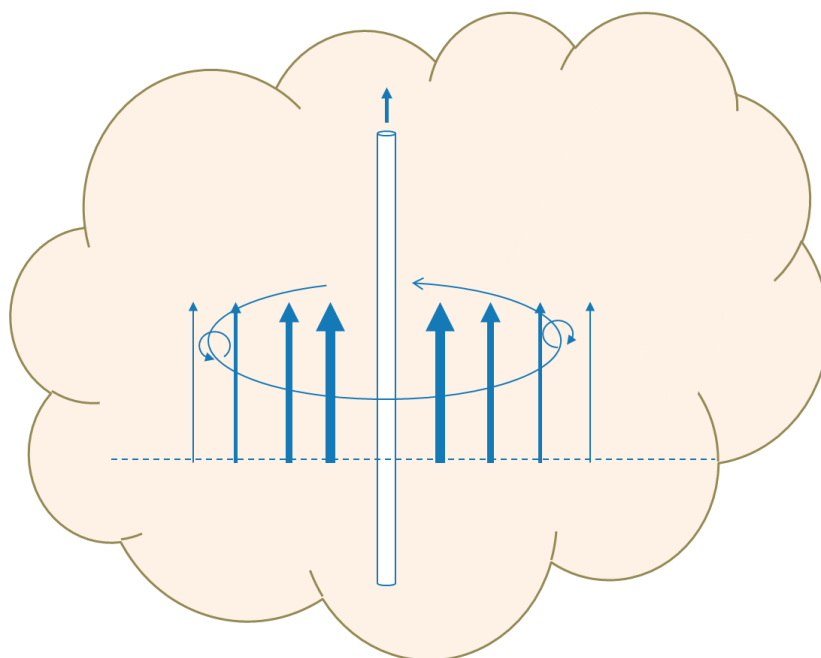


Open Access Book

電磁気学のからくり

～マクスウェルの方程式が織りなす幽玄な世界～

唐沢 好男



読者の皆さんへ

このPDFは初版のもので、現在、この改訂版を以下のアドレスから公開しています。

新規の章の追加と一部内容の削除、章の順番替えなど、3章以降を大幅に改訂しています。もしこれからこの本を読もうとされている皆さんには、改訂版の方をお奨めします。なお、改訂版では、以下アドレスから章毎にPDFを用意しています。

改訂版

http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-061_EM_Wonderland.pdf

本書の利用に関するルールと著者からのお願い

- 1) 本書の著作権は著者（唐沢）に帰属
- 2) PDFの複製や紙面の印刷は自由
- 3) 他の著作物への無断転載は禁止（*）
- 4) 記述内容の引用については、出典を明示する（**）

*: 図面等の転載希望は e-mail: karasawa@mail.uec.jp まで（内容に関するコメントや質問等も）

**： 出典引用：唐沢好男, 電磁気学のからくり, Open Access Book（私本）, TR-YK-061, May 2021,
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-061_EM_Wonderland.pdf

まえがき

この本は、学部で一通り電磁気学を学んだ人が、もう一回、電磁気学をしっかりおさらいしたい、電磁気学の面白さを再発見したいと言う人向きにまとめた電磁気学啓蒙書である。学部授業で使われる電磁気学の教科書は、どの本も組み立てが同じでありあまり代わり映えがしない、と感じる人も多いと思う。でもこの本は違う。磁気学を学ぶ人に対して、電磁気学にはこんな不思議がある、こんな巧妙なからくりがある、と言う部分を掘り起こし、電磁気学、すなわち、マクスウェルの方程式が織りなす幽玄な世界を浮かび上がらせている。そして、その不思議、あるいは、パラドックス的なことの解決には、どうしても相対性理論を持ち出さないと辻褄を合わせるができない、逆に言うと、電磁気現象には相対論的性質が随所に隠れている、ということである。本書の前半はマクスウェルの方程式を学ぶことに、本書の後半は、電磁気学と相対論の関わりにも焦点を当て、学習の過程で浮かび上がる疑問を掘り下げている。故に、本書は決して入門書ではない。説明に必要な数式は省いていないし、ベクトル解析の最小限の知識を期待している。しかし、じっくり読んでくれればわかるようにまとめたつもりである。基礎的なところから、ときどき奥深いところにも寄り道しながら、電磁気学の世界を案内するので、その景色をおおいに楽しんでほしい。

著者は48歳で大学の教員になった。教育者としては遅咲きである。その大学で電磁気学の授業を担当した。無線通信に係わる電波技術を長年にわたって研究してきたのであるから、電波の基礎である電磁気学は得意だろうと思われても不思議はない。しかし、マクスウェルの方程式が直接現れないところの電波技術（マルチパスフェージングやアレー信号処理）に携わっていたので、電磁気学は素人と言ってもよかった。いざ授業となって、まず自分が学んで後、それを教えると言うことの繰り返しになった。所属した学科では、電磁気学は必修科目で大学院入学試験の指定科目でもあったので、教える内容に取りこぼしがあってはいけないという思いが強かった。身に付けてほしい内容が盛りだくさんで、時間に追われながらひたすら教えまくったと言うのが正直なところ、電磁気学は楽しいと言う思いを伝える余裕がなかった。

その後、65歳で定年退職となり、4年間、別の大学で非常勤講師として電磁気学を教えた。そこでは、物理を学ぶ教養科目としての電磁気学であったので、内容に漏れがあってはいけないと言う義務感が消え、焦点を絞った講義ができた。著者自身にも時間的余裕ができ、電磁気学の奥深くに漲る不可思議（わくわく感）が見えるようになって来た。同時に、教員としての現役時代、本来のそういうわくわく感を伝え切れていなかったという自責の念もこみ上げて来た。

本書はその反省に立って、これならどうだと言う意気込みでまとめている。ただし、電磁気学の体系的な教科書ではなく、学びなおすときのヒントをつめている。好奇心は学びの原動力。読者の皆さんにも、ぜひ、電磁気学のからくりを楽しんでいただきたい。もう一度時計の針を巻き戻せるなら、また別な形の授業ができると思うが、それはかなわないこと。本書にその役割を託したい。

2021年5月（コロナ禍、その巣籠り生活の中で）

著者

目次	頁
1. 電磁気学を学ぶための準備 -----	1
1.1 法則と定理	
1.2 ベクトル解析	
1.3 物理量と単位	
1.4 場の概念	
1.5 マクスウェルの方程式	
1.6 本書の構成	
2. マクスウェルの方程式ができるまで -----	13
2.1 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$: 電束密度に関するガウスの法則	
2.2 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$: 磁束密度に関するガウスの法則	
2.3 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}$: アンペアの法則	
2.4 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$: 電磁誘導の法則	
2.5 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$: アンペア・マクスウェルの法則	
3. マクスウェル山頂からの景色 -----	42
3.1 山頂踏破：マクスウェルの方程式	
3.2 電磁波	
4. 定理と法則 -----	48
4.1 用語の定理	
4.2 ガウスの発散定理とガウスの法則	
4.3 アンペアの法則とストークスの定理	
5. 電磁ポテンシャル -----	60
5.1 スカラーポテンシャル	
5.2 コンデンサの静電容量と静電エネルギー	
5.3 ベクトルポテンシャル	
5.4 ベクトルポテンシャルの実在問題	
5.5 電磁ポテンシャルで表すマクスウェルの方程式	
6. 電磁気学と相対論 -----	73
6.1 慣性系の座標変換	
6.2 マクスウェルの方程式のローレンツ変換	
6.3 ローレンツ力	
6.4 動く電荷が作る電磁界	

7. 近接作用で見る電磁誘導の法則	90
7.1 電磁誘導の法則と近接作用	
7.2 ローレンツ力で説明できるか	
7.3 導線に起電力を生み出すものは何か	
余談 1 誘導起電力を測る	
余談 2 電磁誘導と磁力線	
8. 電線を通る電流の速さ	99
8.1 電気エネルギーの伝送	
8.2 準備	
8.3 電流の速度	
9. フリスの伝達公式	105
9.1 アンテナとは	
9.2 アンテナ利得と実効面積	
9.3 フリスの伝達公式	
10. パラドックスを楽しむ	118
10.1 バランスが崩れる？	
10.2 静電界にも $\nabla \times \mathbf{E}$ が？	
10.3 電波の重さ	
10.4 帯電した棒磁石の周りに起きること	

第1章 電磁気学を学ぶための準備

本書は電磁気学の不思議に焦点を当て、その魅力を発掘することに力を注いでいる。電磁気学はマクスウェルの方程式と呼ばれる4つの連立方程式で構成される。この方程式が出来上がるまでの歩みを第2章にまとめている。マクスウェルの方程式はベクトルの微分方程式で表されているので、それを理解するための数学的な準備が必要になる。本章は、電磁気学を学ぶための前段となる基礎的な事項をまとめている。

1.1 法則と定理

電磁気学は電気と磁気に関するいくつかの物理法則の上に理論が組み立てられている。では、この法則とはどういう位置づけになるのだろうか。同じような言葉で、定理や原理もあるが、何が違うのだろうか。ここでは、電磁気学の根底を与える定理と法則、および、それに関連する公理や原理のそれぞれの定義をまとめる。

公理 (axiom)

命題 (真偽の判断の対象となる文章または式) を導きだすための前提として導入される最も基本的な仮定。他の結果を導きだすための議論の前提となるべき論理的に定式化された (形式的な) 言明。真実であることが明らかな自明の理が採用されるとは限らない。

例: 平面上で直線外の1点を通して、この直線と交わらない直線がただ1本存在する (ユークリッド幾何学)

定理 (theorem)

公理を前提として演繹手続きによって導きだされる命題。その正しさは、公理に基づき数学的に証明される。

電磁気学で使われる定理の例: ガウスの発散定理、ストークスの定理

法則 (law)

ある物事と他の物事との間に一定の関係があるときに、その関係を表す言葉あるいは式。その関係が必然性や普遍性を持つと認められたとき、法則と呼ばれる。観測や実験から帰納されたもので、数学的に証明されるものではない。自然科学に対する法則に対しては、自然界はそのような仕組みになっていると素直に受け入れるしかない。法則に当てはまらない物事が見つかり、新たな法則に置き換えられたり、廃棄されたりする。

電磁気学に現われる法則の例: クーロンの法則、オームの法則、電荷保存の法則 (電荷保存則)、ガウスの法則、アンペアの法則、電磁誘導の法則

原理 (principle)

自然科学、特に物理学で用いられる基本的な命題。法則とほとんど同義だが、それよりももう少し定性的概念的なもの。法則と同様、観測や実験から帰納されたもので、数学的に証明されるものではない。

例：重ね合わせの理（重ね合わせの原理）

1.2 ベクトル解析

電磁気学に出てくる法則等は数式によって表現される。特に大事なものはベクトル解析で、その知識が求められる。ベクトル解析そのものは、専門の教科書で学んで欲しいが、そのエッセンス（必要最小限の知識；主に本書に現われるもの）を以下に整理する。

スカラー関数とベクトル関数

- ・スカラー関数： $\phi(x, y, z)$
- ・ベクトル関数：

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad (\text{直角座標})$$

$$\mathbf{A} = A_r \hat{\mathbf{r}} + A_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{円筒座標})$$

$$\mathbf{A} = A_r \hat{\mathbf{r}} + A_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (\text{球座標・極座標})$$

内積と外積

- ・内積

角度差 θ の二つのベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ に対して、以下で定義されるスカラー量。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

- ・外積

角度差 θ の二つのベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ に対して、以下で定義されるベクトル量。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta$$

($\sin \theta$ が負の値になるとき、ベクトルの大きさと言う意味では、 $|\sin \theta|$)

微分演算子

$$\nabla \equiv \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{直角座標})$$

$$\nabla \equiv \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{円筒座標})$$

$$\nabla \equiv \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (\text{球座標})$$

勾配 (gradient, グラディエント)

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (\text{直角座標}) \quad (1.1a)$$

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{円筒座標}) \quad (1.1b)$$

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (\text{球座標}) \quad (1.1c)$$

発散 (divergence, ダイバージェンス)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{直角座標}) \quad (1.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{円筒座標}) \quad (1.2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{球座標}) \quad (1.2c)$$

回転 (rotation, ローテーション)

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (\text{直角座標}) \quad (1.3a)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{円筒座標}) \quad (1.3b)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\hat{\phi} \quad (\text{球座標}) \quad (1.3c)$$

よく使う公式

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi \quad (\text{ラプラシアン})$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{直角座標})$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{円筒座標})$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (\text{球座標})$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

線積分と面積分

(1) 線積分

3次元空間に横たわる経路 c 上の値 A の積分。経路上の線素を ds とすると

$$\int_c A ds$$

電磁気学に現れる線積分の大部分はベクトル関数 $\mathbf{A}$ の経路の接線方向成分。接線方向の単位ベクトルを $\mathbf{t}$ とすると

$$\int_c \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds$$

経路 c が閉曲線のときは

$$\oint_c \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds$$

(2) 面積分

3次元空間に横たわる曲面 S 上の値 A の積分。面上の面素を dS とすると

$$\int_S A dS$$

電磁気学に現れる面積分の大部分はベクトル関数 $\mathbf{A}$ の面上の法線方向成分。法線方向の単位ベクトルを $\mathbf{n}$ とすると

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

積分定理

(1) ガウスの発散定理

閉曲面 S で囲まれた内部空間 V がある。ガウスの発散定理は、対象空間内で定義されるベクトル関数 $\mathbf{A}$ の内部空間 V での性質とその表面 S での性質を等式で結びつけたものであり、以下の式で表される。

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\mathbf{n}: \text{面 } S \text{ 上の単位法線ベクトル}) \quad (1.4)$$

このような、積分変換で表される定理は積分定理と呼ばれる。定理であるから、その正しさは数学的に証明されている。その証明についてはここでは割愛し（ベクトル解析の教科書を見てほしい）、式が意味するところだけを簡潔に述べる。

同式の左辺は、内部空間 V にあるベクトル関数 $\mathbf{A}$ の発散（＝湧き出し）を全部集めたもの（＝湧きだしの総量）である。一方、右辺は、表面 S から、その面に垂直に向かうベクトル関数 $\mathbf{A}$ の成分を面全体で積分したものであり、表面から出てゆく量の全体に当たる。

ガウスの発散定理を一言で言えば、「内部で湧き出す量（左辺）は、表面からあふれ出る量（右辺）に等しい」であり、至極当然と言う気持ちで受け入れることができると思う。

(2) ストークスの定理

ループをなす経路 c で囲まれた曲面 S を考える。ストークスの定理は、曲面 S 上でのベクトル関数 $\mathbf{A}$ に関する積分定理で以下の式で表される。

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.5)$$

まず、式の意味を考える。

同式の左辺は、曲面 S 上におけるベクトル関数 $\mathbf{A}$ の回転（＝渦巻きの力；ベクトルの向きは回転軸の方向）の面に垂直な方向の成分を全部集めたもの（＝回転力の総量）である。一方、右辺は、面の縁をなす経路（ループ） c 上でのベクトル関数 $\mathbf{A}$ の経路方向成分を経路全体で積分したものであり、ループに働く渦の力。式の左右に表される量が等しい、という定理である。

ストークスの定理を一言で言えば、「面上の微小部分に発生する回転（左辺）が、その外側に渦を作り（右辺）、任意のループに対する積分値はループの形によらない」であり、ガウスの発散定理の直感的理解のしやすさに比べると、少し分かりにくいように思う。

道具として利用すると言う目的であれば、ここまでの理解でよい。少し拘りを持った説明を第4章で行っているのので、興味がある人はそちらを見てほしい。

1.3 物理量と単位

本章では電磁気学の理解を山登りに見立てているが、その展開は大河ドラマに近い。場面が進む毎にいろいろな人物が現れ、それらがお互いに関わりあってドラマが展開し、最後は大団円を迎える。ここでは、電磁気学の登場人物（物理量）を簡単に紹介する。また、物理量には単位がある。電磁気学に関連する物理量は MKSA 単位系による 4 つの基本単位（m, kg, s, A）で組み立てられるが、その物理量に特化した基本単位（例えば、電圧のボルト、電荷のクーロンなど）も定められている。物理量の理解のためには、単位を知ることが重要であり、基本単位と組立単位（MKSA 単位）の関係を整理して示す。なお、物理量の詳細な性質や他の物理量との関係は、2 章以降で詳しく述べる。

1.3.1 電磁気関係の物理量

電荷 (q, Q)（カッコ内の記号は代表的に使われる文字）

電気力を引き起こす源。万有引力の源になる質量に対応。電荷は質量と違って正負の 2 種類（すなわち極性）がある。電荷の根源は全ての物質を構成している原子に求めることができる。電荷の最小単位（電気素量）は電子一つ分で、その絶対値 e は、単位をクーロン[C]として $e = 1.60218 \times 10^{-19}$ [C]である。通常の原子は、陽子と電子の数が等しく、電気的には中和している（電気的性質を示さない）。何らかの理由によって原子から飛び出した電子が負の電荷を持つ粒子となる。また、負の電子が飛び出した後の原子は正の電荷を持つ粒子として振舞う。量子力学によれば、電子は位置が定まった固体としてではなく、確率的に分布している波の性質をもつもの（シュレーディンガーの波動方程式により）として表されるが、電磁気学では、それを巨視的に見て、定まった位置に電荷があるとみなして扱う。電荷は電磁気学の出発点を与える。

電荷密度 (ρ)

単位体積当たりの電荷の量を電荷密度と呼び、単位は[C/m³]である。なお、平面状に分布する電荷密度を扱う場合には単位は[C/m²]、線上に分布する電荷密度を扱う場合には[C/m]である。

電界 (E)

荷電粒子（電荷）に対して力を生み出す場を電界と呼ぶ。電気的歪を持つ場。場に時間的変化が無いときの電界は電荷が発生源になる。大きさと向きを持つベクトル場である。単位は[V/m]。

電束 (ϕ)

電荷 Q から、 Q 本の電気力線が放射状に生み出されているとみなし、この一つ一つを電束と呼ぶ。 Q そのものは通常 1 より小さい値であり、整数値で数えられる本数と言うよりは、均一の分布で無限の数の電気力線が出ていて、その全体が Q であるとみなす。故に、 $\phi = Q$ であり、単位は[C]である。

電束密度 ($\mathbf{D}$)

単位面積当たりの電束の量。大きさと向きを持つベクトル量。単位は[C/m²]。

電位 (スカラーポテンシャル) (ϕ, V)

空間に存在する電氣的ポテンシャル。スカラー量。電位はスカラーポテンシャルとも呼ばれる。また、電気回路では電圧と呼ばれる。空間の2点 P_1 、 P_2 の電位が ϕ_1 、 ϕ_2 であるとき、電位差 $\phi_2 - \phi_1$ は、点電荷を P_1 から P_2 まで運ぶときに外力がなす単位電荷当たりの仕事である。単位は[J/C]であるが、[V (ボルト)]で表す。電界の空間領域での線積分量である。

電流 (I)

1秒間に当該面積を通過する電荷の量。単位は[C/s]であるが、[A (アンペア)]で表す。

電流密度 ($\mathbf{i}$)

単位面積当たりの電流。大きさと向きを持つベクトル量。単位は[A/m²]。

誘電率 (ϵ_0, ϵ)

誘電率 ϵ は電界と電束密度のそれぞれの大きさの比 D/E 。真空の誘電率 ϵ_0 の値は、次のように定められる。1[C]の電荷量を持つ二つの点電荷を真空中に1[m]離して置いたときのクーロン力は測定値より換算して 8.9876×10^9 [N]になる。 $F = K_e Q_1 Q_2 / r^2$ とする比例定数 K_e を $K_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$ [Nm²/C²]と置くと、 $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ [C²N⁻¹m⁻²]となる。単位は[F (ファラッド)/m]でも表される。誘電体では分極によって誘電率は $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ に変化する。 ϵ_r は比誘電率 ($|\epsilon_r| \geq 1$) と呼ばれ、媒質に依存した値を持つ。

磁荷 (q_m)

時間的に変化の無い場において、電界が電荷によって発生したと同じ考えの下での磁界の発生源と考えられた物理量。しかし、磁界を作り出す磁束(磁力線)は電流から生み出されることが明らかになり、単独磁荷(単極磁荷)の存在は否定されている。磁気による力の説明に仮想的な磁荷を用いることはある。また、微小電流ループの等価回路として磁気双極子(極性が反対の二つの磁荷のペア)も用いられる。単位は[Wb (ウェーバ)]。

磁束 (Φ_m)

磁力線と等価。ガラスの板の上に鉄粉を撒き、下から磁石を当てると磁力線の形に相当する模様ができる。磁束は始めも終わりも無く、ループになっている。単位は磁化と同じ[Wb]。

磁束密度 ($\mathbf{B}$)

単位面積当たりを通過する磁束の量。大きさと向きを持つベクトル量。単位は[Wb/m²]である

が、[T (テスラ)]で表される。

磁界 ($\mathbf{H}$)

磁気の力に関するクーロンの法則から定義された磁氣的歪の場を表すベクトル量。単位は [A/m]。磁束密度と同様に磁場の強さを表す量であるが、単位の違いから分かるように、二つは異なる物理量。

ベクトルポテンシャル ($\mathbf{A}$)

空間に存在する磁氣的ポテンシャルを表すベクトル量。磁束密度 $\mathbf{B}$ に対して $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ で定義され、単位は [Tm] である。

透磁率 (μ_0, μ)

透磁率 μ は磁界と磁束密度のそれぞれの大きさの比 B/H 。真空の誘電率 μ_0 の値は、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H (ヘンリー) /m] である。磁性体では磁化によって透磁率は $\mu = \mu_r \mu_0$ に変化する。 μ_r は比透磁率 ($|\mu_r| \geq 1$) と呼ばれ、媒質に依存した値を持つ。マクスウェルの方程式により、真空中の光の速度 c は $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ となることが明らかにされた。

1.3.2 MKSA 単位系と物理単位

物理学では、物理量の単位を理解することが物の本質を捉える意味において重要である。また、単位に目が行き届くようになれば、単位が違う物理量を等号で結んだり、足し合わせたりというような初歩的な誤りを避けることができる。

現在の国際単位系 (SI 単位と呼ばれる) では 7 つの基本単位を定めていて、個々の物理量の単位はこの基本単位の組み合わせ (組立単位) で表される。7 つの基本単位は、長さ [m]、質量 [kg]、時間 [s]、電流 [A]、熱力学温度 [K]、物質質量 [mol]、光度 [cd] である。このうち、長さ・質量・時間の 3 つで構成される単位系は MKS 単位系、電流を加えた単位系は MKSA 単位系と呼ばれる。電磁気学に現われる物理量は MKSA 単位系で表すことができる。

表 1.1 は、電磁気学に現われる物理量とその単位をまとめている。以降、MKSA 単位系での組立単位の表記 $[m^{p_1} kg^{p_2} s^{p_3} A^{p_4}]$ を、簡略化して $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ とする。例えば、電圧は、[2, 1, -3, -1] であり、組立単位が $[m^2 kg / (s^3 A)]$ であることを示している。電圧に与えられた固有の単位はボルト [V] であって、それを使えば便利であるが、物理量同士の関連が見えなくなってしまう。マクスウェル山登山の道中には、いろいろの物理量が出てくるが、この表に示している組立単位に立ち返って考えれば、次元の闇に迷い込むことは無い。例えば、クーロンの法則 (法則自体は後に学ぶ) では、電荷 q_1 が距離 r にある電荷 q_2 に及ぼす力 F とその組立単位は、以下のように表される (物理量の割り算は組立単位の計算では引き算になる)。

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \rightarrow [1, 1, -2, 0] = 2[0, 0, 1, 1] - [-3, -1, 4, 2] - 2[1, 0, 0, 0]$$

