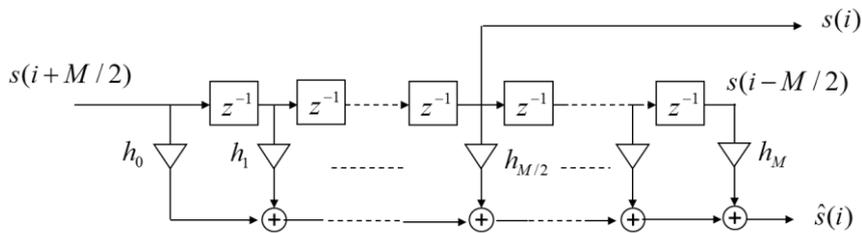


図9 ヒルベルト変換フィルタの基本構成 ( $M$  が偶数の場合)

デジタルフィルタの設計法は他書に譲る（例えば[7], [8]）。中心周波数  $f_c$  に対して、 $\pm \Delta W/2$  の範囲を通過域になるよう設計する場合、 $M$  を “4 の倍数+2 ( $M=6, 10, \dots$ )” とするとき、図9のウェイト  $h_i$  ( $i=0, 1, 2, \dots, M$ ) には、以下の性質がある。

$$\begin{aligned}
 h_{2m+1} &= 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots, M/2-1) \\
 h_{2m'} (<0) &= -h_{M-2m'} \quad (m'=0, 1, 2, \dots, (M-2)/4)
 \end{aligned} \tag{17}$$

$\Delta W=f_c$  (比帯域=1) の場合には、 $M=10$ ,  $h_0=-h_{10}=-0.023757$ ,  $h_2=-h_8=-0.1243875$ ,  $h_4=-h_6=-0.6015724$  とすると、図10に示す特性が得られる。 $M=30$  とすると、 $\Delta W=1.68f_c$  で振幅平坦特性（通過域のリップル） $\pm 0.1\text{dB}$  以内のヒルベルト変換フィルタを得ることができる。

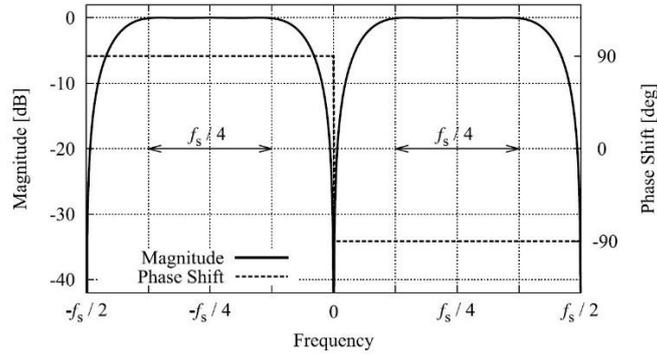


図 10 比帯域=1 の信号を通過帯域とするヒルベルト変換フィルタ特性  
 $(f_s=4f_c, M=10, \text{フィルタ係数 } h_0 \sim h_{10} \text{ の値は本文中に})$

付録 式(10)の導出

$$h(t) \otimes s(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ x_I(t-\tau) \cos(2\pi f(t-\tau)) - x_Q(t-\tau) \sin(2\pi f(t-\tau)) \right\} \frac{1}{\tau} d\tau \quad (\text{A1})$$

の右辺第一項の積分を解く。

$$S_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_I(t-\tau) \cos(2\pi f(t-\tau))}{\tau} d\tau \quad (\text{A2})$$

$x_I(t)$ は、フーリエ変換  $X_I(f)$ の逆変換として

$$x_I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_I(f) e^{j2\pi ft} df \quad (\text{A3})$$

より、

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_I(f) e^{j2\pi f(t-\tau)} df \left\{ e^{j2\pi f_c(t-\tau)} + e^{-j2\pi f_c(t-\tau)} \right\} \frac{1}{\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} X_I(f) e^{j2\pi ft} \left\{ e^{j2\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(f+f_c)\tau} \frac{1}{\tau} d\tau + e^{-j2\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-f_c)\tau} \frac{1}{\tau} d\tau \right\} df \quad (\text{A4}) \end{aligned}$$

さらに、右辺の  $\tau$ に関する積分の部分は、式(9)の公式により、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(f+f_c)\tau} \frac{1}{\tau} d\tau = -j\pi \quad (f+f_c > 0) \quad (\text{A5a})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-f_c)\tau} \frac{1}{\tau} d\tau = j\pi \quad (f-f_c < 0) \quad (\text{A5b})$$

になる。ゆえに、

$$\begin{aligned}
S_1 &= \pi \int_{-\infty}^{\infty} X_I(f) e^{j2\pi ft} df \left( e^{j(2\pi ft - \pi/2)} + e^{-j(2\pi ft - \pi/2)} \right) \\
&= 2\pi x_I(t) \sin(2\pi ft)
\end{aligned} \tag{A6}$$

同様に、右辺第2項の積分も

$$\begin{aligned}
S_2 &\equiv - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_Q(t-\tau) \sin(2\pi f(t-\tau))}{\tau} d\tau \\
&= 2\pi x_Q(t) \cos(2\pi ft)
\end{aligned} \tag{A7}$$

となるので、

$$h(t) \otimes s(t) = x_I(t) \sin(2\pi f_c t) + x_Q(t) \cos(2\pi f_c t) \tag{A8}$$

と導かれる。

#### 参考文献

- [1] 唐沢好男, 改訂 デジタル移動通信の電波伝搬基礎, コロナ社, 2016.
- [2] J. G. Proakis, Digital communications (Fourth Ed.), McGraw Hill, 2001.
- [3] 森口繁一他, 数学公式 I, p. 251, 岩波書店, 1956.
- [4] 孫 桂江、中田克弘、大島一郎、唐沢好男, "2 ステージ法による簡易型 MIMO-OTA 評価のシミュレーション手法とアンテナカップリング特性評価への応用," 信学論(B)、Vol.J96-B, NO.7, pp.701-711, 2013.7.
- [5] Y. Karasawa, K. Nakada, G. Sun, and R. Kotani, "MIMO fading emulator development with FPGA and its application to performance evaluation of mobile radio systems," Int. Jour. Antennas and Propagation, vol. 2017, Article ID 4194921, pp. 1-15, 2017.
- [6] 赤岩芳彦, デジタル移動通信技術の全て, コロナ社, 2013.
- [7] 三谷政昭, デジタル・フィルタ理論および設計入門, CQ 出版, 2010.
- [8] 陶山健仁, デジタルフィルタ原理と設計法, 科学情報出版, 2018.