以下の例も、単位で追うと物理量の意味が見えてくる。

$$EH \rightarrow [1, 1, -3, -1] + [-1, 0, 0, 1] = [0, 1, -3, 0] \rightarrow [\text{W/m}^2] \quad (\text{単位面積当たりの電力})$$

$$E/H \rightarrow [1, 1, -3, -1] - [-1, 0, 0, 1] = [2, 1, -3, -2] \rightarrow [\Omega] \quad (\text{抵抗あるいはインピーダンス})$$

$$1/\sqrt{\epsilon\mu} \rightarrow -([-3, -1, 4, 2] + [1, 1, -2, -2])/2 = [1, 0, -1, 0] \rightarrow [\text{m/s}] \quad (\text{速度})$$

$$DE \rightarrow [-2, 0, 1, 1] + [1, 1, -3, -1] = [-1, 1, -2, 0] \rightarrow [\text{J/m}^3]$$

(単位体積当たりのエネルギー ; BH も同じ)

$$DE/c^2 \rightarrow [-2, 0, 1, 1] + [1, 1, -3, -1] - 2[1, 0, -1, 0] = [-3, 1, 0, 0] \rightarrow [\text{kg/m}^3]$$

(単位体積当たりの質量 (電波の重さ?) ; BH/c^2 も同じ)

表1. 1 電磁気関連物理量の MKSA 単位系での次元 (組立単位)

(4つの基本単位の並び順にはいくつかの流儀があるが、本書では MKSA [m, kg, s, A] の順で並べている。)

名称 (物理量)	代表的表記	単位名称	物理単位	組立単位			
				M (m)	K (kg)	S (s)	A (A)
力	F	N (ニュートン)	J/m, kgm/s ²	1	1	-2	
エネルギー (仕事)	U	J (ジュール)	Nm	2	1	-2	
電力	P	W (ワット)	J/s, VA	2	1	-3	
電圧	V, ϕ	V (ボルト)	J/C, W/A	2	1	-3	-1
電流	I	A (アンペア)	C/s, W/V				1
電流密度	i		A/m ²	-2			1
抵抗 (インピーダンス)	R	Ω (オーム)	V/A	2	1	-3	-2
導電率			1/ Ωm	-3	-1	3	2
静電容量	C	F (ファラド)	C/V	-2	-1	4	2
インダクタンス	L	H (ヘンリー)	J/A ²	2	1	-2	-2
誘電率	ϵ		C ² /Nm ² , F/m	-3	-1	4	2
透磁率	μ		H/m	1	1	-2	-2
電荷・電束	Q, q	C (クーロン)	As			1	1
磁荷・磁束	Q_m, q_m	Wb (ウェーバ)	Nm/A, Tm ² , Vs	2	1	-2	-1
電束密度	D		C/m ²	-2		1	1
磁束密度	B	T (テスラ)	N/Am, Wb/m ²		1	-2	-1
電界	E		V/m	1	1	-3	-1
磁界	H		A/m	-1			1
ベクトルポテンシャル	A		Tm	1	1	-2	-1
周波数	f	Hz (ヘルツ)	1/s			-1	

1.4 場の概念（遠隔作用と近接作用）

現代の物理学は場の理論によっている。**近接作用**の考え方である。近接作用と対比するものが**遠隔作用**である。例えば二つの質量があるとする。地球と私の関係でも良い。私は地球に引っ張られている。私も地球を引っ張っている。万有引力である。このように、相手が直接にこちらに作用していると考えるのが、遠隔作用の考え方である。一方、私に力が働いているのは、私の周りに力の原因となる場ができているという考え方。これが近接作用の考え方である。地球と言う質量の塊が、周囲に重力場を作る。重力場の中にいる私に対して、その場の重力と私の質量に応じた力が働く。重力場を作っている質量が変化すれば、間にある媒質を通じて、その変化が有限速度（重力の場合は光速）で相手方に伝わり、それが私のところに来た時点で私が受ける力も変化する。図 1.1 はこのイメージを示している。電磁気学も同じで、電界や磁界と言う場が近接作用で電荷や電流に作用しているという考え方が採られている。近接作用の考え方は、電磁気学の成立過程において、電気力線や磁力線のモデルを与えたファラデーによって生み出されたものである。

以下雑談。地球と月がテレビ電話で結ばれている。会話には 2.6 秒の時間差（光の速度での往復時間）が生じる。念力の達人が画面に映っている人に向けて、エイッと念波を送った。たちどころに転倒したら、これはオカルト。でも 3 秒後に倒れたら、近接作用の結果として本物かもしれない。

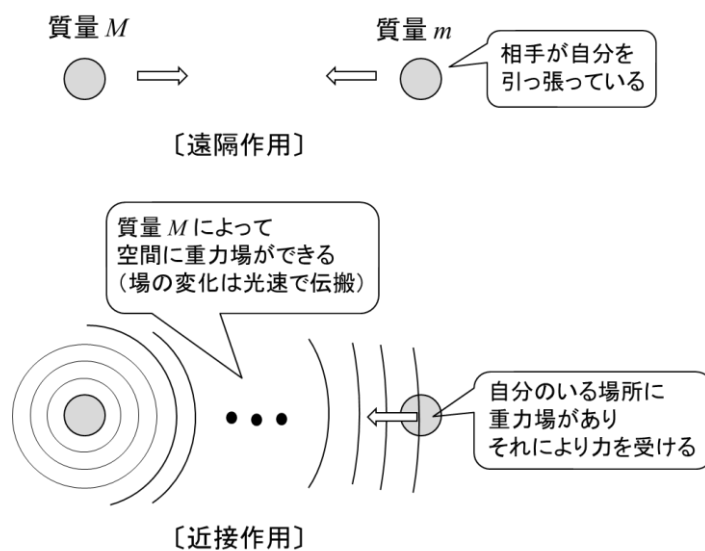


図 1.1 重力を例とした遠隔作用と近接作用の考え方

1.5 マクスウェルの方程式

これから学ぶマクスウェルの方程式は以下の4つであり、4つの法則に基づいている。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{電磁誘導の法則}) \quad (1.6a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{アンペア・マクスウェルの法則}) \quad (1.6b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{電束密度に関するガウスの法則}) \quad (1.6c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{磁束密度に関するガウスの法則}) \quad (1.6d)$$

マクスウェルが電磁気学を打ち立てたのは19世紀の後半(1873年、電気磁気論として集大成)である。20世紀に入りアインシュタインがニュートン力学を書き換える相対性理論を発表している。相対性理論では、慣性系において光速一定の下、二つの定速移動する座標系がローレンツ変換で結ばれることを示した。ガリレイ変換に基礎を置くニュートン力学は、その時点で近似の理論となった。電磁気学が完成したころ、ニュートン力学が完全な理論とみられていて、力学の性質に微妙な違いがあった電磁気学は近似の理論とみなされていた。しかし相対性理論が出て、ニュートン力学が近似の理論となったとき、立場が逆転して、電磁気学は厳密な理論の地位を得た。電磁気学(マクスウェルの方程式)には、相対性理論が規範とするローレンツ変換の性質が既に具備されていたのである。故に、相対性理論が生まれて物理学に一大革命が起きたときでも、電磁気学は無傷でそれを乗り切ることができたのである。さらに言えば、電磁気学は、相対性理論の誕生に大いに貢献したとも言えるのである。さあ、その電磁気学を学ぼう。

電磁気学の勉強を山登りに見立てる。山の名前はマクスウェル山、山頂には上記マクスウェルの方程式(4つの連立方程式)が置かれている。登山口は「電荷」である。ここから入って、電気や磁気の性質を持つ様々な物理量に出会い、それらの相互の関連を与える法則を学ぶ。道に迷わないためにはコースを記した登山地図が必要である。

図1.2はこの登山地図である。裾野あたりでは、静電気の性質を学ぶ。次に中腹に入り、磁気的性質を学ぶ。山頂付近には難所が多いが、電気と磁気の相互作用を学ぶ。山頂には、途中の①～④で出あった4つの方程式が置かれている。この方程式の意味を読み取ることによって、電磁気学の理論体系を理解する。山頂では、マクスウェルの方程式から導かれる電波の性質を眺めることができる。

登山地図から分かるように、この登山では、山頂目指して本筋の一本道になっていて、少し寄り道をすると楽しめるところを素通りしている。これについては、4章以降で取り上げてゆきたい。

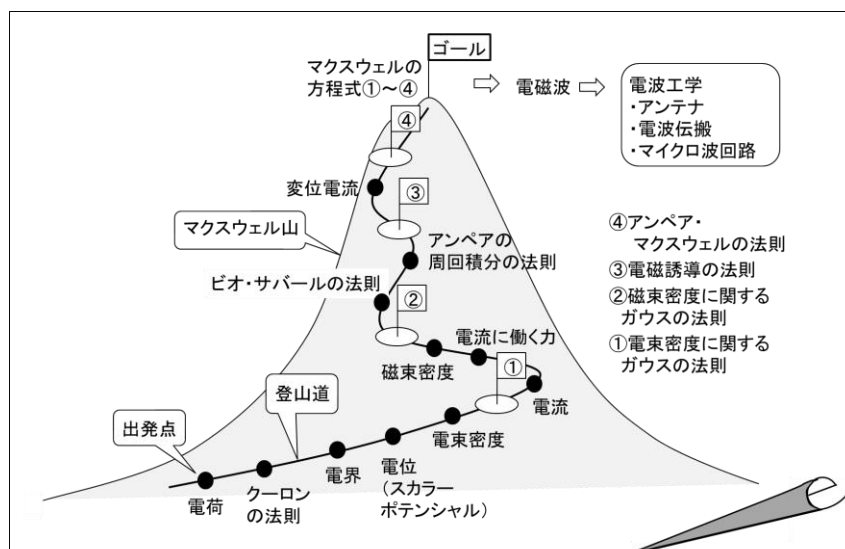


図 1.2 電磁気学習得の歩みをマクスウェル山登山に見立てた登山地図

(マクスウェル山 (電磁気学) の頂にあるもの: 太字で囲った 4 つの法則 (①～④) を表す連立方程式 (マクスウェルの方程式))

1.6 本書の構成

本書は 10 章よりなるが、そのうちの第 1 章～3 章で電磁気学の基本を述べる、すなわち学ぶための章 (一度学んでいる人には復習するための章) である。また、第 4 章～7 章を、学んだ電磁気学の要所に焦点を当て、理解を深めるための解説や議論に充てている。さらに、電磁気学の不思議を探検するための第 8 章及び 10 章を設けている。第 9 章は電磁気学の次の展開として無線通信の基本公式であるフリスの伝達公式を取り上げている。図 1.3 は本書の構成をまとめている。

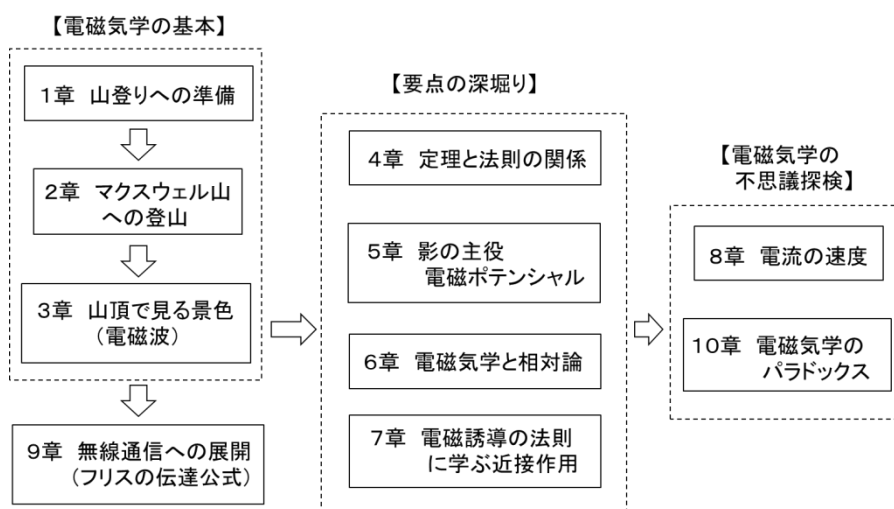


図 1.3 本書の構成

第2章 マクスウェルの方程式ができるまで（山登り）

電磁気学がテリトリーとする豊饒な世界の中の、マクスウェルの方程式に直接に関わる部分のみに焦点を当ててまとめる。電磁気学の学びを山登りに例え、マクスウェル山の頂上にある4つの方程式の理解を目指す。途中、極力、寄り道をせず（脇道にも大事なものはいっぱいあるが、それらには目を向けず）、メインストリートをひたすら頂上を目指して登るスタイルをとる。一般的な学部レベル電磁気学教科書内容の半分程度、しかし、エッセンスはほぼ全部含んでいる。不足する部分、補足したい部分、さらに奥深い部分については第4章以降で取り上げる。本章は著者流電磁気学教科書である。

2.1 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$: 電束密度に関するガウスの法則（図 1.2 の登山地図の①）

2.1.1 電磁気学の出発点：電荷

電磁気学は、電荷が荷電粒子として存在すると言うところからスタートする。点電荷の概念である。荷電粒子はすなわち電子（や電子が飛び出した後の原子）のことであり、量子力学が教えるとおり、電子は波のように、あるいは雲のように漠然としていて、存在位置は確率的にしか捕らえられない。しかし、これを少し離れたところから見れば、荷電粒子が特定の一点にあるように見える。電磁気学では、その荷電粒子から生み出される電磁現象が扱われる。

電子のもつ負の電荷の絶対値 e は電荷の最小単位で**電気素量**と呼ばれる。その値は電荷の単位クーロン[C]を用いて、以下である。

$$e = 1.60218 \times 10^{-19} [\text{C}]$$

金属などの物質は原子や分子の結合状態によって、その中の電子が自由に動き回ることができ、これが負の電荷を持つ荷電粒子である。電子が飛び出した後の原子や分子は正の電荷を持つ荷電粒子として振舞う。この電荷には、「発生や消滅は、必ず正・負等量の電荷で起こり、正あるいは負の電荷が単独で発生したり消滅したりすることは無い」、すなわち、「閉じられた系における総電荷量は常に一定である」という**電荷保存則**が成り立つ。

2.1.2 クーロンの法則

フランスのクーロン（Charles-Augustin de Coulomb、1736-1806）は1785年、自らが工夫して作ったねじり天秤を用いて、距離 r 離れた二つの電荷（ Q_1 と Q_2 ）に働く力 F を測定し、以下の関係を見出した。

$$F = k_e \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (2.1)$$

この関係は、発見者のクーロンに因んで**クーロンの法則**と呼ばれる。 k_e は比例定数であるが、

最終的に得られる式（要はマクスウェルの方程式）がすっきりした形なるよう便宜的に $k_e=1/(4\pi\epsilon_0)$ と置く。このようにして定義された ϵ_0 を真空の誘電率と呼ぶ。クーロンによる力の測定、さらにはその後の精密な測定により ϵ_0 は次の値を持つ。

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ [C}^2/\text{Nm}^2\text{]} \quad (\text{あるいは[F/m]})$$

力には向きが有り、同種の電荷（正と正、あるいは負と負）では反発力が、異種の電荷（正と負）では引力になる。力をベクトルで表し $\mathbf{F}$ 、 Q_1 から Q_2 に向かう距離をベクトル $\mathbf{r}$ とすると、クーロンの法則は以下である。

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2 \mathbf{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q_1 Q_2 \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{r}/r; r = |\mathbf{r}|) \quad (2.2)$$

1.1 節の法則の項で説明したように、法則はその正しさが数学的証明で得られるものではなく、あくまで、経験を積んでそれに例外があるかどうかで判断される。真実が距離の 2.001 乗あるいは 1.999 乗などの 2 に近い値であるかどうかは分からないが、2 乗と置いて、その後に例外が無く、故にそれが法則として定着しているのである。これは、自然は美しい形を好むと信じてのこともあるし、数学で示される世界が物理界に現れていると考えることにもよる（後者の議論は 4.2 節で）。

図 2.1 に示すように点電荷が複数ある場合 ($Q_1, Q_2, \dots, Q_n$) には、点電荷 Q に対する力 $\mathbf{F}$ はベクトルでの重ね合わせの理（あるいは重ね合わせの原理）が成り立ち、以下になる。

$$\mathbf{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3} \quad (2.3)$$

電荷が連続的に線上に並んでいる場合には線積分で、面上に並んでいる場合には面積分で、また、3次元に分布している場合には体積積分により求められる。

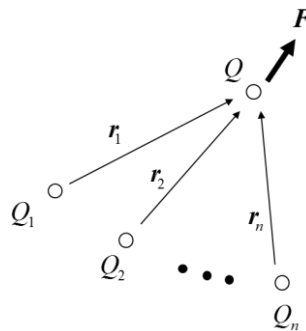


図 2.1

2.1.3 電界

(2.2)式のクーロンの法則を、電荷 Q_2 が受ける力として近接作用の目で見よう。ここで、場を作る Q_1 を Q に、力を受ける Q_2 を q に置き換える。 Q と q を結びつけるベクトル量を $\mathbf{E}$ とすると、(2.2)式は、以下のように書き表される。

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.4b)$$

このベクトル場 $\mathbf{E}$ を**電界**と呼ぶ。電界の大きさ E は次式のように距離の2乗に反比例する。

$$E = |\mathbf{E}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.4c)$$

電荷 Q が Q の外側に電氣的歪の場、すなわち、電界をつくり、 q の位置では $Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ の大きさになる。この場所に存在している電界が電荷 q に力を及ぼしていると解釈される。

複数の点電荷がある場合には、図 2.1 の力 $\mathbf{F}$ と同じように電界も重ね合わせの理が働き、次式となる。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3} \quad (2.5)$$

電荷が線上や面上に連続的に分布する場合は、電界は積分で求められるが、ここでは二つの例を示す。ここで示す例は、後に学ぶガウスの法則を利用することによってたちどころに求めることができるので、解法の比較の意味も兼ねている。

【例題 2.1】 線電荷密度 λ の一様な無限直線上電荷が作る電界を求めよ。

図 2.2 のように座標系をとり、 z 軸からの距離 r の点 P の電界を求める。対称性より、電界の z 軸方向成分は 0 である。 z 軸上の線要素 dz にある電荷が P 点に作る電界 $d\mathbf{E}$ は

$$d\mathbf{E} = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)}$$

$d\mathbf{E}$ の r 方向成分 dE_r は図より

$$dE_r = dE \sin \theta = \frac{\lambda r dz}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}}$$

となる。これより、求める電界は上記の積分により以下になる。

$$E = \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

■

【例題 2.2】 半径 a の球の表面に、電荷 Q が一様の密度で分布しているとき、球の外部及び内部の電界を求めよ。

図 2.3 に示すように、幅が $a d\theta$ 、半径が $a \sin\theta$ の円形リングを考える。この部分の電荷が z 軸上で中心から r の距離の点 P に作る z 方向の電界 dE は次式となる。

$$dE = \frac{Q \sin\theta (r - a \cos\theta)}{8\pi\epsilon_0 (a^2 + r^2 - 2ar \cos\theta)^{3/2}} d\theta$$

P 点の電界 E は、上式を $\theta=0 \sim \pi$ で積分することによって求まるが、以下のように、変数を θ から u に変換すると積分が容易になる。

$$u = a^2 + r^2 - 2ar \cos\theta$$

$$du = 2ar \sin\theta d\theta, \quad (a-r)^2 \leq u \leq (a+r)^2$$

これより、

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q}{32\pi\epsilon_0 a} \int_{(a-r)^2}^{(a+r)^2} \frac{u + r^2 - a^2}{u^{3/2}} du \\ &= \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 ar^2} \left(2a - |a-r| - \frac{a^2 - r^2}{|a-r|} \right) \end{aligned}$$

球の外部では、 $a-r < 0$ であるので、

$$E = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 ar^2} (2a + (a-r) + (a+r)) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

球の内部では $a-r > 0$ なので

$$E = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 ar^2} (2a - (a-r) - (a+r)) = 0$$

■

球の外部から見れば、電界は球の中心に点電荷 Q があるのと同じである。内部では至るところ 0 であるのも興味深い。この性質が、後に学ぶガウスの法則の下敷きになっている。

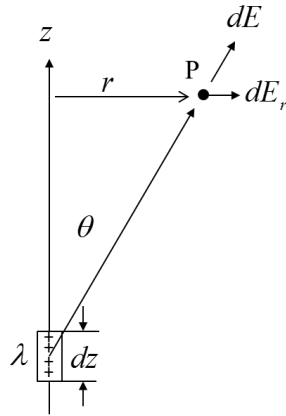


図 2.2

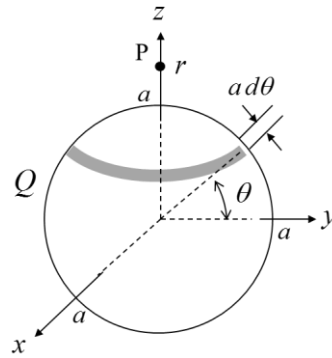


図 2.3

なお、電磁気学が難しいと言われる理由の一つに、この例のように、解法の途中に出てくる積分がなかなか解けない（あるいは面倒な）ことにある。しかしそれは電磁気学が難しいのではなく、微分・積分学の問題である。原因を切り離して考えると、電磁気学そのもの（最初の積分の式と最後の結果）は極めてすっきりとした学問に見えてくる。

最後に、点電荷が作る電界の発散を調べる。点電荷の場合の発散の計算には、(1.2c)式の球座標が良い。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\partial}{\partial r} (1)\end{aligned}$$

となるが、右辺の偏微分は定数（1）の微分なので、この部分だけ見れば0である。故に式全体を0と置きたいが、そう置けない唯一の例外がある。すなわち $r=0$ である。この場合は $0/0$ の形で、何も言えない。数学的にはこの部分が r に対するデルタ関数になり、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0} \delta(r) \quad (2.6)$$

となる。電荷が置かれている原点以外は発散は0であるが、原点を含む任意の領域で体積積分すると Q/ϵ_0 になることを意味している。これも、後に学ぶガウスの法則の下敷きになっている。

2.1.4 電位

空間に電界という電氣的歪の場があるのと同じように、**電位**と言う別の物理量で満たされる場を考える。電位はスカラー量であり、**スカラーポテンシャル**とも呼ばれる。文字は V あるいは ϕ が使われる。単位はボルト[V]である。電位 ϕ は電界（ただし、時間的に変化しない静電界） $\mathbf{E}$ と以下の関係で結ばれる。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (2.7)$$

すなわち、電界は電位の勾配（空間微分、傾き）になる。2点 P_1 と P_2 の電位をそれぞれ ϕ_1 , ϕ_2 とするとき、電位の差（電位差） ϕ_{21} は以下の線積分で表される。

$$\phi_{21} = \phi_2 - \phi_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.8)$$

電荷 q を P_1 から P_2 に運ぶとき、電界によって力を受けるので、エネルギー（仕事）が必要になり、その大きさ U_{21} [J] は

$$U_{21} = -q \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow \phi_{21} = \frac{U_{21}}{q} \quad (2.9)$$

右側の式より、電位差 ϕ_{21} はそのときの1クーロン当たりの仕事を表す量であることが分かる。この意味で、ポテンシャル（後で出てくるベクトルポテンシャルと区別して、スカラーポテンシャル）という言葉が使われている。

点電荷に対して距離 r にある点での電位は、無限遠方の電位を 0 とし、次式となる。

$$\phi = -\int_{\infty}^r E_r dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.10)$$

電位も重ね合わせの理が成立しており、複数の点電荷が有る場合には、個々の電位の和（スカラー量の和）となる。

(2.8)式は線積分が積分経路によらないことを示しているが、そのことは以下の論理で確認できる。電界は複数の電荷に対する重ね合わせの理が成立するので、点電荷が作る電界の回転を調べればよい。(1.3c)式に(2.4b)式の電界を入れると $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ であること、すなわち、時間的に変動の無い電界（静電界）では回転成分は無いことが容易に導かれる。ストークスの定理より、

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \rightarrow \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \rightarrow \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} (\equiv \phi_0) = 0 \rightarrow \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \text{constant}$$

(variable route) (fixed route) (variable route)

となり、最後の式より、電界の線積分は積分経路に依存しないこと、すなわち、 P_1 と P_2 の2点の電位のみで定まることが分かる。このような性質のある場を**保存場**と呼ぶ。

2.1.5 電束密度

電界と共に電氣的歪を表す場に重要な概念が**電束密度**である。**電束**とは電荷から発生しているもので正の電荷から始まり負の電荷で終わる（注：動的な電磁場では、渦状になる電束密度もあるので、静電場での性質）。単位は電荷と同じクーロン[C]である。同じイメージを与えるものに**電気力線**がある。電荷 Q からは Q 本の電束が、他に電荷が無い場合には、放射状に、かつ

角度的に均一に出ている。Q 本といっても、通常の電荷は 1[C]より小さいので、実際に目に見える本数とは意味が違って、仮想的なものである。電束密度は単位面積当たりの電束の量であり、方向を持つのでベクトル量である。これを $\mathbf{D}$ と書き、単位は[C/m²]である。

点電荷 Q では電束の総量は Q であるので、半径 r の球面上での電束密度は

$$\mathbf{D} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (2.11)$$

である。真空中での電界 ((2.4b)式) と比べると

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (\text{真空中}) \quad (2.12)$$

となり、向きを同じにする比例関係にある。

誘電体ではどういう関係になるかを調べる。本章では、誘電体の物理的性質（電界に対する分極のメカニズムなど）の説明は省略する。そのため、以下の説明で不足する部分は電磁気学の教科書等で補って欲しい。

図 2.4 に示すように、電極面積 S の平行平板コンデンサの内部に誘電率 ε の誘電体が挿入されている。上下の極板には $\pm Q$ の電荷が帯電している。面電荷密度 σ は $\sigma = Q/S$ である。誘電体が無い場合の極板間の電界は下向きに $E_0 = \sigma/\varepsilon_0$ である。誘電体は電界によって分極が起き、図のように、上面に電荷密度 $-\sigma_p$ の、下面に σ_p の電荷（分極電荷）が誘起される。媒質内の電界 $\mathbf{E}$ は分極電荷により、極板電荷の一部が相殺され以下となる。

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma - \sigma_p}{\varepsilon_0} \mathbf{E}_0 \quad (2.13)$$

誘電体の誘電率は、以下のように与えられる。

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0, \quad \varepsilon_r = \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_p} \quad (2.14)$$

ここで、 ε_r は比誘電率と呼ばれ、媒質によって異なる 1 より大きい値を持つ。

一方、電束密度は、電極間の電荷（真電荷）がつくる電束の密度で定義され、誘電体の有無によらない。すなわち、

$$\mathbf{D} = \sigma = \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.15)$$

電束密度は電界と同じ方向を向くベクトルであるので、誘電体中の両者の関係は次式となる。

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.16)$$

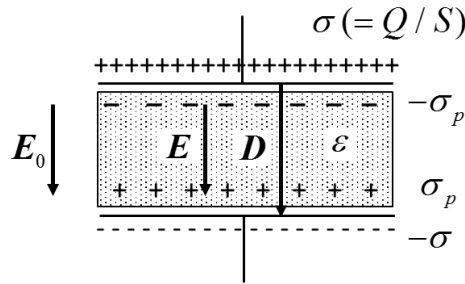


図 2.4

2.1.6 電界及び電束密度に関するガウスの法則

2.1.3 項において、電界に関する以下の性質を述べた。

1) 球の表面に電荷 Q が均一に分布する場合には、球の外では、原点に点電荷があるのと同じである。また、球の内部では、電界は至るところ 0 である。(例題 2.2)

2) 点電荷が作る電界の発散は、原点のみにあり、それ以外のいたるところで 0 である。(2.6 式)

これらから、電界に関して、以下の性質が予想される。

「任意の閉曲面 S を通って出て行く電界の総量(面に垂直な成分の積分値)は、その閉曲面内に含まれる全電荷を ϵ_0 で割ったものに等しい」

同様なことが、電束密度についても言え、

「任意の閉曲面 S を通って出て行く電束の総量は、その閉曲面内に含まれる電荷の総量に等しい」

これを式で表すと

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i \quad (\text{真空中}) \quad (2.17a)$$

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (\text{真空中}) \quad (2.17b)$$

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (\text{真空中、誘電体中共通}) \quad (2.18a)$$

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho dV \quad (\text{真空中、誘電体中共通}) \quad (2.18b)$$

(2.17a)式と(2.18a)は点電荷の集まりである場合、(2.17b)式と(2.18b)式は、電荷が電荷密度 $\rho[\text{C}/\text{m}^3]$ で連続的に分布する場合である。この関係は、(電界及び電束密度に関する) **ガウスの法則** と呼ばれる。1.1 節でも述べたように、法則はその正しさが数学的に証明されるものではなく、物理現象に対して例外なくその仕組みが働いているとみなされたものに与えられる。今日までガウスの法則に例外は無いので、そのまま受け入れて欲しい。

ガウスの法則は直感的に受け入れやすい。式(2.18)の例で説明したい。閉曲面で囲まれた内部

に二つの電荷 Q_1 と Q_2 を置く。図 2.5 において(a)は共に極性が正、(b)は Q_1 が正、 Q_2 が負 ($Q_1 > |Q_2|$) とする。同図(a)では、面から出て行く電気力線の数は $Q_1 + Q_2$ であって、閉曲面 S の形状や電荷がどの位置にあるかは関係ない。(b)では、面上での出入りはあるものの、正味に出て行く電気力線の数は $Q_1 - |Q_2|$ 、すなわち、こちらも $Q_1 + Q_2$ である。ガウスの法則が正しそうなのは至極当然と言う気分になってくる。

ガウスの法則の利点は、対称構造の荷電物体に対して、電界がきわめて容易に計算ができることである。これを先の例題 2.1 と 2.2 で味わってみたい。

まず、例題 2.1. 半径 r 、 z 方向長さ l の円筒で直線状電荷の一部を覆い、この円筒の表面での電界を考える。円筒の底面と上面は、 z 方向の対称性から、そこから z 方向に向く電界は残らない、故にこの二つの面からの電界は 0 である。一方、側面からも最終的に残る電界は r 方向のみであり、大きさは面上均一である。(2.17b)式を適用すると、

$$\text{左辺} = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 2\pi r l E_r$$

$$\text{右辺} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

これより、

$$2\pi r l E_r = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \rightarrow E_r = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \quad \blacksquare$$

例題 2.2 はもっと容易に解ける。球の外側に半径 r の球を置くと、その内部に Q があるのであるから、

$$\text{左辺} = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi r^2 E_r$$

$$\text{右辺} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

ゆえに、球の外部では、

$$E_r = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \quad (r > a)$$

球の内部では、半径 r の球内に電荷はないのであるから

$$E_r = 0 \quad (r < a) \quad \blacksquare$$

このように、対称構造の荷電物体からの電界、電束密度、電位はガウスの法則を適用することによって、複雑な積分を解くことなく簡単に求めることができる。種々の形状での応用問題が教科書や問題集に載っているので、各自で試して欲しい。

最後に、電束密度の関するガウスの法則 ((2.18b)式) を変形する。同式の左辺をガウスの発散

定理で書き直すと、

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV$$

となり、同式の右辺と同じ積分になるので、それぞれの被積分関数が等しいと置いて

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.19)$$

が得られる。

ここまで、長々説明してきたが、これによって、マクスウェルの方程式の一つ

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

を得ることができた。

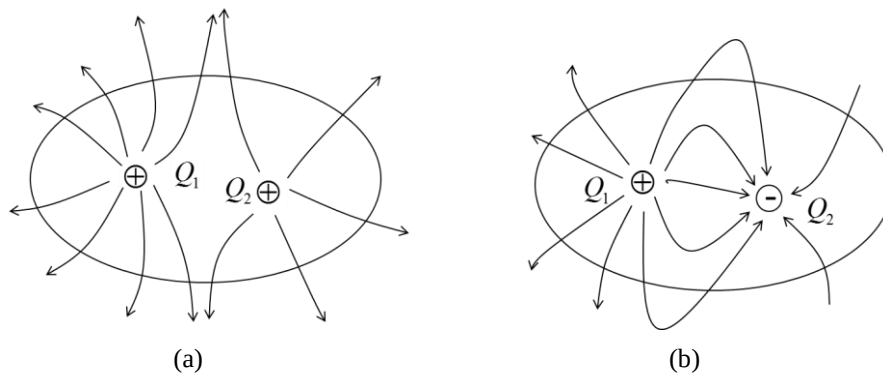


図 2.5

2.2 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$: 磁束密度に関するガウスの法則 (登山地図の②)

2.2.1 電流と電流密度

電流と**電流密度**を学ぶ。電気回路の授業では、電流は電圧と共に回路網表現の主役であった。電磁気学では、電流は磁氣的性質を持つ場（磁束密度や磁界）を生み出す役割を担い、電気と磁気の主役を支える位置づけになる。

電流は、媒質中の電荷の動きを与える量で、1秒あたりに通過する電荷の量で定義される。単位は $[\text{C/s}]$ であるが、アンペア $[\text{A}]$ が用いられる。アンペアは電気代表として国際単位系の基本単位になっている。単位面積を流れる電流は**電流密度**と呼ばれる。電流密度は向きと大きさを持つベクトル量、単位は $[\text{A/m}^2]$ である。電流は I 、電流密度は $\mathbf{i}$ の記号がよく用いられる。

物理的には電流は電子の移動であり、電子の電荷量は負であるので、電子が左に動くとき、電流は右に流れると定義される。電流の向きが実体である粒子（電子）の動く方向と反対になるのは感覚に合わないが、電磁気学構築の過程における歴史的都合として受け入れられている。

電気回路では、抵抗 R [Ω] を流れる電流 I は電圧 V [V] に比例し、 $I=V/R$ で与えられる。この関係は**オームの法則**と呼ばれる。抵抗 R は長さ l に比例し、断面積 S に反比例するので、以下の式で表される。

$$R = \eta \frac{l}{S} \quad (2.20)$$

比例係数 η は**抵抗率**と呼ばれ、単位は [Ωm] である。抵抗率の代わりに、その逆数で定義される**導電率** σ も用いられる。単位は [$\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$] である

$$\sigma = \frac{1}{\eta} \quad (2.21)$$

図 2.6 に示すように、抵抗体中に流れる電流を、 Δl , ΔS , ΔV , ΔI の範囲に限って微視的に見る。この微小領域の中では

$$\Delta V = \eta \frac{\Delta l}{\Delta S} \Delta I$$

である。ここで、 $\Delta V/\Delta l \rightarrow E$ (電界), $\Delta I/\Delta S \rightarrow i$ と置くと、上式は $E = \eta i$ となる。これをベクトルで表すと

$$\mathbf{E} = \eta \mathbf{i} \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.22)$$

となる。(2.22)式は、損失がある媒質中の電磁波の解析に大事な式である。

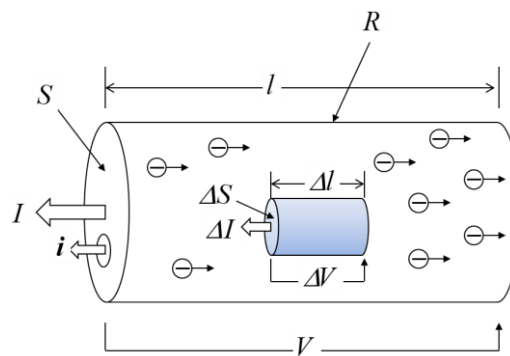


図 2.6

2.2.2 電荷保存則

2.1.1 項でも述べたように、電荷には「発生や消滅は、必ず正・負等量の電荷で起こり、正あるいは負の電荷が単独で発生したり消滅したりすることは無い」、すなわち、閉じられた系における総電荷量は常に一定であるという**電荷保存則**が成り立つ。電流は電荷の動きで表される量であり、かつ電荷の動きも連続的であるため、電流も不連続に変化することはない。分岐や合流、

あるいは反射などにおいて、不連続に見えるが、全体としてみれば、その大きさに不連続はない（例えば、 I_1 が I_2 と I_3 に分岐する場合は $I_1=I_2+I_3$ が保たれ）。故に、電荷保存則は**電流連続の法則**と読み替えることができる。

以下、個々の電荷がばらばらに動いている環境（**非定常電流界**）における電荷保存則を数式で表す。図 2.7 に示すように、閉曲面 S の内部に多数の電荷があり、それらが動き回って、内部から外部に出て行く状態を考える。ある時点 t での内部の電荷量を $Q(t)$ とし、微小時間 dt の間に dQ が外部に出たとする。このとき、面から流れ出た電流は以下の式で表される。

$$I = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{dQ}{dt}$$

ここで、

$$Q = \int_V \rho dV \quad (\rho: \text{電荷密度 [C/m}^3])$$

より、

$$\int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho dV \right) \rightarrow \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

ガウスの発散定理より、上式の左辺は

$$\text{左辺} = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{i} dV$$

であるので、電荷保存則は以下の微分方程式にまとめられる。

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.23)$$

(2.23)式で表される性質（すなわち電荷保存則）は、2.5 節で述べるように、アンペアの法則（後に与える(2.42c)式）の不備を顕在化し、マクスウェルが変位電流を導き出す動機を与える重要な意味を持つ。

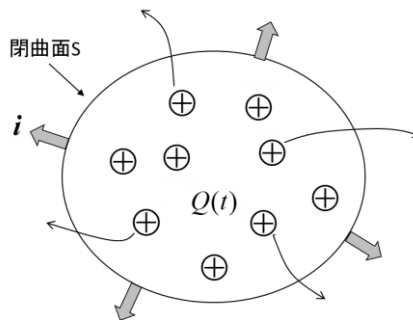


図 2.7

2.2.3 電流に働く力

古代ギリシャの時代より、鉄を引き寄せる石として磁石はすでに知られていた。中世には磁石の性質を利用した羅針盤も発明されている。これらの時代においては、磁石は磁気の性質として理解され、電気の性質と結び付けられることは無かった。

1820年、デンマークのエルステッド (H. C. Oersted, 1777-1851) は電流が永久磁石と等価な働きをすることを発見した。この発見を契機としてフランスのアンペア (A. M. Ampère, 1775-1836) は、二つの電流間に働く力を定量的に調べてその関係を明らかにした。

アンペアの実験によれば、図 2.8 に示すように、十分長い直線導線 2 本を距離 r 離して平行に置き、それぞれに電流 I_1, I_2 を流すと、長さ l の導線部分に以下の力 F が働くことを見出した。

$$F = 2k_m \frac{I_1 I_2}{r} l \quad (2.24)$$

力 F には向きがあり、電流が同じ向きでは引き合い、反対向きでは反発する。比例係数 k_m は媒質によって異なるが、真空中では、

$$k_m = 10^{-7} \text{ [N/A}^2\text{]} \quad (\text{真空中})$$

となる。係数 k_m は測定によって決まった値ではなく、電流の定義に使われた値である。すなわち、「真空中で、距離 1m 離れた十分長い 2 本の平行導線に等しい大きさの電流を流したとき、導線の長さ 1m あたりに働く力が $2 \times 10^{-7} \text{ N}$ となる電流を 1A にする」と。

さらに後の便宜のために (=最終的な式が美しい形になるように)、

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

で定義される μ_0 を導入する。 μ_0 は真空の透磁率と呼ばれ、

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ [H/m]} \quad (2.25)$$

となる。単位を構成する H はインダクタンスの単位ヘンリーである。

(2.24)式で表される力 F を透磁率 μ_0 を用いて表すと次式に整理できる。

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} l \quad (2.26)$$

真空中のクーロンの法則に出てきた比例係数 k_e ((2.1) 式) と k_m は、以下の関係式で結ばれる。

$$\frac{k_e}{k_m} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2 \quad (c: \text{光速}) \quad (2.27)$$

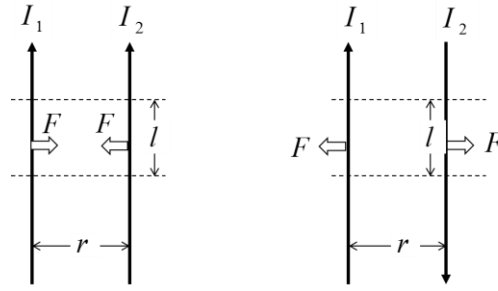


図 2.8

$1/\epsilon_0\mu_0$ が c^2 となることは、マクスウェルの方程式を解いた結果として明らかになることではあるが、電気と磁気の係数が光の速度に関連するという性質は、非常に興味深い。

2.2.4 磁束密度

(2.24)式の電流に働く力を、電流 I_2 が受ける力として近接作用の目で見よう。ここで、場を作る I_1 を I_0 に、力を受ける I_2 を I に置き換える。 I_0 と I を結びつけるベクトル量を $\mathbf{B}$ とするとき、そのスカラー量で表した(2.24)式は、以下のように書き表される。

$$F = IBl \quad (2.28a)$$

$$B = |\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \quad (2.28b)$$

エルステッドの発見から明らかなように、電流によって作り出される場は磁気的な性質を持つ場であり、ここではこれを**磁束密度**と呼ぶ(注1)。磁束密度の単位は[N/Am]であるが、テスラ[T]で呼ばれる。

直線上に流れる電流に対して、コンパス(磁針)で磁場の向きを調べると、電流方向を軸として円形になる。これより、ベクトル場：磁束密度 $\mathbf{B}$ は、電流にも力にも直交する向きを持ち、次式で表される。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_0 \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}}{2\pi r^2} \quad (2.29)$$

電流の流れる向きは、磁束密度の回転方向に対して右ねじが進む方向になる。この $\mathbf{B}$ と電流 I が流れる長さ dl あたりに働く力 $d\mathbf{F}$ は

$$d\mathbf{F} = Idl \times \mathbf{B} \quad (2.30)$$

となり、 F, B, I の向きの関係は**フレミングの左手の法則**に従う。フレミングの左手の法則は左手の親指、人差し指、中指をそれぞれ直角方向に向け、上記の順で F, B, I (FBI: アメリカの連邦捜査局) に対応させ、 B と I の向きを与えたときの力 F の向きを示す。その関係を図 2.9 に示す。

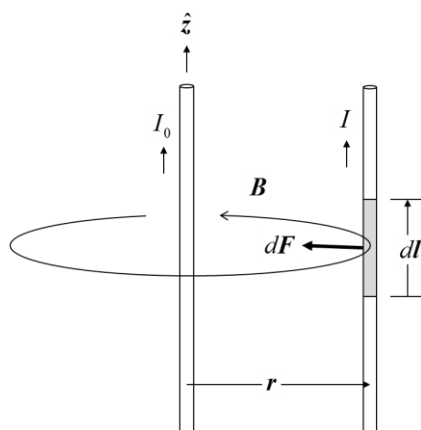


図 2.9

注 1：電流の周りに磁気的な歪をもたらす場が発生する、これを、あえて磁束密度と呼ばずに、素直に「磁界」と呼びたい気持ちになる。残念ながら、使いたい用語である「磁界」が既に別の定義で使われているため、違う名前にせざるを得ないという歴史的事情はわかる。一方、上式で B の単位を見ると $[N/(Am)]$ であり、組立単位は $[0,1,-2,-1]$ である。磁石の力学から生まれている磁荷(磁束)の単位 $[Wb]=[Nm/A]=[2,1,-2,-1]$ を使うと、 B の単位は $[0,1,-2,-1]=[Wb/m^2]$ となって、なるほど、「磁束密度」と呼ぶことが納得できる。ずいぶん不親切な入り方であったが、単位を知って疑問が解け、磁界とつけなくて良かったという気分になってくる。電磁気学は先人の知恵によってうまく組み立てられている。

2.2.5 磁束密度に関するガウスの法則

前述のとおり磁束密度は電流によって生み出され、その磁束はループになっていて始まりも終わりもない。それゆえ、任意の閉曲面 S で囲まれる空間を考えたとき表面を出入りする磁束は等量となり、正味 0 である。空間内に単体の磁荷(単極磁荷)が無いのである。故に、磁束密度の閉曲面上の積分は 0 となり、

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2.31)$$

である。ガウスの発散定理より、

$$\text{左辺} = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV$$

となり、左辺=0 であるので、

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.32)$$

である。この式が**磁束密度のガウスの法則**を表している。電束密度のガウスの法則から、電束の源は電荷であったが、磁束には磁荷という源が無いことを示している。

全ての磁気現象が電流起因であることに現時点で例外はない。永久磁石も原子レベルで見れば荷電粒子のスピンがあり磁気の原因（磁気モーメント）が内在する。地球や太陽などの磁気を持つ天体も内部の荷電流体運動によって大規模な磁場を生成・維持する働きをもつとされ、**ダイナモ効果**、**ダイナモ作用**と呼ばれている。

未来において、単独磁化（単極磁荷）が発見されれば、(2.32)式が崩れ、電磁気学理論に大変革をもたらすことになるが、そのようなことにはならないのではないかと著者は思う。なぜなら、磁界の発生メカニズムは全て電流によって説明できており、単独磁荷の存在を必要としないためである。そう思うには別の理由もある。詳しいことは電磁気現象の相対論効果を扱う6章で述べるが、電界と磁界は独立に存在するものではなく、観測者（動いている観測者、異なる慣性系にある観測者）に依存し、物事の表と裏のような関係で、両者が姿を入替ながら見え隠れしていると言う描像である。このことによって、ニュートン力学的には矛盾する電磁気学の力学現象が、相対性理論によって全て辻褄が合うよう説明できるからである。このためには、電界も磁界もその根源は電荷にあるということのみによって説明できるのではないかと著者は確信している。

ここまで、磁氣的性質を長々説明してきたが、これによって、マクスウェルの方程式の二つ目

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

を得ることができた。

2.3 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}$: アンペアの法則

2.3.1 ビオ・サバールの法則

ビオ・サバールの法則は、電流素辺が、それに対応する磁場（磁束密度やこの後出てくる磁界）を作ることを示す法則である。この法則から、磁場の全体は、電流の領域全体の積分になると言う描像を与えてくれる。

電荷が作る電界についておさらいをする。図 2.10(a)で、 z 軸上の微小区間 dz に電荷が電荷密度 λ [C/m]で分布している。このとき、図の P 点における電界の z 軸と直交する方向成分 dE_x は、クーロンの法則より、

$$dE_x = \frac{\lambda dz \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

である。同図(b)に示す微小区間 dz を流れる電流素片 I により、 P 点に発生する磁束密度 dB は、同じように、

$$dB = \frac{\mu_0 I dz \sin \theta}{4\pi r^2} \quad (2.33)$$

と推定してもよいであろう。この二つの式より、電気と磁気の間には $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{B}$, $\lambda \leftrightarrow I$, $1/\epsilon_0 \leftrightarrow \mu_0$ の対応関係が有る。

ビオ・サバールの法則は実験で確認することが困難である。それは連続で流れる電流の微小部分だけを取り出すことができないためである。しかし、(2.33)式が正しいとして、理論値が得られる設定（例えば無限直線状導線（例題 2.3））から積分等で求めた結果が、理論値や測定値に一致すれば、その正しさの確認にはなる（証明ではないことに注意）。そのような種々の検証の結果、(2.33)式による推定を誤りとする事例は無く、故に法則と認められ、発見者（J. B. Biot; 1774-1862, F. Savart ; 1791- 1841）に因んで**ビオ・サバールの法則**と呼ばれている。この法則は、任意の形状に流れる電流（時間的に変化しない定常電流）に対して、磁束密度を積分で計算できる（通常は数値計算）ので、非常に有用な式である。ビオ・サバールの法則をベクトルで表すと以下である。

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (2.34a)$$

電流の方向は任意なので、 $d\hat{\mathbf{z}} \rightarrow d\mathbf{l}$ として、一般的に表すと、

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (2.34b)$$

となる。

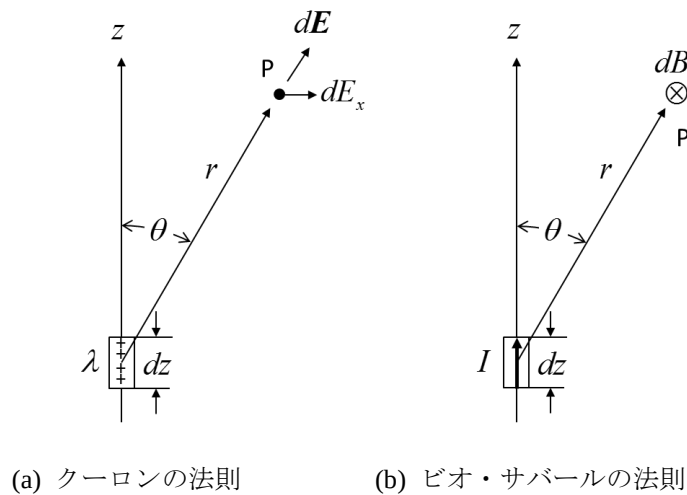


図 2.10 電界と磁束密度の発生の類似性

以下、ビオ・サバルの法則が適用できる典型的な二つの例題を示す。

【例題 2.3】 図 2.10(b) の座標系において z 方向無限直線状導線に流れる電流 I が P 点 (z 軸からの距離 a) に作る磁束密度を求めよ。

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 a I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} dz$$

$$= \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right]_0^{\infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

この結果は(2.28b)式に一致している。

【例題 2.4】 図 2.11 に示すように、半径 a の円形線状導体に電流 I が流れている。このとき、円の中心軸上で、中心から距離 x 離れた点 P における磁束密度を求めよ。

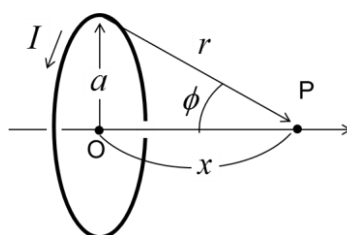


図 2.11

$$B_x = \frac{\mu_0 a I}{4\pi (x^2 + a^2)^{3/2}} \oint_c dl$$

$$= \frac{\mu_0 a^2 I}{2 (x^2 + a^2)^{3/2}}$$

中心点 O では、

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

2.3.2 ベクトルポテンシャル

本章では、マクスウェルの方程式ができるまでを一直線に進むことを目的にしている。そういう意味ではこの節は無くても良い。なぜなら、マクスウェルの方程式を整理して4つの方程式に集約したヘルツとヘビサイドが、マクスウェル自身のベクトルポテンシャルを含んだ複雑な方程式群から、余計なものとしてこれを消してしまい、陽に現われてこないからである。では、避けて通ってよいかということそうではない。マクスウェルの方程式は電界と磁界の振る舞いとしてまとめられているが、もっと本質は、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルで表現すべきではという議論があるからである。ベクトルポテンシャルについては第5章で詳しいこと述べたい。ここでは、定義についてのみを述べるに留める。

ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ は、以下のように天下りの定義される。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.35)$$

「磁束密度 $\mathbf{B}$ は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ だから、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ と表すことができる。なぜなら、ベクトル公式により $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ であって、 $\mathbf{A}$ は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を自動的に満たしているからである。このベクトル場 $\mathbf{A}$ をベクトルポテンシャルと呼ぶ。」と。感覚的には、磁束密度 $\mathbf{B}$ は何か渦のようなもので、その渦の元（回転力）がベクトルポテンシャルだと。

2.3.3 磁界

電磁気学は単極磁荷の存在を認めていない。しかし、永久磁石の一方だけを見て、実効的な意味での単極磁荷とみなすようなことはイメージできる。電磁気学が今の形になる以前、磁荷を用いた力学ができていて、単極磁荷 Q_m と別の単極磁荷 q_m （単位[Wb]）の間には電荷に対するクーロンの法則と同じように力が働き、磁荷 q_m に対し

$$F = \frac{Q_m q_m}{4\pi\mu_0 r^2} = q_m H \quad (2.36a)$$

$$H = \frac{Q_m}{4\pi\mu_0 r^2}, \quad \mathbf{H} = \frac{Q_m \mathbf{r}}{4\pi\mu_0 r^3} \quad (2.36b)$$

の関係を定め H （向きがあるのでベクトル $\mathbf{H}$ ）を磁界と呼んだ。単位は[N/Wb]であり、[Wb]=[Nm/A]なので[A/m]である。（この $\mathbf{H}$ を「磁界の強さ」と呼ぶ教科書もあるが、 $|\mathbf{H}|$ が「磁界の強さの強さ」になってしまい、落ち着きが悪い。）

磁界と磁束密度の関係を見てみる。磁束密度は電流に働く力を生み出す場として定義したが、単極磁荷を認めるならば、磁荷から距離 r にある磁束密度は

$$\mathbf{B} = \frac{Q_m \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (2.37)$$

である。(2.36b)式と(2.37)式の比較から、真空中においては、磁束密度と磁界は

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (\text{真空中}) \quad (2.38)$$

で関係付けられる。

上記では、電磁気学ではその存在が否定されている単極磁荷を用いた説明をしたが、図 2.12 に示す双極磁荷（微小磁気ダイポール）と微小ループ電流の磁気モーメントの等価性より (2.38) 式の関係の導くことができる。ここではその詳細は述べないが、両者の磁力線の形を遠方から見れば、その等価性が感覚的に理解できると思う。

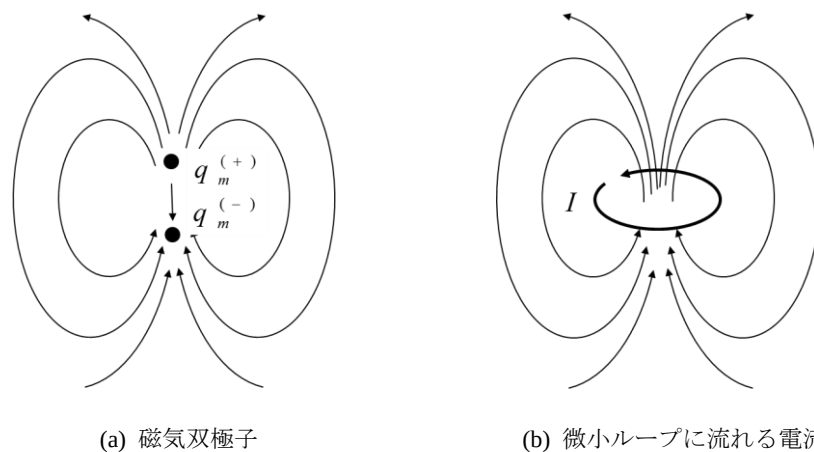


図 2.12 磁気双極子と微小ループ電流が作る磁場の等価性（遠方から見たときの）

磁界中で、 $\mathbf{B}$ と $\mathbf{H}$ の関係が変わる媒質は**磁性体**と呼ばれる。全ての物質は強弱の差はあれ磁性体の性質があるが、通常、磁性体と言え、磁界中で磁石の性質を持つ**強磁性体**（鉄、コバルト、ニッケルなど）を言う。本章では、磁性体が磁化するメカニズム（分極、磁化電流など）や磁性体の性質の説明は割愛する。

以下では、磁性体中の電束密度と磁界の関係を、図 2.13 に示す無限長ソレノイドの場合で説明する。単位長当たりの巻数を n 、電流を I とすると、次節で示す例題 2.6 より、ソレノイド内では磁界は一樣になり、磁性体の有無によらず次式で与えられる。

$$\mathbf{H} = n\mathbf{I} \quad (2.39)$$

磁界は真電流、すなわち実際に流れている電流 I 、によって生み出される。一方、磁束密度は磁性体内の磁化によって、内部に均一に渦電流が発生する。そしてその内部の渦は隣同士で打ち消され、見かけ上、磁性体の表面のみに電流が残ることになり、**磁荷電流**と呼ばれる。磁性体内部の磁束密度は外部のコイルに流れる電流（真電流）に磁荷電流が加わったものが作り出す。

磁性体が無い場合は、ソレノイド内の磁束密度は $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ であったが、磁化電流により

$$\mathbf{B} = \mu n \mathbf{I} = \mu \mathbf{H} \quad (\mu = \mu_r \mu_0) \quad (2.40)$$

となる。 μ は磁性体の透磁率、真空中の透磁率との比を表す μ_r は**比透磁率**と呼ばれる。強磁性体

に分類される磁性体では、比透磁率は1よりかなり大きな値を持つ(例えば、純鉄で5000程度)。異方性を持つ特殊な磁性体を除き、磁界と磁束密度は同じ方向を向き、以下となる。

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{磁性体}) \quad (2.41)$$

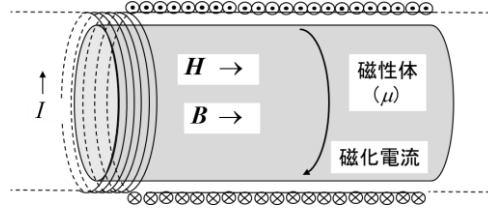


図 2.13

2.3.4 アンペアの周回積分の法則

無限直線状電流 I に対する、距離 r における磁界は、(2.28b)式より、

$$H = B / \mu_0 = \frac{I}{2\pi r}$$

である。半径 r の円周に沿って磁界の経路方向成分の積分を行うと I になる。この値は、半径 r の大きさによらない。ここから、電流を中に含む任意の閉路 c を考え、その経路で磁界の経路方向成分に対して周回積分を行えば、 I になるのではないかと推測できる。重ね合わせの理から、さらに一般化し、複数の電流に対して以下の仮説が立てられる。

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n I_n \quad (2.42a)$$

この仮説は、時間的な変動のない静磁界において成立しており、**アンペアの周回積分の法則**、あるいは**アンペアの法則**と呼ばれる。言葉で表すと、「静磁界において、任意の閉路 c を考えるとき、経路上の磁界の経路方向成分を経路に沿って周回積分を行うと閉路 c の内部に存在する電流の和になる」である。電流が面内に連続的に分布している場合には、閉路 c で囲まれる任意の曲面 S において、以下の式が成り立つ。

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.42b)$$

ストークスの定理より左辺は

$$\text{左辺} = \oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS$$

であるので、(2.42b)式は

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} \quad (2.42c)$$

と微分形で表記できる。一切の無駄が無いエッセンスと感じられる。

アンペアの法則は、電界を求めるときのガウスの法則と同様、対称構造の電流に対する磁界を求めたいときにその有用性が発揮される。以下典型的な例題を三つ示す。

【例題 2.5】 例題 2.3 (図 2.10(b)) をアンペアの法則を使って磁界を求めよ。

z 軸を中心に半径 a の円を考え、これを積分経路とする。(2.42b)式の左辺は $2\pi rH$ 、右辺は I なので、 $H=I/(2\pi r)$ となる。 ■

【例題 2.6】 図 2.14 に示すような単位長さ当たりの巻数 n の無限ソレノイドに電流 I が流れているときの磁界を求めよ。

対称性より、磁界の方向はソレノイドの中心軸方向であり、大きさは軸方向に一定である。ソレノイドの内部と外部をつなぐ形で、図のような軸に平行な矩形 ABCD よりなる閉路 c をとると、 c 上で

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_{AB}l - H_{DC}l = nIl$$

である。ここで、 l は辺 AB、CD の長さ、 H_{AB} 、 H_{DC} は、それぞれの辺上の磁界の大きさを表している。図で、辺 DC を固定し、矩形を保ったまま辺 AB をソレノイドのどの位置に動かしても上式に変化は無いため、 H_{AB} はソレノイド内で均一である。次に、辺 AB を固定した状態で辺 CD を動かしても上式に変化が無く、ゆえに、 H_{DC} はソレノイドの外で均一である。さらに、辺 CD をソレノイドから無限に遠方に移しても、上式は変わらないが、 H_{DC} は空間的に広がりによって弱くなるはずで、無限遠では 0 である。以上のことを論理的にまとめると、次の結論になる。

$$H = nI \quad (\text{ソレノイド内部、向きは軸方向})$$

$$H = 0 \quad (\text{ソレノイド外部})$$

■

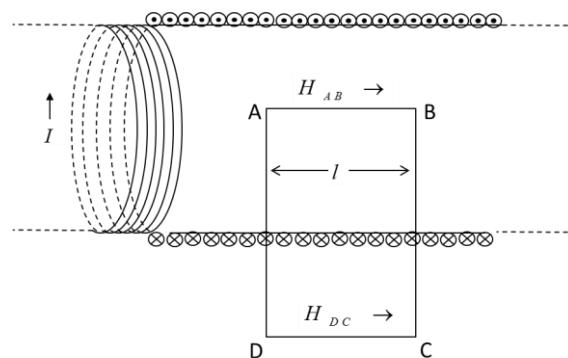


図 2.14

【例題 2.7】 図 2.15 に示すような環状ソレノイド（半径 a 、巻数 N ）に電流 I が流れているときの円環中心路 c 上の磁界を求めよ。

対称性より、閉路 c では、閉路が作る面内を NI の電流が流れているので、

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi a H = NI \rightarrow H = \frac{NI}{2\pi a}$$

である。ちなみに、同じ面で、閉路 c をソレノイドの外側（中心から遠い方向）にとれば、中を流れる電流は $NI - NI = 0$ となって磁界は 0 である。同様に、ソレノイドの外側で中心に近い側でも、電流は 0 であるので、磁界は 0 である。 ■

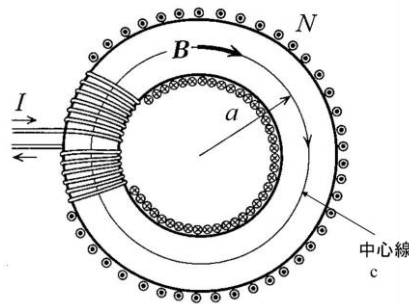


図 2.15

なお、ここでは磁界 H を求める問題としているので、媒質が真空であるか磁性体であるかを問わない。磁束密度 B を求める問題であれば、真空中では $B = \mu_0 H$ 、磁性体中では $B = \mu H$ と置き換えればよい。

これらの例題により、アンペアの周回積分の法則（アンペアの法則）の有用性が体感できたと思う。同じことは、ビオ・サバールの法則を用いても行えるが、特に例題 2.7 については、式もその解法も複雑になり、コンピュータを用いた数値計算に頼らざるを得ない。

以上述べてきたようにして、大事な方程式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}$$

を導いたが、この式はマクスウェルの方程式にある形ではない。その理由については 2.5 節まで待つて欲しい。

2.4 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$: 電磁誘導の法則 (登山地図の③)

2.4.1 ファラデーの電磁誘導の法則

エルステッドが電気（電流）の磁気作用を発見したのは1820年であった。その後、多くの研究者によって磁石から電気を生み出す試みがなされたがうまく行かず、ついに、その扉を開いたのはイギリスのファラデー、1831年であった（アメリカのヘンリーも同時期に発見したことが知られている）。図2.16のように、磁石のそばでコイルを動かす、あるいは、コイルのそばで磁石を動かすときだけ検流形が振れるのに気付いたのである。ファラデーの発見によるこの現象は**電磁誘導**と呼ばれる。その後、ドイツのレンツにより、コイルに発生する起電力の向きに関するレンツの法則、すなわち、「電磁誘導によって生じる電流（**誘導電流**）の向きは、変化する磁力線の密度の変化を妨げる方向になる」を発見した（1834年）。さらに、イタリアのノイマンは、図2.16に示すループに生じる起電力（**誘導起電力**） V とループを貫く磁束 Φ_m の関係を、以下の式で示した。

$$V = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (2.43)$$

符号が負となるのは、レンツの法則による磁界の変化を妨げる方向に電圧が発生することを意味している。(2.43)式を、**ファラデーの電磁誘導の法則**、あるいは、**電磁誘導の法則**という。

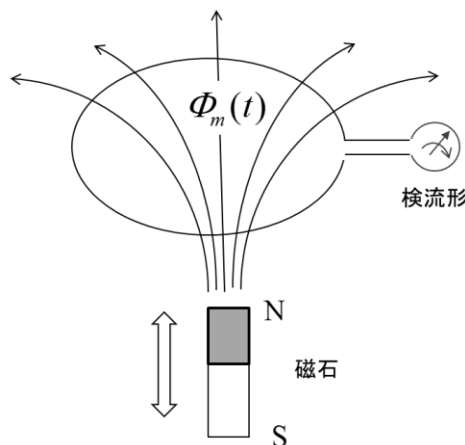


図 2.16 電磁誘導

閉路 c 、それを縁とする任意の面を S とするとき、(2.43)式の両辺は、それぞれ以下のように変形できる。

$$\text{左辺} = V = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\text{右辺} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

これより、電磁誘導の法則は、次式の微分形で表される。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.44)$$

この式から、電磁誘導は以下のように読み解ける。「磁束密度（あるいは磁界）の時間的変化があるところでは、その場所に電界の回転というベクトル場を生み出す」。さらに、ストークスの定理によって次のように展開できる。「そのようにして生み出された場の周囲には渦状の電界が現われる。その中に、導線を置くと、その導線はその場の電界を感じ取って起電力を生む」。繰り返しになるが、電界の回転（ $\nabla \times \mathbf{E}$ ）は、その周囲に渦状の電界を生み出す種であって、電界の回転と渦状の電界は異なる物理量（ベクトル場）と言う認識を持って欲しい。

電磁誘導の典型的な応用問題に以下の例題がある。

【例題 2.8】 図 2.17 に示すように、回路を含む面の垂直方向に磁束密度 $\mathbf{B}$ の一様な磁場がある（注）。この中に、抵抗 R で結ばれた平行導線があり、この上を導線が接触したまま一定速度 v で動く。それぞれの辺を図のように a, b, c, d としたとき、 $abcd$ は矩形の閉回路を作る。辺 b, d の長さを l 、 a, c の長さを x とする。このとき閉ループに流れる電流 I を求めよ。

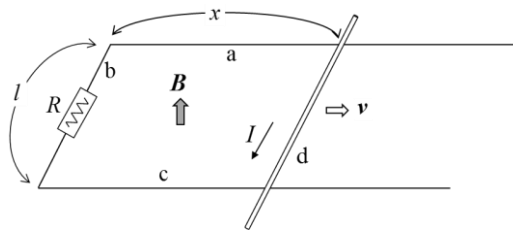


図 2.17

【解法】 電磁誘導の法則により、回路に発生する起電力 V は

$$V = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Blv$$

電流 I は、オームの法則より Blv/R 、向きは図の矢印方向（磁束密度の増加を防ぐ方向） ■

電磁誘導とはこういうものと言われれば、納得せざるを得ないが、この問題についてはいろいろの突っ込みどころがある。これについては、第 7 章で議論したい。

まとめると、電磁誘導の法則は

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

で表され、これがマクスウェルの方程式のうちの三番目である。

2.5 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$: アンペア・マクスウェルの法則 (登山地図の④)

イギリスのマクスウェルは、それまでに得られている種々の法則から電磁気学理論の構築を目指していた。しかし、これらをどのように組み合わせても、そこから電磁波は出てこなかった。既存の法則だけでは何かが足りなかったのである。それは何であろうか。

これまでに出てきた法則を見ると次の関係に矛盾が見られる。

$$\cdot \text{アンペアの法則: } \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} \quad (2.45)$$

$$\cdot \text{電荷保存則: } \nabla \cdot \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.46)$$

なぜなら、(2.45)式の両辺の発散をとると、左辺は、ベクトル公式より、 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0$ となって、 $\nabla \cdot \mathbf{i} = 0$ が導かれてしまうためである。これは(2.46)式を満たさない。これより、アンペアの法則には足りないものがあるということが予想されるのである。

マクスウェルは、このとき、電流とは何かと言うことを突き詰めていった。以下、図 2.18 に示す RC 回路に流れる電流を考えてみたい。コンデンサの電荷 0 の状態でスイッチを入るとコンデンサを充電するために導線に電流が流れ、やがて電荷の飽和に至る。この電流を $I(t)$ と置く (図の回路では電流は解析的に求まるが、今はその必要はない)。図で導線に流れている電流 I は伝導電流と呼ばれている。コンデンサの電極間には電荷の移動がないが、それゆえ、ここには電流 (1 秒間に通過する電荷量で定義されている) が流れていないといってよいかどうかという問題である。

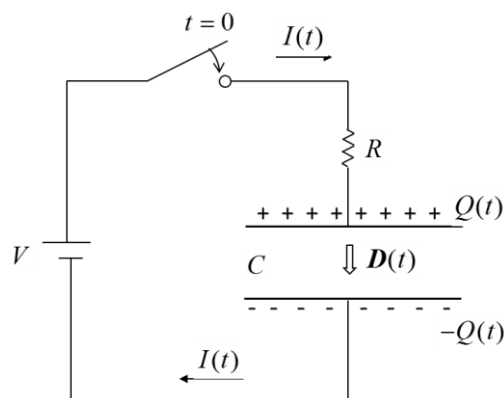


図 2.18

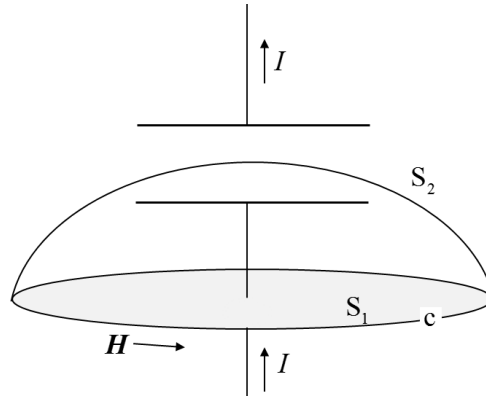


図 2.19

もし、電流を伝導電流だけだとするとアンペアの法則は以下の矛盾をはらんでいる。図 2.19 に示すようなコンデンサを含む回路にアンペアの法則を適用する。アンペアの法則の積分形は以下で表される。

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS$$

閉路 c を図のような位置にとって、それを固定とする。それを縁とする任意の面 S に対して上式は常に成立する。図のように、導線と差交する面を S_1 、コンデンサの電極間を通る面を S_2 とする。そうすると

$$\int_{S_1} \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_2} \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS$$

が求められるが、

$$\text{左辺} = \int_{S_1} \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = I, \quad \text{右辺} = \int_{S_2} \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

となって矛盾する。矛盾を解消するためには、コンデンサの電極間にも I と等価な電流が流れていなければならない。マクスウェルは電束密度の時間変化量（時間微分値）も電流の働きをすることを考え、この電流を**変位電流**と呼んだ。（変位電流が伝導電流と同じように磁界を生み出すことは、その後の実験により確認されている）。

図 2.18 のコンデンサの例で見てみよう。コンデンサに蓄積される電荷 Q は

$$Q(t) = \int_0^t I(t') dt'$$

コンデンサの電極面積を S とすると電荷密度 σ は

$$\sigma(t) (= D) = \frac{Q(t)}{S} = \frac{\int_0^t I(t') dt'}{S}$$

変位電流 i_d は

$$i_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{I(t)}{S}$$

となる。電極間に流れる変位電流の総量は $i_d S = I(t)$ となり、導線を流れる伝導電流とコンデンサの電極間に流れる変位電流の総量が同じ大きさとなり、電荷保存則、すなわち連流連続の法則がコンデンサの電極間も含めて成立していることになる。伝導電流がコンデンサのところで変位電流に姿を変え、しかし電流としては連続に流れているということである。

変位電流は電流密度でありベクトル量であるので

$$\mathbf{i}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.47)$$

である。（ $\mathbf{i}_d$ は電流密度なので変位電流密度と呼びたいが変位電流の呼び名で定着している）

伝導電流も変位電流も電流として対等とみなしてよいことが分かったのでマクスウェルは(2.45)式のアンペアの法則を表す式の電流密度 $\mathbf{i}$ に変位電流の $\mathbf{i}_d$ を加え

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.48)$$

を得た。これにより、前述の矛盾も

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

となって、解消している。

(2.48) 式で表される拡張されたアンペアの法則は、**アンペア・マクスウェルの法則**と呼ばれている。

以上まとめると、マクスウェルが考え出した以下の変位電流

$$\mathbf{i}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

をアンペアの法則の電流項に加えることで、アンペア・マクスウェルの法則

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

を得、これが、マクスウェルの方程式の4番目になる。これにて全方程式が出揃ったことになる。

【電磁気学の教科書・関連図書】

電磁気学は理学・工学を問わず広く教育課程に組み込まれており、非常に多くの教科書が世に出ている。それぞれの本には、レベルの違いや切り口の違いもあるので、学ぶ際には、本屋さんの店頭で見比べて身の丈に合ったものを選ぶと良い。ただ、学習の基本的な流れは、大筋において本章に共通すると思うので、大きな違いはない。教科書としてどれか1冊手元に用意してあれば、それはどの教員の授業にも使えるはずである。著者の個人的な感想を以下に示す。

[1] 渡辺征夫, 青柳晃, *工科の物理 電磁気学*, 培風館, 1991.

この本は、専門課程の電磁気学授業に使いやすい本である。例題や演習も多く、自習書としても適している。著者はこの本を授業の教科書にしたが、これに限るものではないことは言うまでもない。

[2] R.P.ファインマン, R.B.レイトン, M.L.サンズ: (宮島龍興訳), *ファインマン物理学 III 電磁気学*, 岩波書店, 1969.

物理学者が書く教科書はこういうものになるのかという意味で、わくわく感がにじみ出る本である。(物理学者が書いたからというのではなく、あのファインマンが書いたから、ということかもしれないが)。学部レベルの教科書としてももちろん優れているが、量子力学や相対論に話が飛び、電磁気学の奥深さを教えてくれる。本書の内容にも相当影響を受けている。

[3] 宇野亨, 白井宏, *電磁気学*, コロナ社, 2010.

本書は教科書として大作であり、電磁気学の大事なところが網羅されている。著者の電磁気学の授業に際して、[1]の本での不足部分を補うのに役立った。

[4] 砂川重信, *理論電磁気学* (第3版), 紀伊国屋書店, 1999.

[1]の教科書では物足りなくなった時、あるいは、もう一度、電磁気学を本格的に学ぼうと思ったときの2冊目の教科書。ここまで勉強すれば十分という領域にたどり着く。

[5] 太田浩一, *電磁気学の基礎 I, II*, 東京大学出版会, 2012.

これも[4]と共通。電磁気学を一通り学んだ人でなくては味わえない深い話題が随所に取り上げられている。故に、この本と取り組むには覚悟が必要。電磁気学を築き上げてきた先駆者が写真やイラスト付で数多く取り上げられており、科学史として見るのも面白い。

[6] 江沢洋, 上條隆志 (編), *相対論と電磁場 (江沢洋選集II)*, 日本評論社, 2019.

これは教科書ではなく科学啓蒙書。第6章で展開する電磁気学と相対論の関係をわかりやすくまとめている。著者は、この本の物理に対する捉え方に感銘を受け、本書にもその考えを随所に盛り込んでいる。

[7] 小山慶太, *光と電磁気学 ファラデーとマクスウェルが考えたこと*, ブルーバックス B-1982, 講談社, 2016.

若者向け科学読み物 (ブルーバックスなので気軽に読める)。ファラデーやマクスウェルの生い立ちや思想、そして、電磁気学構築の歩みがまとめられている。また、電磁気学揺籃期の研究者たちの苦悩や葛藤が物語として楽しめる本である。

第3章 マクスウェル山頂からの景色：電磁波

3.1 山頂踏破：マクスウェルの方程式

前章で述べたとおり、図 1.2 の登山地図に従って、以下の 4 つの方程式を得ることができた。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{電磁誘導の法則}) \quad (3.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{アンペア・マクスウェルの法則}) \quad (3.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{電束密度に関するガウスの法則}) \quad (3.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{磁束密度に関するガウスの法則}) \quad (3.1d)$$

上記の表記は微分形であり、積分形の表記では

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \left(= -\frac{d\Phi_m}{dt} \right) \quad (3.2a)$$

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \left(= I + \frac{d\Phi}{dt} \right) \quad (3.2b)$$

$$\int_s \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_v \rho dV (= Q) \quad (3.2c)$$

$$\int_s \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (3.2d)$$

この 4 つの方程式が**マクスウェルの方程式**と呼ばれ、マクスウェル山の山頂に御神体として祭られているのである。電磁気学学習の最初に出てくる(3.1c)式は電束密度に関するガウスの法則。電束は電荷を出発点にしている、あるいは電束は正の電荷で始まり負の電荷で終わることを意味しているが、常に電束の始まりが電荷であると言う意味ではない。電荷のあるところの周囲には必ず電束密度や電界があることは事実である。しかし、動電磁界においては渦状の電界や電束密度が存在するので、出発点に電荷を持たない電束もある。(3.1d)式は磁束密度に関するガウスの法則。磁束には出発点、すなわち、単極磁荷がないことを意味している。磁束自体は存在するので、結局のところ、出発点も終点もない、すなわちループになっているということである。(3.1a)式はファラデーが見つけた電磁誘導の法則。磁界が電界を生み出す現象である。(3.1b)式は、アンペアが見出した電流と磁界の関係（アンペアの法則）に、マクスウェルが別の形の電流、すなわち、変位電流を組み入れたアンペア・マクスウェルの法則である。電流や電界が磁界を生み出す関係式である。電磁誘導の法則と変位電流の相互作用で、電荷や電流が無いところにおいても電界と磁界の存在、すなわち、電磁波の存在を予言するものになっている。

重要なことは、この 4 つの連立方程式が力を合わせることによって、電磁現象として起こるお

よそ全ての動作を説明できるようになったことである。ただし、なぜ (why) ではなく、どのように (how) の意味である。

電磁気学はマクスウェルによって 1873 年に電気磁気論 (Treatise on Electricity and Magnetism) として集大成されたが、非常に雑多な連立方程式群であったらしい。これを、上記 4 つの方程式に整理したのは、ドイツのヘルツとイギリスのヘビサイドであり、そのおかげで、今日、我々が学ぶのに非常にすっきりした形になっている。

マクスウェルの方程式は、電磁界 $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ とそれを生み出す電荷密度 ρ と電流密度 $\mathbf{i}$ の関係を与えている。また、連立方程式を解くためには、 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ と $\mathbf{H}$ の関係を与える以下の式 (構成関係式と呼ばれる) も必要である。

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.3)$$

(3.1) 式を (3.3) 式の関係を使って電界 $\mathbf{E}$ と電束密度 $\mathbf{B}$ の関係に整理すると、以下のようにも表される

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.4a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (3.4b)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{i} + \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.4c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.4d)$$

このように見ると、マクスウェルの方程式は、電界と磁束密度のそれぞれについて、発散と回転を表すものであると読み取れる。電気の代表を $\mathbf{E}$ で、磁気の代表を $\mathbf{B}$ で表す表現の仕方を $\mathbf{E}$ - $\mathbf{B}$ 対応という。一方、磁気の代表を $\mathbf{H}$ とするのは $\mathbf{E}$ - $\mathbf{H}$ 対応と呼ばれる。 $\mathbf{E}$ - $\mathbf{H}$ 対応の方が、電界対磁界 (電束密度対磁束密度) なので用語としては落ち着きが良い。しかし、電場は電荷から、磁場は電流からという物理的なメカニズムからは $\mathbf{E}$ - $\mathbf{B}$ 対応に理がある。どちらで電磁気学を説明するかは、説明の仕方の問題であって、拘りすぎる必要は無いように思う。

このようにして、マクスウェル山の山頂を踏破し、電磁気学問題を何でも解決できる武器：マクスウェルの方程式を手に入れたのである。

3.2 電磁波

電磁現象に関する問題を何でも解決できる武器：マクスウェルの方程式ではあるが、その武器を使いこなすのがまた難しく、電磁波工学 (電波工学) という学問に発展している。電波を空間に送り出すアンテナ、種々の複雑媒質中の電波伝搬、高周波機器を構成するマイクロ波回路への応用などである。ここでは、その最も基本となる真空中での平面波の伝搬の式 (波動方程式) を、マクスウェルの方程式から導いてみたい。

真空中では、

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0, \mu \rightarrow \mu_0, \rho = 0, \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

である。このとき、(3.1)式のマクスウェルの方程式を、今度は、電波（電磁波）で使われる $\mathbf{E}$ と $\mathbf{H}$ だけを用いて表すと以下になる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3.5a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.5b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.5c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (3.5d)$$

簡単のため、電界の変化が z 方向のみに起きる（＝電磁界が xy 平面状では一定で、それが z 方向に進む、すなわち平面波）として、電界と磁界を以下の式で表す。（この仮定が間違っていれば最終的に解が得られないことによってその間違いに気付くことができる。実際、間違いでないのでこの仮定でうまくゆく。）

$$\mathbf{E}(z, t) = E_x(z, t)\mathbf{i} + E_y(z, t)\mathbf{j} + E_z(z, t)\mathbf{k} \quad (3.6a)$$

$$\mathbf{H}(z, t) = H_x(z, t)\mathbf{i} + H_y(z, t)\mathbf{j} + H_z(z, t)\mathbf{k} \quad (3.6b)$$

これを(3.1a), (3.1b)式に代入すると、それぞれの成分より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad 0 = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad 0 = \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{aligned}$$

となり、上記それぞれの行の最後の式より、 H_z, E_z は時間変動をしないこと（静電界・静磁界）になるが、ここでは、時間変動する波動を扱っているのであるから、その波動成分に関して言えば

$$E_z = H_z = 0 \quad (3.7)$$

となる。これは、進行方向に成分を持たない波動、すなわち電波は横波であることを意味している。

(3.5a)式の両辺に、回転、すなわち $\nabla \times$ を作用させ、そこに、(3.5b)式を代入して、 $\mathbf{E}$ のみの式にすると

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

を得る。上式の左辺はベクトル公式と(3.4c)式より、 $-\nabla^2 \mathbf{E}$ となるので、次式となる。

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (3.8)$$

(3.6a)式で与えた電界が x 方向のみに成分を持つものに着目すると、(3.8)式は

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (3.9)$$

となる。この方程式を **1次元の波動方程式** という。

上式で与えられる波動方程式の一般解は $f(z)$, $g(z)$ を任意の関数として

$$E_x = f(z - ut) + g(z + ut) \quad \left(u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \right) \quad (3.10a)$$

で与えられる。右辺第1項は速度 u で z 軸の正方向に進む波、第2項は負の方向に進む波である。速度 u は光が進む速度 c と一致する。

磁界 $\mathbf{H}$ も得られた E_x を用いて(3.5b)式より求められ、その結果、 y 方向成分のみになる。

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \{ f(z - ut) - g(z + ut) \} \quad (3.10b)$$

これにより、真空中を伝搬する電波（電磁波）に関して以下の性質が明らかになった。

- 1) 電波は電界と磁界で構成される
- 2) 電波は進行方向に成分を持たない横波である
- 3) 電波は光の速度で進む
- 4) 電界と磁界は進行方向と直交する面上にあり、かつ、電界と磁界も直交する

今日、電波も光も同じ電磁波の性質を持つと理解されている。

(3.10)式は、任意波形に対する伝搬を表しているが、正弦波（角周波数 ω ）の場合には、

$$E_x = E_1 e^{j(\omega t - kz)} + E_2 e^{j(\omega t + kz)} \quad \left(k \equiv \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 2\pi / \lambda, \lambda: \text{電波の波長} \right) \quad (3.11a)$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \{ E_1 e^{j(\omega t - kz)} - E_2 e^{j(\omega t + kz)} \} \quad (3.11b)$$

となる。ここで、 E_1, E_2 は任意の定数である。また、電界と磁界の比を与える係数

$$Z_0 \equiv \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377 [\Omega] \quad (3.12)$$

は自由空間の固有インピーダンスと呼ばれる。

図3.1は、本章のまとめとして、マクスウェルの方程式が表す電波の発生と電波の伝搬の関係、そして、上式で表される電界と磁界の関係を描いている。

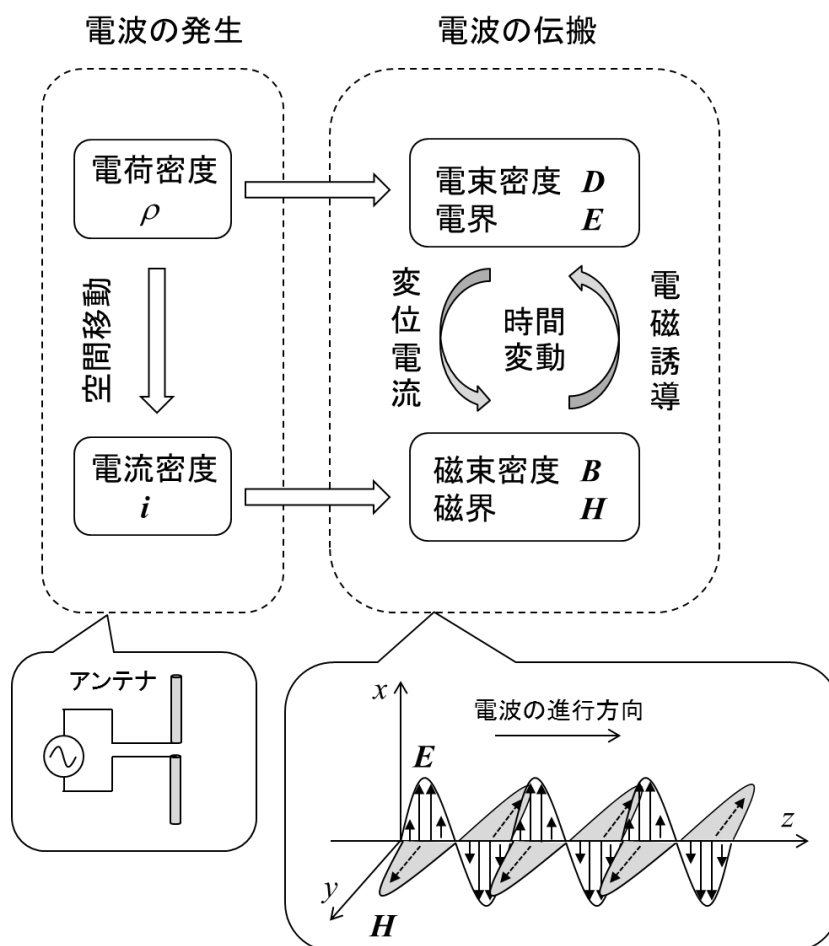


図 3.1 マクスウェルの方程式が表す電波の発生と電波の伝搬の関係、および、平面波の電界と磁界の関係

図 3.1 に示したように、平面波は $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ の方向に進むことがわかった。この電界 $\mathbf{E}$ と磁界 $\mathbf{H}$ は場のエネルギーとして単位体積当たりそれぞれ

$$U_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2, \quad U_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \quad (3.13a,b)$$

を蓄えている。 U_e は電界のエネルギー、 U_m は磁界のエネルギーである。このエネルギーが光速 c で運ばれるので、単位面積当たり、1 秒当たり運ばれるエネルギー（すなわち、単位面積当たり運ばれる電力）は

$$\begin{aligned}
S &= (U_e + U_m) c \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} (\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \\
&= EH \quad \left(\because E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H, H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E \right) \quad [\text{W/m}^2]
\end{aligned} \tag{3.14}$$

となる。伝搬方向を含めてベクトルで表すと

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{3.15}$$

である。この電力の流れを表すベクトル $\mathbf{S}$ はポインティング (Poynting) ベクトルと呼ばれる。電波で情報を運んでくれる原動力はこのポインティングベクトルである。

第4章 定理と法則

“ガウスの発散定理とガウスの法則”，“ストークスの定理とアンペアの法則” にみる定理と法則の関係

電磁気学は電気と磁気に関するいくつかの物理法則の上に理論が組み立てられている。では、この法則とはどういう位置づけになるのだろうか。同じような言葉で、定理もあるが、何が違うのだろうか。例えば、ガウスの発散定理とガウスの法則、ストークスの定理とアンペアの法則、同じようでもあり、違うようでもあり、微妙な関係に見える。この二つの例を題材として、法則と定理の関係をできるだけ直感的に捉えてみたい。

4.1 用語の定義

定理や法則の定義については、1.1 節にまとめている。一言で言うと、**定理**は、公理を前提として演繹手続きによって導きだされる命題。その正しさは、公理に基づく数学的な証明によって示される。**法則**は、ある物事と他の物事との間に一定の関係があるときに、その関係を表す言葉あるいは式。その関係が必然性や普遍性を持つと認められたとき、法則と呼ばれる。観測や実験から帰納されたもの、すなわち、経験則であり、数学的に証明されるものではない。自然科学に対する法則に対しては、自然界はそのような仕組みになっていると素直に受け入れるしかない。法則に当てはまらない物事が見つかったと、新たな法則に置き換えられたり、廃棄されたりする。

4.2 ガウスの発散定理とガウスの法則

4.2.1 ガウスの発散定理

閉曲面 S で囲まれた内部空間 V がある。ガウスの発散定理は、対象空間内で定義されるベクトル関数 $\mathbf{A}$ の内部空間 V での性質とその表面 S での性質を等式で結びつけたものであり、以下の式で表される。

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.1)$$

このような、積分変換で表される定理は積分定理と呼ばれる。定理であるから、その正しさは数学的に証明されている。その証明についてはここでは割愛し（ベクトル解析の教科書を見てほしい）、式が意味するところだけを簡潔に述べる。

同式の左辺は、内部空間 V にあるベクトル関数 $\mathbf{A}$ の発散（＝湧き出し）を全部集めたもの（＝湧きだしの総量）である。一方、右辺は、表面 S から、その面に垂直に向かうベクトル関数 $\mathbf{A}$ の成分を面全体で積分したものであり、表面から出てゆく量の全体に当たる。

ガウスの発散定理を一言で言えば、「内部で湧き出す量（左辺）は、表面からあふれ出る量（右

辺) に等しい」であり、至極当然と言う気持ちで受け入れることができると思う。

なお、ガウスの発散定理も、この後述べるストークスの定理も、時間的には定常で、空間的な性質についてのみのものである（時間の関数が入っていない）。物理で学んだ近接作用の目で、ある瞬間に球の中央に発散が起きたとき、その影響は球の表面まで届くのには時間遅れするのだから、例えば、球の半径を1光年とすれば、動的現象について(4.1)式の右辺と左辺を等号で結ぶことはできない。故に、(4.1)式はあくまで定常状態（時間の関数にならない）にある時に成立する式である。時間的に変化し、その影響の時間遅れが問題なる場合は、当然式の変形が必要になり、それは物理への応用に際して、物理を扱う側で考慮されるべきことになる。

4.2.2 ガウスの発散定理からの帰結

最も簡単な構造で、かつ、電磁気学の理解に本質的な帰結をもたらす図4.1のケースに、ガウスの発散定理を適用してみたい。同図では、半径 a の球（体積 V ）の中に単位体積当たり $\nabla \cdot \mathbf{A}$ というスカラー量が均一に満たされているとする。球内に $(\nabla \cdot \mathbf{A})V$ のスカラー量が入っていることになる。この状態で、半径 r でのベクトル関数 $\mathbf{A}$ を求めてみよう。

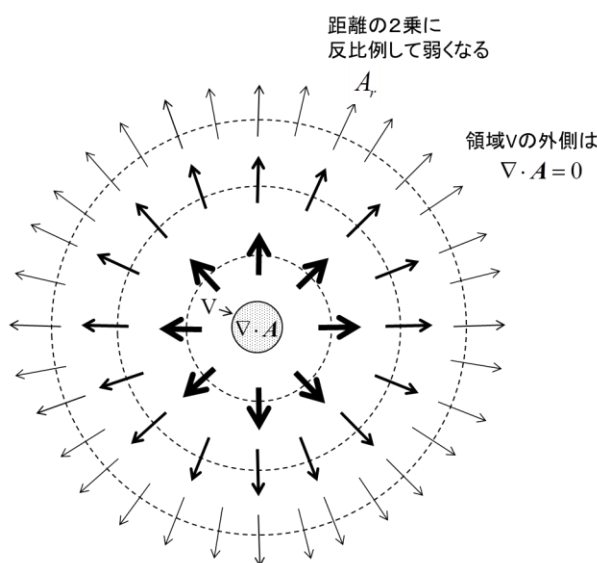


図 4.1 球形領域 V 内に単位体積当たり $\nabla \cdot \mathbf{A}$ がある環境におけるベクトル関数 $\mathbf{A}$ のイメージ

まず、球外の $r \geq a$ 。構造の対称性からベクトル $\mathbf{A}$ の向きは径方向（ r 方向）であり、この成分を A_r とする。この時、ガウスの発散定理により、ベクトル関数 $\mathbf{A}$ を球座標を用いて表すと、

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{r} \quad (4.2a)$$

$$A_r = \frac{V}{4\pi r^2} \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (r \geq a) \quad (4.2b)$$

これより、球の外部では距離の2乗に反比例して弱くなることが分かる。このベクトル関数 $\mathbf{A}$

の発散を調べると、式(1.2c)より、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) = 0 \quad (4.3)$$

となって、当然ながら、この部分にはベクトル関数 $\mathbf{A}$ の発散は無い。距離の増加に対して拡散して広がってゆくイメージである。

スカラー量の総量 $(\nabla \cdot \mathbf{A})V$ を一定に保ったまま、これが原点にあるとする。この場合は、

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = (\nabla \cdot \mathbf{A})V$$

より、

$$A_r = \frac{V}{4\pi r^2} \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (r \geq a)$$

となる。この式は(4.2b)式と同じであり、球内一様にスカラー量が分布する場合も、全スカラー量が重心の一点に集中して存在する場合も、球の外部においては、ベクトル関数 $\mathbf{A}$ は同じであるということを示している。

次に、球内に一様に分布する場合の球内のベクトル関数を求める。球内でも同様に、その対称性により、ベクトル成分は径方向のみである。ガウスの発散定理より、 A_r は、

$$A_r = \frac{r}{3} \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (r < a) \quad (4.4)$$

これより、球の内部では距離 r に比例した強さになることが分かる。このベクトル関数 $\mathbf{A}$ の発散を調べると、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (4.5)$$

となって、辻褄が合っていることが確かめられる。

これらのことを含めて、ガウスの発散定理からは以下の性質が見えてくる。

- 1) 領域内にスカラー関数 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ があると、領域の内外にベクトル関数 $\mathbf{A}$ が存在する。その $\mathbf{A}$ を用いて、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ を求めると、領域外では $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 、領域内では最初に与えたとおりの $\nabla \cdot \mathbf{A}$ になる。
- 2) 領域が球形で、かつ領域内に $\nabla \cdot \mathbf{A}$ が均等に存在するとき、ベクトル関数 $\mathbf{A}$ は r 方向のみの成分を持ち、その大きさは、球外では距離の2乗に反比例し、球内では距離に比例する。
- 3) 領域が球形で、かつ領域内に $\nabla \cdot \mathbf{A}$ が均等に存在するとき、その全量を球の中心（重心）においても、領域外のベクトル関数 $\mathbf{A}$ は同じである。

4.2.3 クーロンの法則

クーロンは自らが工夫して作ったねじり天秤を用いて、距離 r 離れた二つの電荷 (Q と q) に働く力 F を測定し、以下の関係を見出した。

$$F = k_e \frac{Qq}{r^2} \quad \left(k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \quad (4.6)$$

この関係は、発見者のクーロンに因んで**クーロンの法則**と呼ばれる。ある場所にある電荷 q に、別の場所にある電荷 Q が作った電界 E が作用したと考え、

$$F = qE, \quad E \equiv \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (4.7)$$

のように電界が定義されている。この関係を覆す観測事例は無く、法則として定着している。しかし、測定であるから、反比例する特性が真実がどうかは、測定をいくら精度よく行ってもわからない。もしかしたら、距離の2乗でなく、1.9999 乗や 2.0001 乗であるかもしれない。法則は経験則であって、証明ができないのであるから、真実は誰も知らないのである。ではなぜ、2乗が法則として残っているのだろうか。

これは、物理現象は数学的な美しさを持つ、という思想を信じているからである。数学的な美しさとは、そう、自然の法則が数学の定理に支配されているということである。具体的には、力や電界がガウスの発散定理に支配されていれば、この距離特性が出てくるわけである。そのように、法則は、美しいものになるだろうと言う期待で2が選ばれたとしても、嬉しいことに、それでうまくいっているのである。

4.2.4 ガウスの法則

電磁気学では、発散が扱われる物理量は、電界 E 、電束密度 D 、磁束密度 B 、磁界 H などがあるが、ここでは、代表して、電束密度 D と電界 E に関する発散とガウスの法則を調べる。

ガウスの法則は以下の仮定の下にある。

- 1) 電荷 Q からは Q の電束が生み出されている (ともに単位は C (クーロン))。
- 2) 単一電荷の電界は、電荷からの距離の2乗に反比例して弱くなる (クーロンの法則より)
- 3) 複数の電荷、あるいは連続して分布する電荷に対しては、全体の電界は個々の電荷によってつくられる電界の重ね合わせになる。

1) は仮定というよりは、そのように決めたと言う約束事。2) の仮定は、ガウスの発散定理という数学から導かれる性質が物理の世界にも起きているだろうと受け入れた仮定である。この3つの仮定から、電荷密度 ρ で連続に分布する電荷が作る電束密度 D と電界 E について以下の式が導かれる。

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho dV \quad (\rho: \text{電荷密度 [C/m}^3]) \quad (4.8a)$$

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (4.8b)$$

電荷密度 ρ の分布は、体積積分する領域 V の内外のどこにあっても構わない。なぜなら、 V 外に分布する ρ の(4.8)式左辺の面積分への寄与は0であるからである。

(4.8a)式は**電束密度に関するガウスの法則**、(4.8b)式は**電界に関するガウスの法則**と呼ばれる。ガウスの発散定理より、

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV \quad (4.9a)$$

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV \quad (4.9b)$$

であるので、(4.8)式と(4.9)式の体積積分同士の被積分関数を比較して

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4.10a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.10b)$$

と簡潔な微分方程式で表すことができる。この式で表される関係も、根本（＝クーロンの法則を採用していること）が仮定なので、（電束密度及び電界に関する）ガウスの法則と呼ばれる所以である。

以上を整理すると

定理：数学的により証明された真理

法則：発見あるいは類推に基づく経験則

ガウスの発散定理と電束密度に関するガウスの法則の関係

ガウスの発散定理

- ・ベクトル関数 $\mathbf{A}$ とその発散 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ を結び付ける関係式（式(4.1)）
- ・そこから導かれるベクトル関数 $\mathbf{A}$ に関する種々の性質、

例えば、球形領域に $\nabla \cdot \mathbf{A}$ が均一に分布しているとき、球外では、 $\mathbf{A}$ の向きは径方向に、大きさは $1/r^2$ に比例。球外の $\mathbf{A}$ は球内に均一分布する $\nabla \cdot \mathbf{A}$ の総量を原点（重心）において求めることができる。

ガウスの法則

ベクトル関数 $\mathbf{A}$ で表される物理量に対して、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ を別の物理量 B （スカラー関数）に結びつけ、 $\nabla \cdot \mathbf{A} = B$ としたときの $\mathbf{A}$ と B の関係をガウスの発散定理で結びつける。 $\nabla \cdot \mathbf{A} = B$ の部分が仮定（経験則）なので、そこから導かれる性質は全て法則。

電界と電荷密度の関係では、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV \quad (\text{ガウスの発散定理})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{ガウスの法則})$$

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (\text{ガウスの法則})$$

ガウスの法則が、対称形構造物の電界や電束密度を求める際に、極めて大事でありかつ便利な計算手法であることは、例題 2.1, 2.2 への適用を見れば明らかであろう。そして、自然界の物理現象がそのような数学的世界に支配されていることが、感動として実感できるであろう。

なお、蛇足であるが、(4.10a)式を見て、「電束の源は電荷である（あるいは、電束はプラス電荷で始まりマイナス電荷で終わる）」という説明をすることが多いが、これは必ずしも正しくない。「電荷は電束の源である」というのが正確である。これは動電磁界において、電磁誘導の法則により $\nabla \times \mathbf{E}$ が、すなわち、 $\nabla \times \mathbf{D}$ が値を持つが、これはループになっていて、源（出発点）を持たないからである。

4.3 アンペアの法則とストークスの定理

4.3.1 ストークスの定理：その直観的理解

ループをなす経路 c で囲まれた曲面 S を考える。ストークスの定理は、曲面 S 上でのベクトル関数 $\mathbf{A}$ に関する積分定理で以下の式で表される。

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.11)$$

先ず、式の意味を考える。

同式の左辺は、曲面 S 上におけるベクトル関数 $\mathbf{A}$ の回転（＝渦巻きの力（回転力）；ベクトルの向きは回転軸の方向）の面に垂直な方向の成分を全部集めたもの（＝回転力の総量）である。一方、右辺は、面の縁をなす経路（ループ） c 上でのベクトル関数 $\mathbf{A}$ の経路方向成分を経路全体で積分したものであり、ループに働く渦の力。式の左右に表される量が等しい、という定理である。

ストークスの定理を一言で言えば、「面上の微小部分に発生する回転（左辺）が、その外側に渦を作り（右辺）、任意のループに対する積分値はループの形によらない」であり、ガウスの発散定理の直感的理解のしやすさに比べると、少し分かりにくいように思う。

電磁気学（あるいはベクトル解析）授業などで、この定理の意味について、以下のような説明が見受けられる。図 4.2(a)で、左側に示す4つの矩形ループがあって図のように回転力がある。この場合に、内部の接合部分は力が打ち消されて消え、残るのは、右側図のように縁の成分のみになる。同図(b)のような一般的な形でも同様なことになり、結局、内部の回転力は縁にのみ

現れる、という説明である。この説明を聞いて、なんとなくわかった気分になるが、誤解を招く説明であり、著者は良い説明とは思わない。例えば、 $\nabla \times \mathbf{A}$ が、ループの中心部分にはあるが、ループの縁付近には無い場合（すなわち外周付近では $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ ）、図 4.2(b)の説明は成立しないからである。同図の説明が有効となるのは、面内に $\nabla \times \mathbf{A}$ がほぼ均一に存在するような場合（まさに図に書いたような例）のみで、それは一般的ではない。

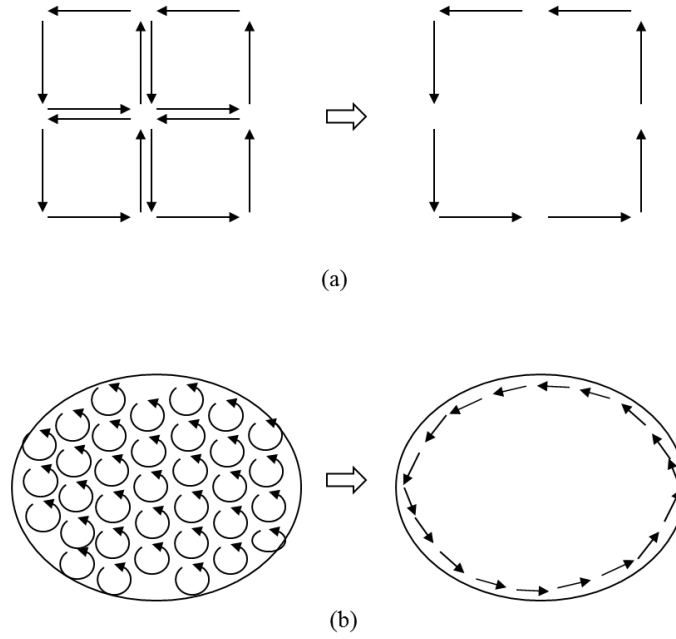


図 4.2 ストークスの定理の直感的説明イメージ図（誤解を与えて良くないという例）

ストークスの定理の意味するところは、面内の一部に $\nabla \times \mathbf{A}$ なる量が存在すれば、その影響はループの位置にまで現れるということである。図 4.3 にそのイメージを示す。中央に $\nabla \times \mathbf{A}$ と言う回転力（ドリルのような）があると、その周囲に渦ができ、径方向に弱くなりつつ広がっているという描像である。

図 4.4 のように、曲面 S 上の 2 つの微小エリア $\Delta S_1, \Delta S_2$ のみにそれぞれ $\nabla \times \mathbf{A}_{10}, \nabla \times \mathbf{A}_{20}$ が均一に存在する場合を考える。 S 面上の 3 つのループ c_1, c_2, c_3 に対して、(4.11)式から、次のことが導かれる。

$$\oint_{c_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{c_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^2 \nabla \times \mathbf{A}_{i0} \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i \quad (4.12a)$$

$$\oint_{c_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (4.12b)$$

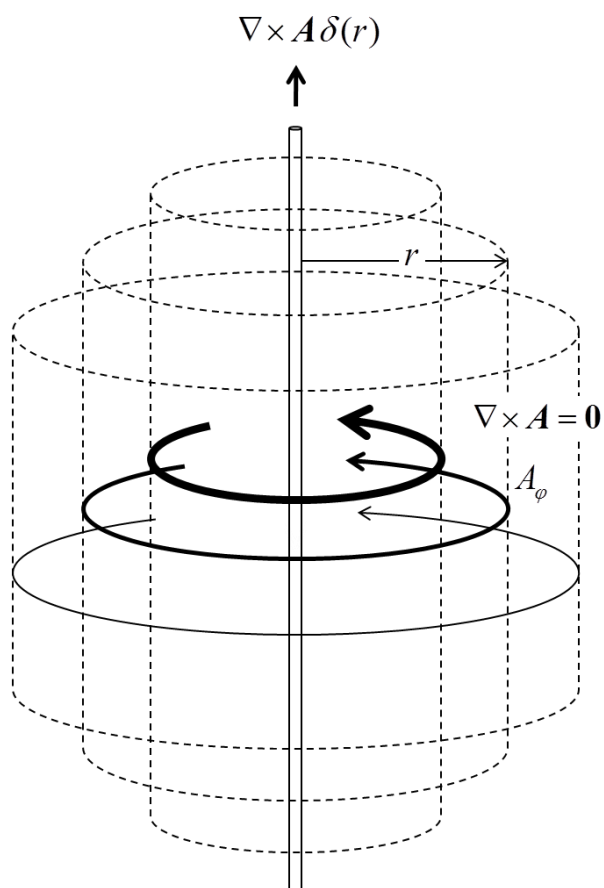


図 4.3 ストークスの定理の一つのイメージ

(円筒の中央に、ベクトル量 $\nabla \times \mathbf{A}$ がデルタ関数的に存在する場合) ; $\nabla \times \mathbf{A}$ が駆動力になってその周りに渦状のベクトル関数 $\mathbf{A}$ ができる。ただしその領域では回転 ($\nabla \times \mathbf{A}$) は無い)

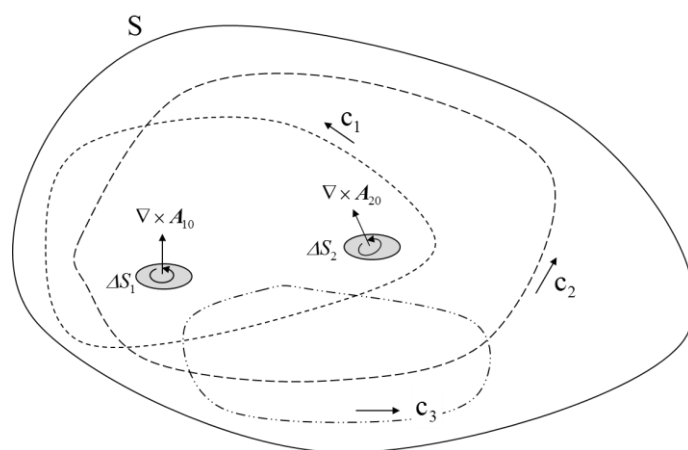


図 4.4 ストークスの定理の説明図 (回転成分が面内の2箇所が存在する場合)

これも定理であるから、その正しさは数学的に証明されている。その証明の詳細は、教科書に任せて割愛するが、図 4.4 の説明だけでは分かりにくいので、もう少し直感的説明を試みる。ストークスの定理は、任意の曲面上で成立する定理であるが、平面上での説明の方がイメージしやすいので、以下、それでの説明を行う。

ストークスの定理 ((4.11)式) を直角座標成分で書き下すと以下ようになる。

$$\int_S \left\{ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right\} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_c (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \quad (4.13)$$

曲面上での問題を平面上での問題に置き換えるため、 $\mathbf{n}=\mathbf{k}(=\hat{\mathbf{z}})$, $A_z=0$ とする。この時、上式は以下のように簡単になる。

$$\int_S \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy = \oint_c (A_x dx + A_y dy) \quad (4.14)$$

平面では曲面に対して以下の対応になる。

$$\nabla \times \mathbf{A} \rightarrow \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}, \quad dS \rightarrow dx dy$$

この関係式 (ストークスの定理を平面に適用した(4.14)式) は、**グリーンの定理**と呼ばれている。グリーンの定理の証明は A_x と A_y の成分に分離した以下の連立方程式

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left\{ \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial A_y(x, y)}{\partial x} dx \right\} dy = \oint_c A_y(x(y), y) dy \quad (4.15a)$$

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial A_x(x, y)}{\partial y} dy \right\} dx = -\oint_c A_x(x, y(x)) dx \quad (4.15b)$$

のそれぞれについて、左辺から右辺を導出する形で行うが、左辺の形を見ると、右辺の形が見えてくと思う (具体的な導出説明は略)。この平面に適用したストークスの定理 (すなわちグリーンの定理) で、その意味を考えてみたい。

図 4.5 において、中心部に円形微小領域 ΔS がある。この微小領域内に、ベクトル関数 $\nabla \times \mathbf{A}_0$ が均一に存在するとする。図では、 $\mathbf{A}_0$ のイメージとして渦の絵で書いているが、ベクトル $\nabla \times \mathbf{A}_0$ の向きは紙面に対して垂直 (手前方向: $\hat{\mathbf{z}}$) である。この ΔS にあるベクトル関数は、 ΔS 外 (半径 r の地点) に以下のベクトル関数 $\mathbf{A}$ を作る。

$$2\pi r A_\varphi = (\nabla \times \mathbf{A}_0 \cdot \hat{\mathbf{z}}) \Delta S \rightarrow \mathbf{A}(r) = \frac{1}{2\pi r} (\nabla \times \mathbf{A}_0 \cdot \hat{\mathbf{z}}) \Delta S \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (4.16)$$

このようにして、周方向に成分を持つベクトル関数 $\mathbf{A}$ が作られ、微小領域の中心からの距離 r に対して反比例する。このとき、このベクトル $\mathbf{A}$ の回転は $\mathbf{0}$ である。これは非常に勘違いされやすいところと思うが、なぜなら、円筒座標表現（式(1.3b)）で

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) = 0 \quad (\Delta S \text{ 外の領域}) \quad (4.17)$$

であるからである。バームクーヘン状にできる渦状のベクトル $\mathbf{A}$ には回転が無いのである。

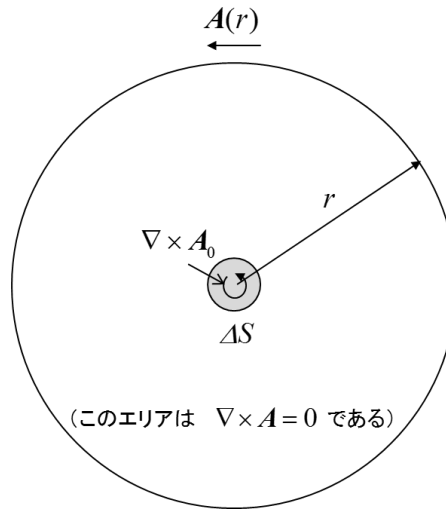


図 4.5 円の中心に回転成分がある場合（平面に適用したストークスの定理）

図 4.6 は、図 4.4 と同様に、二つの微小エリア ΔS_1 と ΔS_2 に回転成分がある場合であり、違いは、平面で考えていることである。 ΔS_1 と ΔS_2 にある回転成分によって、周囲にベクトル $\mathbf{A}_1$ 、 $\mathbf{A}_2$ の渦ができ、等角度で 8 分割した図のケースでは、以下の性質がある。

$$\int_{P_{11}}^{P_{12}} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_{12}}^{P_{13}} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l} = \cdots = \int_{P_{17}}^{P_{18}} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{8} \nabla \times \mathbf{A}_{10} \cdot \hat{\mathbf{z}} \Delta S_1 \quad (4.18a)$$

$$\int_{P_{21}}^{P_{22}} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_{22}}^{P_{23}} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l} = \cdots = \int_{P_{27}}^{P_{28}} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{8} \nabla \times \mathbf{A}_{20} \cdot \hat{\mathbf{z}} \Delta S_2 \quad (4.18b)$$

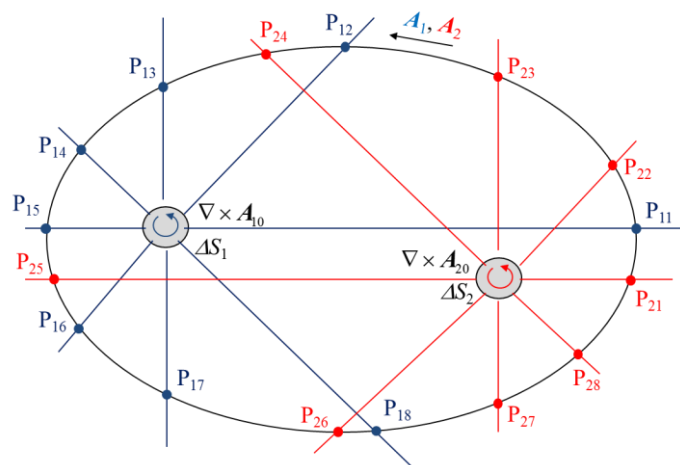


図 4.6 2 箇所に回転成分が有る場合（平面に適用したストークスの定理）

回転成分を持つ微小エリアが N 個ある場合には、重ね合わせの原理により

$$\sum_{i=1}^N \nabla \times \mathbf{A}_{i0} \cdot \hat{\mathbf{z}} \Delta S_i = \oint_c \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \cdot d\mathbf{l} \rightarrow \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{z}} dx dy = \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.18c)$$

である。ストークスの定理は、平面上で考えた方が分かりやすいので、そのような説明を行った。(4.11)式のストークスの定理は、平面上の定理（グリーン定理）を曲面上の定理に拡張したものであり、ここまでする理解できれば、その先の理解も容易と思う。

4.3.2 アンペアの法則

磁界は電流から生まれると言う性質をもち、この関係を定式化したのが**アンペアの法則**である。間隔 r の並行 2 線に流れる電流 I_1, I_2 間の長さ l あたりの力 F は、以下の式 ((2.26)式の再掲) で表される。

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r} \quad (4.19)$$

これは磁気力あるいはアンペアの力と呼ばれる。クーロンの法則のときの議論と同様、この式も測定値に基づく経験式なのであるから、距離に反比例するかどうかの真実はわからない。この場合も、本当は距離の 1.00001 乗、あるいは、0.99999 乗かもしれない。1 にしているのは、ストークスの定理からの帰結である(4.16)式の $1/r$ 特性がここに現れているのではないかと期待できるためである。これを受け入れることによって、2.3.4 項で述べたアンペアの法則として導かれている式が得られる。磁束密度 $\mathbf{B}$ で表すと、

$$\mu_0 \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (\mathbf{i}: \text{電流密度 [A/m}^2]) \quad (4.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} \quad (4.21)$$

である。

円筒座標において、中心軸 $r=0$ に電流 I が流れている場合には、(4.21)式は以下のようなになる（式中の δ はディラックのデルタ関数）。

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 I \delta(r) \quad (4.22)$$

このとき、半径 r の円上では、(4.20)式は以下のようなお馴染みの式になる。

$$\mu_0 I = 2\pi r B_\phi \rightarrow B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (4.23)$$

無限直線状に流れる電流の存在が、距離に逆比例する形で影響が及んでいると言うのが、アンペアの法則の主要帰結であり、かつ、ストークの定理から導かれる帰結でもある（式(4.23)）。ガウスの法則と同様に自然界が美しい法則に支配されている（＝数学の世界が自然界の法則に現われている）ことを喜ぶたい。

4.4 発散と回転：その言葉のニュアンス

本章のタイトルからは少し横道にずれるが、数学用語の発散と回転には、混乱を与える原因が潜んでいるように感じる。4.2節で述べたように、ベクトル解析における「発散」は、ニュアンスとしては「湧き出し」である。「湧き出し」の周囲に存在するベクトル関数には、数学的な意味における「発散」は無く、ただ、「広がる」だけである。しかし日本語で「広がる」と言うニュアンスは発散や拡散のイメージがあり、ここに混乱がある。 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ を「湧き出し」、その周囲のベクトル関数 $\mathbf{A}$ を「広がり」と読み替えると、「発散」に対する誤解が小さくなるであろう。

「湧き出し」を「発散」と呼ぶこと自体は何も問題が無いが、というより、「発散」が共通用語であるので使わざるを得ないのであるが、その周囲に起きるベクトル関数 $\mathbf{A}$ には発散はないと言うことを、忘れないようにしたい。なお、ある場所に $\nabla \cdot \mathbf{A}$ があると、その周囲に広がりを持つベクトル関数 $\mathbf{A}$ の場ができる、というように、原因と結果の関係で捉えることが多いが、数学公式としてのガウスの発散定理は、左辺＝右辺、という以上の意味は無い。原因と結果の関係ではなく、対等である。

「回転」についても同じようなことが言える。回転（ $\nabla \times \mathbf{A}$ ）がある周囲には渦状のベクトル関数 $\mathbf{A}$ が存在するが、渦自体には、数学的な意味の「回転」は無い。しかし、日本語で渦と言うニュアンスは回転のイメージがあり、ここに、発散と同様な混乱がある。「回転」は工具の錐（あるいは電動ドリル）のようなニュアンス、それを回転と呼ぶのは、良しとせざるを得ないが、渦は回転ではなく、回転の産物と捉えるようにしたい。

第5章 電磁ポテンシャル

電磁気学では2種類のポテンシャルが出てくる。スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル、二つ合わせて電磁ポテンシャルである。スカラーポテンシャルは、静電界の説明の中で、電位という名前と呼ばれ、電荷 q を電位 V_1 のところから電位 V_2 のところまで運んでゆくためには $q(V_2-V_1)$ の仕事（エネルギー）が必要と学んで、ポテンシャルと言う意味が分かる。もう一方のベクトルポテンシャルは、以下のように教えられるのではないだろうか。「磁束密度 $\mathbf{B}$ は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ だから、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ と表すことができる。なぜなら、ベクトル公式により $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ であって、 $\mathbf{A}$ は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を自動的に満たしているからである」。このベクトル場 $\mathbf{A}$ をベクトルポテンシャルと呼ぶ。」と。これだと、数学のお遊びのような気分になる。授業では、その働きが詳しく語られることも無く終わってしまう。次に現われるのは、より高度なレベルの電磁気学、すなわち大学院レベルの授業において、アンテナから電波が出てゆく解析にベクトルポテンシャルが大事な仲介役となることや、マクスウェルの方程式を二つのポテンシャルで書き直すときであろうが、普通はそこまで行かない。大方の人は「磁界って、何かその元になる渦巻きのものがあるらしい」に留まってしまっていることと思う。本章では、学部レベル（＝マクスウェルの方程式までは学んでいると言うレベル）で、ベクトルポテンシャルの働きが、直感的に理解できる説明を試みたい。また、最後に、ローレンツゲージを用いて、マクスウェルの方程式を電磁ポテンシャルで書き表し、対称性に優れた美しい形になることを述べる。

5.1 スカラーポテンシャル

電位（スカラーポテンシャル）は2.1.4項で基本的な説明を行っているが、これをもう少し突き詰めてゆく。

空間に電荷がある時その周囲に電界ができることを学んでいる。電荷密度を ρ 、空間 V 内の全電荷量を Q とすると、その関係は次式である。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.1)$$

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \left(= \frac{Q}{\epsilon_0} \right) \quad (5.2)$$

静電界においては、電界は電位 ϕ の勾配で与えられるので、

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (5.3)$$

である。

静電界の場合、(5.1)式と(5.3)式より、電位と電荷密度の関係は次式で表される。

$$\nabla \cdot \nabla \phi (\equiv \nabla^2 \phi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (5.4)$$

ここで、 ∇^2 はラプラスの演算子（ラプラシアン）である。電荷が無い場所では、

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\rho = 0) \quad (5.5)$$

である。(5.4)式は**ポアソンの方程式**、(5.5)式は**ラプラスの方程式**と呼ばれる。

半径 a の球内に電荷が密度 ρ で均一に分布している場合を考える。電界をガウスの法則で、電位を(5.3)式で求めると次式となる。

$$E_r = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \left(Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \right) \quad (r \geq a) \\ \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} & (r < a) \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\phi = -\int_{\infty}^a E_r dr = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r \geq a) \\ \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a} \left(3 - \frac{r^2}{a^2} \right) & (r < a) \end{cases} \quad (5.7)$$

この場合の電位 ϕ は r 方向のみに変化を有するので、球座標でのラプラシアン

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)$$

に(5.7)式の ϕ を入れると、

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (r < a) \quad \nabla^2 \phi = 0 \quad (r \geq a)$$

が確認できる。

5.2 コンデンサの静電容量と静電エネルギー

電位の応用としてコンデンサ（キャパシタ）の静電容量と静電エネルギーを学ぶ。

対向する二つの導体がある。両導体間に電圧 V を加えると、電荷 Q が蓄積される。蓄積される電荷量は導体の構造や配置によって異なるが、電圧に比例する。この比例係数を C として、次式で表す。

$$Q = CV \quad (5.8)$$

この比例係数 C は**静電容量**と呼ばれる。静電容量は、電荷を蓄える能力を表す。単位は “クーロン/ボルト” [C/V] であるが、改めて “ファラド” [F] と呼ばれる。

種々の形のコンデンサの静電容量の求め方は以下の手順に従う。

- ① 導体の二つの電極に $\pm Q$ の電荷を与える
- ② 電極間の電界 E を求める（ガウスの法則を使う）
- ③ 電極間の電位差 V を求める
- ④ $C=Q/V$ により、静電容量を求める

例として、並行平板コンデンサの静電容量を求めてみよう。同形の平板が対向して平行に置かれ、その面積を S 、間隔を d とする。面の端の効果が無視できるよう $S \gg d^2$ の条件を課す。①で電荷を与えると、②の電界は $E=Q/(\epsilon_0 S)$ 、③の電位差は $V=Qd/(\epsilon_0 S)$ である。ゆえに静電容量は

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (5.9)$$

と求められる。電磁気学の教科書には構造が対称な、すなわち手計算で電界や電位差が求められる種々の形状、例えば、平板以外にも、円筒、球、平行導線などの例が取り上げられている。これらの形のコンデンサ（＝②，③が手計算でできるもの）に対して、上記の手順は共通である。教科書に取り上げられている例題を各自自分で解いてほしい。

ここまで、物理量 ϕ を電位と呼んできたが、前述のとおりスカラーポテンシャルとも呼ばれる。2.1.4項で述べたように、電荷 q を地点1と地点2の電位差 $V (= \phi_2 - \phi_1)$ の空間を動かすのに必要なエネルギー（仕事）は qV である。このようなエネルギー問題を扱うときは、スカラーポテンシャルという呼び名が理にかなっている。

コンデンサは電荷を蓄積する機能を持つが、同時にエネルギーを蓄積する。**静電エネルギー**と呼ばれるこのエネルギーを求める。求め方には、電気回路的な手法と電磁気学的な手法がある。最初に、電気回路的な手法で求める。電荷 Q で充電されたコンデンサに負荷抵抗 R をつなぎ、 $t=0$ でスイッチ投入後の抵抗 R での全消費電力を求めると、

$$U = \int_0^\infty I^2(t) R dt = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 \left(\because I(t) = \frac{Q}{CR} e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (5.10)$$

であることが、過渡現象の知識を用いて容易に確認できる。この $CV^2/2$ がコンデンサに蓄えられる静電エネルギーである。

このエネルギーを電磁気学的に求めてみよう。図5.1(a)のように、充電前のコンデンサがある。この状態では電位差 $v=0$ 、エネルギー $U=0$ である。図の下の方の電極の電荷は0であるが、等量の正負の電荷が敷き詰められているとする。このうちの正の電荷を、下の電極から上の電極に運び（同図(b)）、最終的に同図(c)の状態（ $v=V$, $q=Q$ ）にする。この状態にするに必要なエネルギーが静電エネルギー U である。以下これを求めてみよう。同図(b)で、既に電荷 q の移動が終わっていて、そのときの電位差を v とする。この状態で電荷 dq を移動させるに必要なエネルギー dU は次式である。

$$dU = dqv \quad (v = q/C)$$

電荷 Q を移動させる全エネルギー U は

$$U = \int_0^Q v dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} \quad (5.11)$$

となり、当然ながら電気回路的に求めた方法と同じ $CV^2/2$ になる。荷物を背負って高い壁を乗り越え、仕事をするときと捉えると、スカラーポテンシャル（すなわち電位）は壁の高さに相当し、ポテンシャルと呼ばれる意味が改めて納得できよう。

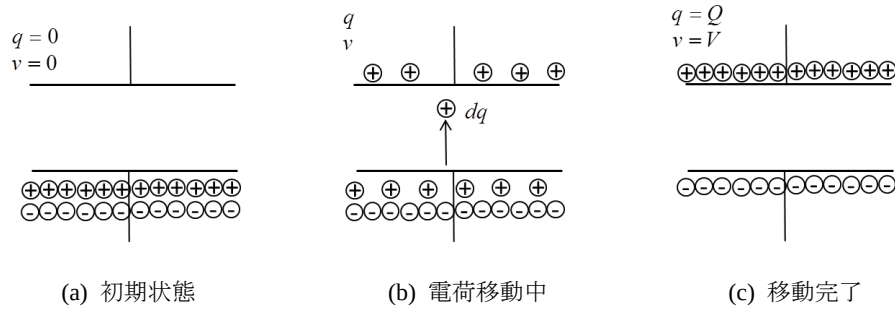


図 5.1 コンデンサ充電に必要なエネルギー

5.3 ベクトルポテンシャル

2.3.2 項で述べたとおり、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の定義は、磁束密度 $\mathbf{B}$ との関係において、次式で与えている。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.12)$$

「磁束密度 $\mathbf{B}$ は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ だから、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ と表すことができる。なぜなら、ベクトル公式により $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ であって、 $\mathbf{A}$ は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を自動的に満たしているからである。このベクトル場 $\mathbf{A}$ をベクトルポテンシャルと呼ぶ。」と。感覚的には、磁束密度 $\mathbf{B}$ は何か渦のようなもので、その渦の源（回転力、駆動力）がベクトルポテンシャルだと。

これがポテンシャルと呼ばれる理由は、単位（MKSA 単位系の組立単位; 表 1.1）からの考察をしてみると分かりやすい。スカラーポテンシャルにおける以下の説明にならう。電界 $\mathbf{E}$ がある場において、電荷 q を P 点から Q 点まで運ぶエネルギー（仕事） U_e は次式である。

$$U_e = \int_P^Q \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{l} = q \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q(\phi_Q - \phi_P) \quad ([0,0,1,1] + [2,1,-3,-1] = [2,1,-2,0]) \quad (5.13)$$

$\phi_Q - \phi_P$ は PQ 間の電位差であり、前述のとおり、電荷 q を動かすことに立ちはだかる壁（ポテンシャル）と理解できる。

では、ベクトルポテンシャルは何に対するポテンシャルであろうか。(5.12)式で関係付けられるベクトルポテンシャルの組立単位は $[1,1,-2,-1]$ である。エネルギーの単位は $[2,1,-2,0]$ である。これをつなぐものの単位は、 $[1,0,0,1] (= [2,1,-2,0] - [1,1,-2,-1])$ 、すなわち $[\text{m}][\text{A}]$ である。電流が流

れている導線の一定の長さ分の量である。図 2.9 に示した例で考えると、磁界を作っている電流 I_0 と平行に電流 I を置き、この電流 I の長さ dl あたりに受ける力 $\mathbf{F}_m$ は

$$\mathbf{F}_m = IdlB_\phi \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mu_0 I_0 Idl}{2\pi r} \hat{\mathbf{r}} \quad (5.14)$$

この電流棒（電流 I が流れている）を、磁界 B_ϕ 中を径方向に P から Q に運ぶエネルギーは、長さ dl あたり

$$U_m = \int_P^Q \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{r} = \frac{\mu_0 I_0 Idl}{2\pi} \int_{r_P}^{r_Q} \frac{1}{r} dr = Idl (A_Q - A_P) \quad (5.15)$$

$$([0,0,0,1]+[1,0,0,0]+[1,1,-2,-1]=[2,1,-2,0])$$

となる。電界中の電荷の運搬と、磁界中の電流の運搬との違いは有るものの、ポテンシャルであることの意味は共通である。電荷はスカラー量であって向きが無いのに対し、電流には向きがあり、この場合のポテンシャル量もベクトルになる。このことにより、(5.12)式で定義されたベクトル量 $\mathbf{A}$ がベクトルポテンシャルと呼ばれる理由は理解できたと思う。

それにしても、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ のイメージがつかみにくいことと思う。もっとも直観的な理解は、図 5.2 のケースで考えるのが良いように思う。同図は、 z 方向に電流 I が流れている環境での電磁界の様子を示している。磁束密度は ϕ 成分方向に現われ、以下のとおりである。

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (5.16)$$

式(5.12)にストークスの定理を適用して積分変換し、その積分範囲を図の点線の矩形経路（ z 軸方向の長さ：1）とすると、

$$\begin{aligned} \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \{= A_z(a) - A_z(r)\} &= \int_S B_\phi dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a} \\ \rightarrow A_z(r) &= A_z(a) - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a} \end{aligned} \quad (5.17)$$

式(5.17)のように基準点（ $r=a$ ）からの差で表しているのは、微分方程式で定義される量の定数値（積分定数）に意味が無いためである。ベクトルポテンシャルは、図 5.2 のように z 方向に向き、かつ、 r に対して徐々に弱くなるベクトル場である。このベクトル場では、図中に $\bigcirc$ で示すように ϕ 方向を軸とする振れが生じ、これがベクトルポテンシャルの回転、すなわち ϕ 方向に渦状の磁界が生まれている。

著者はベクトルポテンシャルに関して一つの描像を持っている。それは、物理空間が粘性の強い液体（水飴みたいな）で埋まっているとする。その中に長い棒があり、電流の流れる方向にその棒が動いているとする。そうすると棒の周りの粘性液体は、棒に引きずられて、同じ方向に、

近くのは速く、遠くのは遅く動く。これが、図 5.2 のケースにおけるベクトルポテンシャルの大きさと向きである。同様に、この後述べる図 5.3 のケースについても、円環を中心軸で回転させれば、粘性液体の動きは、中も外もベクトルポテンシャルの向きになっている。相対性理論によってその存在が否定されたエーテル（光や電波の伝搬を担う空間物質）を彷彿させるような説明で、若者にお勧めできるものではないが、著者の中でのイメージ作りには役立っている。

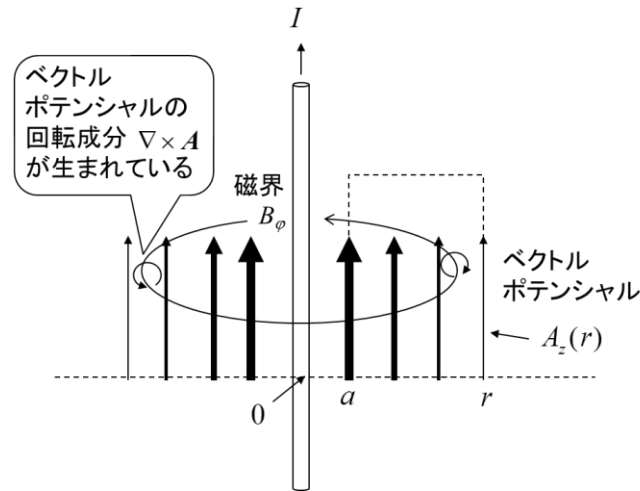


図 5.2 直線状電流に対する磁界とベクトルポテンシャル

（描像：電流と並行してベクトルポテンシャルが生まれ、その強さは r が大きくなるほど弱くなる。そのためベクトルポテンシャルは z 方向に対してストレスをもち、そこにベクトルポテンシャルの回転（図中に示した捻じれ： $\nabla \times \mathbf{A}$ 、ただし、ベクトルの向きは ϕ 方向）が生じ、それが磁界（磁束密度）である）

5.4 ベクトルポテンシャルの実在問題

静電界における電界の相棒はスカラーポテンシャルである。(5.3)式から明らかなように、スカラーポテンシャルがあるところには必ず電界がある。その逆もまた然りである。もちろん、スカラーポテンシャルが至るところ定数であれば、電界は 0 であるが、スカラーポテンシャルはその差（電位差）が物理的働きをもつのであるから、そのような場は物理的に意味がない。

ところが、ベクトルポテンシャルに関しては、磁界がないところにもベクトルポテンシャルが存在するケースがある。図 5.3 がその例である。無限に長い中空の円筒パイプ（半径 a ）があり、その円筒上を円周方向に電流密度 $\mathbf{i}$ （単位幅あたりの電流 I ）でループ電流が流れている（螺旋形に密に導線が巻かれていて、そこに電流が流れている無限ソレノイドと考えても良い）。磁界はこの円筒内の中空部分に、円筒の軸方向（単位ベクトル： $\hat{\mathbf{z}}$ ）に均一に発生する。その大きさは、 $B_z = \mu_0 I$ である。xy 面上の円筒断面に対して、半径 r の面 S を考えると、

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \rightarrow \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \Phi_m \quad (5.18)$$

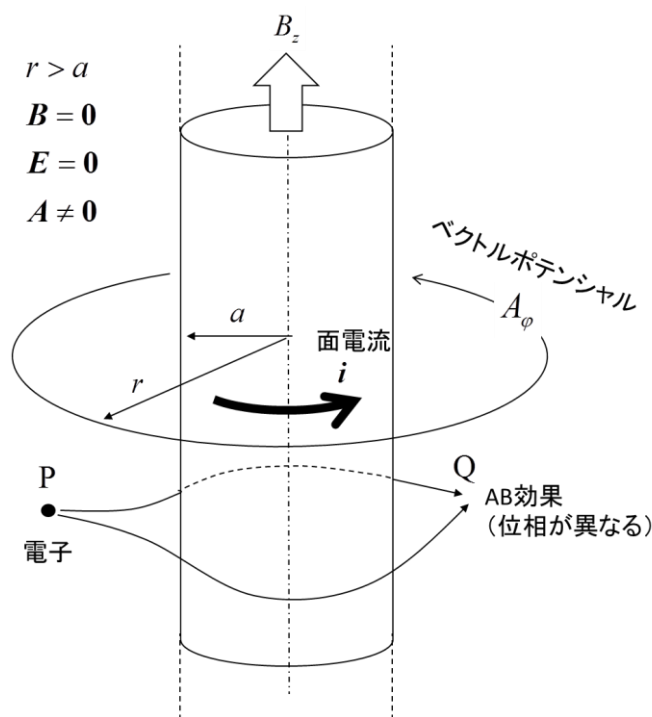


図 5.3 ベクトルポテンシャルが有って磁界がないケース

$$\Phi_m = \begin{cases} \mu_0 \pi r^2 I & (r < a) \\ \mu_0 \pi a^2 I & (r > a) \end{cases} \quad (5.19)$$

より、ベクトルポテンシャルは φ 成分のみとなり、次式である。

$$A_\varphi = \begin{cases} \frac{\mu_0 r I}{2} & (r < a) \\ \frac{\mu_0 a^2 I}{2r} & (r > a) \end{cases} \quad (5.20)$$

円筒の外側 ($r > a$) では、円筒座標の表記において、

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

となり、磁界 $\mathbf{B} (= \nabla \times \mathbf{A})$ がないのにベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ だけはある、ということになる。もちろん、電界もないので、この場においては、電磁気学的な現象は何も起こらないはずである。それでは、ベクトルポテンシャルは、単なる数学のお遊びであって、物理的に存在するのかどうかと言う疑問が湧いてくる。ベクトルポテンシャルを直接測る装置が無いということもある。これに答え (= 存在すると言う) を与えてくれたのが量子力学である。

量子力学の世界に、Y. Aharonov と D. J. Bohm が 1959 年、その存在を指摘したアハラノフ・ボーム効果 (AB 効果) というのがある。詳しくは、解説資料[1]を見て欲しいが、一言で言うと、ベクトルポテンシャルがある場では、電子を P 点から Q 点に移動させるとその位相変化 (電子波の位相: シュレーディンガーの波動方程式で与えられる量子力学的な物理量) が経路に依存する、と言うものである。これを確認する実験は大変難しくなかなかできなかったが、日立製作所の外村彰博士が、1986 年、電子線ホログラフィーの手法を用いて、その存在を実証した (漏れの無い磁場を作ることの難しさ等の苦労話が解説記事[1]に)。これによって、ベクトルポテンシャルが単なる数学上の表現ではなく、実在する物理量であることが確かめられたのである。

5.5 電磁ポテンシャルで表すマクスウェルの方程式。

マクスウェルの方程式を、二つの電磁ポテンシャル (スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル) を用いて、より美しい形で表すことができる。むしろ、この形の方が本質だと言う見方もある。しかし、この部分の式の導出には、ゲージ変換と言う数学的テクニックが用いられるため、その理解は、学部学生には少し敷居が高いと感じる。難しいと言う意味ではなく、丁寧な説明が必要だと言う意味である。本節では、この美しい方程式が出来上がるまでを、丁寧に噛み砕いた形でまとめている。

5.5.1 ゲージ変換

式の導出には、ゲージ変換と言う数学的テクニックが用いられる。まずは、そのゲージ変換の意味を説明する。

求めたい量 P, Q があり、以下のような x, y の関数で与えられるものとする。

$$P = f(x, y), \quad Q = g(x, y) \quad (5.22)$$

この x, y は次の連立方程式を解いて求められるものであるとする。

$$u(x, y) = 0, \quad v(x, y) = 0 \quad (5.23)$$

ところがこの連立方程式が複雑で、解くのが困難であるときどうしよう。もし、

$$u'(x', y') = 0, \quad v'(x', y') = 0 \quad (5.24)$$

ならば解けて、かつ、

$$P = f(x', y'), \quad Q = g(x', y') \quad (5.25)$$

で、 P, Q の値が変わらないのであれば、その値を求めることが目的なのだから、 x, y の代わりに x', y' であってもまったく問題が無い。 x, y は荷物の配達役だと思えばよい。欲しい荷物を届けてくれるのなら x, y に限ることは無い。

(5.22)式と(5.25)式が同値となるための条件式

$$w'(x', y') = 0 \quad (5.26)$$

が存在すれば、(5.24)式と(5.26)式の連立方程式で解を求めることができる。このように、 x と y のセットを P, Q の値が変わらないように x' と y' のセットに変換することを**ゲージ変換**と呼ぶ。 P, Q が x や y の時間・空間領域の偏微分を含むような場合に、積分定数に自由が利き、そういうような置き換えが可能になる。要は、 A, B と x, y が一対一対応でなく、不確定性が有る場合である。

ゲージ変換は、目的に合う解を求めることを容易にするための数学的テクニックであって、加えた条件式に物理的意味を求めることは無意味である。また、様々なゲージ変換が可能な中で、最も解法に見通しの良い変換式を見つけられるかどうかはセンスである。

5.5.2 電磁ポテンシャルを用いたマクスウェルの方程式

マクスウェルの方程式の4つの物理量 $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$ のうちの $\mathbf{D}$ と $\mathbf{H}$ を $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ を使って、電界 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ だけの方程式に変える。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.27a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{i} + \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5.27b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (5.27c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.27d)$$

次に、これらの式の $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ を、電磁ポテンシャル ϕ (スカラーポテンシャル) と $\mathbf{A}$ (ベクトルポテンシャル) に置き換えてゆく。

(5.27d)式は

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad ((5.12) \text{式の再掲}) \quad (5.28)$$

である。(5.27a)式の $\mathbf{B}$ も $\mathbf{A}$ に置き換えて整理すると次式になる。

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (5.29)$$

これより、

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5.30)$$

となる。(5.30)式右辺第1項は、静電界のときの $\mathbf{E}$ と ϕ の関係 ((5.3)式) であり、これを加えても、(5.29)式が満たされるからである。

最終的に求めたい物理量は $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ であるが、式(5.28)と(5.30)により、二つの電磁ポテンシャル ϕ と $\mathbf{A}$ が求められればよいことになる。では、その ϕ と $\mathbf{A}$ が満たすマクスウェルの方程式を求めて行く。(5.27b)式と(5.27c)式の $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ を、 ϕ と $\mathbf{A}$ により書き換えると次式が得られる。

$$-\left(\nabla^2 - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \mu \mathbf{i} \quad (5.31a)$$

$$\nabla^2 \phi + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (5.31b)$$

一応、これで、 ϕ と $\mathbf{A}$ で表されるマクスウェルの方程式を得たが、式の形もアンバランスで美しくなく、かつ、解法も難しそうである。ここで、5.5.1 項で述べたゲージ変換の出番になる。

5.5.3 ローレンツゲージを用いたマクスウェル方程式の美しい形

次の展開のスタートラインの意味で、(5.30)式と(5.12)式を再掲する。

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5.32a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.32b)$$

($\phi, \mathbf{A}$)のゲージ変換、すなわち、 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ が不変な($\phi', \mathbf{A}'$)への変換法を探る。

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \quad (5.33)$$

と表される関数 χ の勾配を加えても (5.32b)式は変わらない。一方、(5.32a)式は影響を受ける。この影響を、

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (5.34)$$

とすることにより、打ち消すことができる。これが($\phi, \mathbf{A}$)から($\phi', \mathbf{A}'$)へのゲージ変換である。

この変換を、式(5.31)を見ながら、具体的にを行う。

もし、(5.31a)式の左辺第2項の中の勾配を求めるスカラー関数が0であれば、式が極めて簡潔になることに気がつく。すなわち、

$$\text{If } \nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (5.35a)$$

$$\rightarrow \left(\nabla^2 - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A} = -\mu \mathbf{i} \quad (5.35b)$$

さらに、(5.35a)式の条件を(5.31b)式に加えると、以下のようなになる。

$$\left(\Delta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (5.36)$$

式(5.35a)の条件式は、**ローレンツ条件**と呼ばれる。またこの変換のゲージは、**ローレンツゲージ**と呼ばれる（注1）。

注1：本書では「ローレンツ」が入る用語が3つ出てくる。ローレンツ力、ローレンツ変換、そしてこのローレンツゲージである。6章で説明するローレンツ力のローレンツもローレンツ変換のローレンツもオランダの物理学者ヘンドリック・ローレンツ（Hendrik A. Lorentz）に由来する。一方、ローレンツゲージのローレンツはデンマークの物理学者ルードヴィヒ・ローレンツ（Ludvig V. Lorenz）に由来する。両者を区別するために、後者をローレンスと呼ぶ人もあり、その場合はローレンツゲージもローレンスゲージと呼ばれる。

いよいよ、最後の詰め。式(2.35b), (2.36)で示した $\phi, \mathbf{A}$ は、元の式(2.31)の $\phi, \mathbf{A}$ とは違うもの（＝ローレンツゲージで変換されたもの）になっているので、これを $\phi', \mathbf{A}'$ と置き直し、二つの方程式とその条件式を整理すると次式になる。

$$\square \mathbf{A}' = -\mu \mathbf{i} \quad \left(\square \equiv \nabla^2 - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \quad (5.37a)$$

$$\square \phi' = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (5.37b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \varepsilon\mu \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0 \quad (5.37c)$$

式中の演算子

$$\square \equiv \nabla^2 - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

は**ダランベール演算子**（ダランベルシアン）と呼ばれる。

式(5.37a), (5.37b)は対称性に優れた非常に美しい形である。複雑な2つの連立方程式が、きれいな形の3つの連立方程式（＝解ける形になっている）に変わったわけである。この解法は、(5.37a)式から $\mathbf{A}'$ を、(5.37b)式から ϕ' を独立に解き、それぞれの中に不確定性を持つ組の中で、(5.37c)式を満たす解を定める手順になる。このようにして求めた $\phi', \mathbf{A}'$ を(5.32)式の $\phi, \mathbf{A}$ に代入することによって、目的の物理量 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ を得ることができる。

式の導出に関してはここで終わり、以下は蛇足である。式(5.33), (5.34)で示したゲージ変換量 χ について触れることは無かった。なぜなら、それを含んだ $\phi', \mathbf{A}'$ が求められたのだから、 χ を求める必要が無いからである。でも、それが具体的にどのようなものか具体的に知りたいということもあろう。それを求めてみる。ゲージ変換の条件式(5.37c)の左辺を ϕ と $\mathbf{A}$ で置き換え、0と置く

と

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A}' + \varepsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla \chi) + \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla^2 \chi - \varepsilon\mu \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0\end{aligned}\quad (5.38)$$

となるので、これを整理すると、次式が得られる。

$$\nabla^2 \chi = -\nabla \cdot \mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5.39)$$

右辺の $\phi, \mathbf{A}$ が与えられれば、 χ が求められる形である。実際には、 $\phi, \mathbf{A}$ を求めるのが困難であるからゲージ変換して $\phi', \mathbf{A}'$ を求めてきた訳で、この式を解いて χ を求めることは無い。解が存在することが言えればよく、 $\phi', \mathbf{A}'$ が既に求められたのであるから、解の存在は言えているということになる。

本節の目的は、美しいマクスウェルの方程式を自分たちで作ってみる、と言うことであつたので、そのことは、ここまでで終わっている。以下は、求めた方程式(5.37)の解について、若干触れたい。

整理された式(5.37)を見ると、電荷がスカラーポテンシャルを、電流がベクトルポテンシャルを作ると読み取れる。しかも、一方がスカラー場を、もう一方がベクトル場を作ると言う違いを除いて、場の構造が同じであることがわかる。この美しさを見ると、電磁場の本質的な物理量は、電界と磁界は二次的なもので、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルがそれであると言って良さそうに見えるがどうであろうか？図 5.4 はこれまでの議論に基づき、電磁界($\mathbf{E}, \mathbf{B}$)、電磁ポテンシャル($\phi, \mathbf{A}$)、電磁界の発生源 ($\rho, \mathbf{i}$) の関係を整理してまとめている。

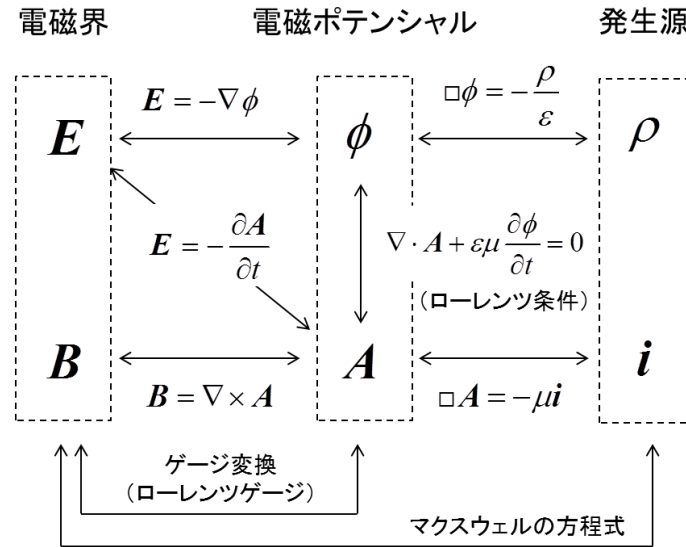
式(5.37)から $\phi', \mathbf{A}'$ を求める方法も確立されている。具体的な解は、電荷や電流の置かれている環境に依存して多様なものになる。一般には、グリーン関数を用いて表されるが、その詳しいことはアンテナ解析を扱う電磁波工学で学んでほしい。

時間変動の無い場合（静電磁界）とある場合（動電磁界）について結果式のみを示しておく。まず、時間変動の無い静電磁界の場合、(5.37)式の時間微分項を 0 として、 $\phi', \mathbf{A}'$ を $\phi, \mathbf{A}$ と置きなおすと(5.37a), (5.37b)式は次式となる。

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (5.40a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{i} \quad (5.40b)$$

もちろん、ローレンツ条件も満たしている。式(5.40)は、スカラーポテンシャル・ベクトルポテンシャルに関するポアソンの方程式と呼ばれ（(5.40a)式は(5.4)式として既に学んでいる）、それぞれの解は

図 5.4 電磁界(E, B)、電磁ポテンシャル(ϕ, A)、電磁界の発生源 (ρ, i) の関係

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (5.41a)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (5.41b)$$

となる。真空中の原点に点電荷 Q がある場合には、(5.41a)式は、デルタ関数を用いて $\rho(\mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r})$ と置き換えられ、 $\phi = Q/(4\pi\epsilon_0 r)$ となって、(5.7)式で学んだお馴染みの電位の式になる。同様に、原点に電流素片を置けば、(5.41b)式は 2.3.1 項で学んだビオ・サバールの法則に行き着く。

時間変動のある動電磁場については次式となる（詳しくは、例えば[2]の 10.6.3 項）。

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (v: \text{媒質中での電磁波の速度}) \quad (5.42a)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (5.42b)$$

参考文献

- [1] 外村彰, “電子波で見る電磁界分布（ベクトルポテンシャルを感じる電子波）,” 信学会誌, vol. 83, no. 12, 99. 906-913, 2000. <https://www.ieice.org/jpn/books/kaishikiji/200012/20001201-1.html>
- [2] 宇野亨, 白井宏, 電磁気学, コロナ社, 2010.

第6章 電磁気学と相対論

電磁気学は4つの法則ががっちりスクラムを組んで、綻びのない理論体系を作り上げているのであるが、電磁気学には我々の好奇心を掻き立ててくれる不思議が随所に隠れている。ここでは、電磁気学の奥深いところを覗いてみるのも楽しいと思い、相対性理論との関係を取り上げる。ニュートン力学が絶対視されていた19世紀、慣性系座標変換の規範となっていたガリレイ変換をマクスウェルの方程式に適用すると、厳密には成立しない問題があった。そのため、電磁気学は、当時、近似の理論と見なされていた。アインシュタインはこの点に着目し、電磁気学の方に真実があることを見抜き、ニュートン力学を近似理論とする特殊相対性理論を作り上げた。その理論が規範とした座標変換規範はローレンツ変換である。本章では、マクスウェルの方程式がローレンツ変換に対して不変であること（共変性を有すること）を示す。電磁気学は、20世紀に吹き荒れた相対性理論による力学革命の嵐を無傷で乗り越え、現代の力学理論の一翼を担っている様子を述べる。

6.1 慣性系の座標変換

6.1.1 物理法則は慣性系に対して不変であるべき

太古より、電気は摩擦から、磁気は磁石から生まれる別々の物理現象と考えられていた。それに対して、電磁気学は、電気は電荷から、磁気は電荷の動き、すなわち電流から生まれるとして、電気も磁気も電荷を介して相互に関連する電気現象であることを明らかにした。その中でも電界 E と磁界 B は電磁気学の主役である（注：本章では便宜的に磁束密度 B を広い意味での磁界とみなして磁界と呼んでいる）。

物理空間内において、直線方向に一定の速度で移動する系は**慣性系**と呼ばれる。図 6.1 はその中の二つの系の座標を示している。慣性系の中では、全てが相対的でどの慣性系が基準であると言うことはない。便宜上 K 系を静止系、 K' 系を移動系と呼ぶが、視点をどこに置くかによって、静止か移動かはいかようにも変わる。現代の物理学では、物理法則は慣性系に対して不変であること（＝共通の式で表されること；**共変性**と呼ばれる）が求められている。例えば、 K 系で電磁誘導の法則が成立するなら K' 系でも同じように成立しなければならない。すなわち、

$$K \text{ 系} : \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \leftrightarrow \quad K' \text{ 系} : \nabla' \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} \quad (6.1)$$

では、どういう座標変換が共変性を満たすのであろうか、それを調べてみたい。

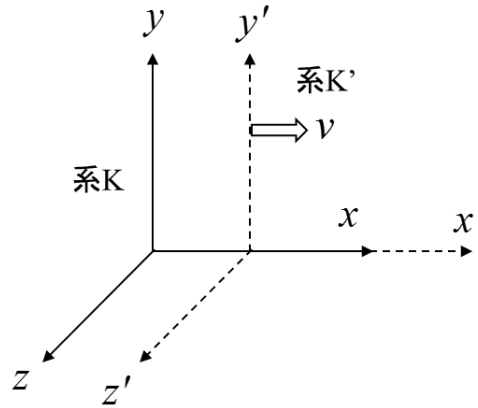


図 6.1 座標系（系 K: 静止系；系 K': 移動系（観測系））

6.1.2 ガリレイ変換では

電磁気学が作り上げられた 19 世紀には、ニュートン力学が絶対で、座標変換は**ガリレイ変換**が規範であった。図 6.1 の座標系では以下の変換になる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

速度 v で動いている電車の中でボールを進行方向に速度 v_0 で投げれば、外で見ている人にはボールの速度は $v+v_0$ になる、といういたって合理的な結果を導き出す。このガリレイ変換のもとで、図 6.2 に従い、以下の電磁気学問題を考えてみよう。

① 図 6.1 の座標 K 系において一様な静電界 E_y がある（向きは上向き）

② この空間を速度 v で動く K' 系の観測者には電磁界がどう見えるか？

である。静電界の中を動いているだけなので、何も変わらないのでは、と思うかもしれないが、ことはそう単純なものではないのである。

③ 静電界がそこにあるということは、それを生み出している環境全体を見ないといけない。電界 E_y の存在には、それを作り出す電荷がなくてはならない。例えば、正負に帯電した無限に大きな平板に挟まれた空間が例として考えられる。この場合、平板の電荷密度 σ は、電界に関するガウスの法則から

$$E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \sigma = \epsilon_0 E_y$$

ということになる。

④ ③の景色を K' 系の観測者が見れば、上下の荷電平板は図の左方向に速度 v で動いており、単位幅当たりの電流 I_0 が上下で反対方向に流れているとみなすことができる。その I_0 の大きさは以下である

$$I_0 = \sigma v$$

この電流が K' 系においては磁界 B_z' を生み出し、アンペアの周回積分の法則から、

$$\frac{B_z' l}{\mu_0} = -\sigma v l \rightarrow B_z' = -\mu_0 \sigma v = -\epsilon_0 \mu_0 v E_y = -\frac{v}{c^2} E_y \quad (c: \text{光速})$$

となる。 K' 系の観測者には、 K 系に有った電界 E_y と共に、 K 系には無かった磁界 B_y' も見えてきた、ということになる。

このような思考実験を繰り返すことにより、 K 系の電磁界 $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ の各ベクトル成分を K' 系の $\mathbf{E}'$, $\mathbf{B}'$ の各成分に変換できる。しかしこのようにして変換したマクスウェルの方程式は(6.1)式の共変性を満たさないのである。このことから、ニュートン力学が絶対であった当時、それにあわない電磁気学は近似の理論とみなされていた。しかし、19世紀末、ローレンツによって編み出され、20世紀初頭アインシュタインが相対性理論の規範としたローレンツ変換が、実は、マクスウェルの方程式を慣性系に対して不変なものにする変換だったのである。以下、これを見てゆきたい。

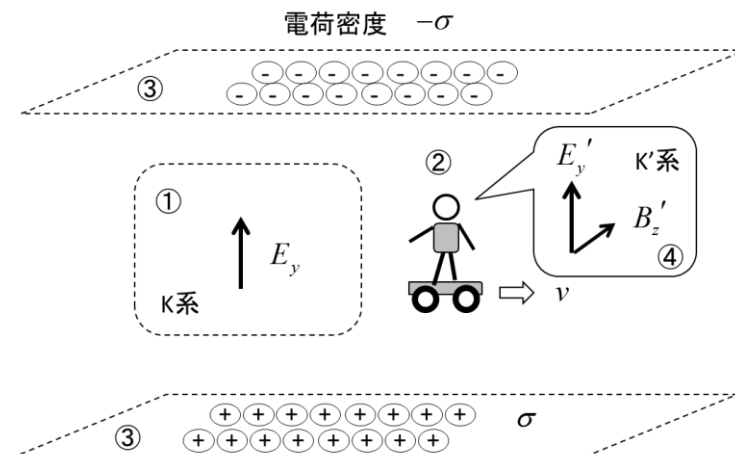


図 6.2 静電界がある環境を動いている人はどう感じるか

6.1.3 ローレンツ変換では

(1) 座標系のローレンツ変換

アインシュタインは、物理現象には、その根底に以下の二つの原理があるとして、それを公理とした力学理論を作り上げた。これが(特殊)相対性理論である。

- 1) 相対性原理 (全ての慣性系は同等である)
- 2) 光速不変の原理 (光の速度は光源や観測者の運動とは無関係に決まる)

1) の原理を満たすためには、2) の原理を受け入れることが必要になる、と読み替えても良い。この場合の座標変換は、二つの条件

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

を満たすように、図 6.1 の観測系について座標変換 ($K \rightarrow K'$) すると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v / c^2 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \geq 1$$

が得られる。この変換が**ローレンツ変換**、 γ は**ローレンツ因子**と呼ばれる。動いているものに対しては、長さが縮み、時間がゆっくり進んでいるように見えるということになる。

K 系の偏微分を K'系の偏微分に置き換える演算が必要になる。

2 変数変換 $(x, t) \Leftrightarrow (x', t')$ の偏微分の関係は下記の公式より

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

であるので、変化の無い方向 (y', z' 軸方向) を含めて、これらを(6.3)式に適用すると以下になる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \\ \frac{\partial}{\partial t'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma v / c^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma v & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

(2) 電界と磁界のローレンツ変換

図 6.3 の座標系 (図 6.1 と共通) において、速度 V で直線運動する平行板コンデンサを考える (平板の大きさは、端の効果が無視できる無限大を仮定)。図 6.2 では、電界の存在だけで議論

したので K 系では平板を静止していたが、磁界も存在するよう、最初から速度 V で動いているとしている (K'系の移動速度 v とは違うものであることに注意)。このコンデンサにおいて、(a) E_y , (b) E_z , (c) E_x の電界が生じる 3 つの向きを調べる。K 系で見たときのそれぞれの板の電荷密度を σ [C/m²] とする。

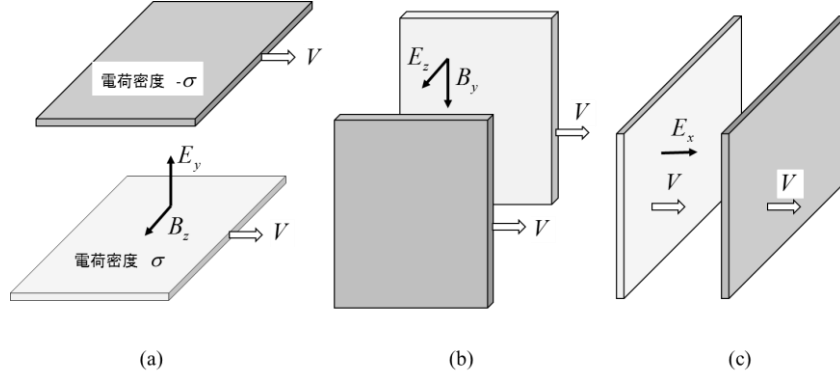


図 6.3 電界と磁界のローレンツ変換を求めるための図

(K 系において、帯電した平行板コンデンサが x 軸方向に速度 V で移動)

同図(a)において、K 系では

$$E_y = \sigma / \varepsilon_0$$

$$B_z = \mu_0 \sigma V$$

となる。これを K'系で見ると、電荷密度のローレンツ変換（長さが縮んで密度が濃くなる）と速度の合成則から

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{vV}{c^2} \right) \sigma = \gamma (E_y - vB_z)$$

$$B'_z = \mu_0 \sigma' V' = \mu_0 \gamma \left(1 - \frac{vV}{c^2} \right) \frac{V - v}{1 - vV/c^2} \sigma = \mu_0 \gamma (V - v) \sigma = \gamma \left(B_z - \frac{vE_y}{c^2} \right)$$

同図(b)からは、

$$E'_z = \gamma (E_z + vB_y)$$

$$B'_y = \gamma \left(B_y + \frac{vE_z}{c^2} \right)$$

同図(c)では、平行板にローレンツ収縮が無いので、

$$E'_x = E_x$$

これで、電磁場6つの成分のうちの5つ成分の変換が求められた。残すは B'_x 。これについては、平板コンデンサを、同図(a)の向きに置き、 z 方向に一定速度で動かす。これを K' 系で見れば、 B_x の x 軸方向へのローレンツ収縮は無いので、

$$B'_x = B_x$$

以上をまとめると、電界と磁界のローレンツ変換は、図 6.1 に示した系 K と K' の関係において次式である。

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \\ B'_x \\ B'_y \\ B'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & \gamma v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma v / c^2 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma v / c^2 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

さらに、電流密度 ρ_e と電荷密度 i_e (i_e の e を省略) のローレンツ変換は次式である (導出の詳細は[1]の § 15.5)。

$$\begin{pmatrix} \rho'_e \\ i'_x \\ i'_y \\ i'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v / c^2 & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_e \\ i_x \\ i_y \\ i_z \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

$\mathbf{E}$ と $\mathbf{D}$ については、誘電率 ϵ_0 を介して $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ 、また、 $\mathbf{B}$ と $\mathbf{H}$ については、透磁率 μ_0 を介して $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ で結ばれる。この ϵ_0 及び μ_0 は、光速 c と同様、座標系に依存しない絶対定数である。

図 6.1 のケースで、ガリレイ変換とローレンツ変換を比較すると、

$$\text{ガリレイ変換 (K 系} \rightarrow \text{K'系)} : E_y = E_y, B_x = 0 \rightarrow E'_y = E_y, B'_z = -\frac{v}{c^2} E_y$$

$$\text{ローレンツ変換 : } E_y = E_y, B_x = 0 \rightarrow E'_y = \gamma E_y, B'_z = -\gamma \frac{v}{c^2} E_y$$

となり、ローレンツ因子がかかるかかからないかの違いである。では、ローレンツ変換ならマクスウェルの方程式に共変性があるのだろうか。以下それを調べてみたい。

6.2 マクスウェルの方程式のローレンツ変換

マクスウェルの方程式を K 系において $f(\mathbf{E}, \mathbf{B})=0$ の形で表したとき、K'系において $f(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ が 0 になることを示して、共変性を確かめる。この変換は、(6.4)～(6.6)式を用いて全く機械的に行うことができる。

ここでは、4つのマクスウェルの方程式のうち、電磁誘導の法則の式(3.1a)の共変性を調べる。

$$\begin{aligned} \nabla' \times \mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} \\ = \left(\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial t'} \right) \mathbf{i}' + \left(\frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial t'} \right) \mathbf{j}' + \left(\frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial t'} \right) \mathbf{k}' \end{aligned}$$

上式の右辺第一項の x' 成分($\mathbf{i}'$)に着目すると、(6.4), (6.5)式により、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial t'} \\ = \frac{\partial E'_z}{\partial y} - \frac{\partial E'_y}{\partial z} + \gamma v \frac{\partial B'_x}{\partial x} + \gamma \frac{\partial B'_x}{\partial t} \\ = \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma v \frac{\partial B_y}{\partial y} - \gamma \frac{\partial E_y}{\partial z} + \gamma v \frac{\partial B_z}{\partial z} + \gamma v \frac{\partial B_x}{\partial x} + \gamma \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ = \gamma \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) + \gamma v \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \\ = \gamma \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{i} + \gamma v \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{aligned}$$

y' 成分($\mathbf{j}'$)は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial t'} \\ = \frac{\partial E'_x}{\partial z} - \gamma \frac{\partial E'_z}{\partial x} - \frac{\gamma v}{c^2} \frac{\partial E'_z}{\partial t} + \gamma v \frac{\partial B'_y}{\partial x} + \gamma \frac{\partial B'_y}{\partial t} \\ = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ = \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{j} = 0 \end{aligned}$$

第6章 電磁気学と相対論

z' 成分($\mathbf{k}'$)も同様に、

$$\frac{\partial E_y'}{\partial x'} - \frac{\partial E_x'}{\partial y'} + \frac{\partial B_z'}{\partial t'} = \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{k} = 0$$

これらをまとめると、各成分が全て 0 であるので

$$\nabla' \times \mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} = \mathbf{0} \quad (6.7)$$

同様な手順で、磁束密度のガウスの法則 ((3.1d)式) を調べる。

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \mathbf{B}' &= \frac{\partial B_x'}{\partial x'} + \frac{\partial B_y'}{\partial y'} + \frac{\partial B_z'}{\partial z'} \\ &= \gamma \frac{\partial B_x'}{\partial x} + \frac{\gamma v}{c^2} \frac{\partial B_x'}{\partial t} + \frac{\partial B_y'}{\partial y} + \frac{\partial B_z'}{\partial z} \\ &= \frac{\gamma v}{c^2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \frac{\gamma v}{c^2} \frac{\partial B_x}{\partial t} + \gamma \frac{\partial B_x}{\partial x} + \gamma \frac{\partial B_y}{\partial y} + \gamma \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ &= \frac{\gamma v}{c^2} \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{i} + \gamma \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$(\text{rev-1 改訂時に削除して欠番}) \quad (6.9)$$

$$(\text{rev-1 改訂時に削除して欠番}) \quad (6.10)$$

これにより、マクスウェルの方程式(3.1a)と(3.1d)のローレンツ変換に対する共変性が示されたことになる。この2式がまったく別のものではなく、お互いの変換の中に、助け合って現れているのが非常に興味深い。

マクスウェルの方程式の残りの二つ：(3.1b)と(3.1c)についても、同様の手順で共変性が示される(興味ある人は試して欲しい)。

このように、電磁気学理論を構成するマクスウェルの方程式は慣性系に対してローレンツ変換の下で不変と言う性質が具備されていることがわかった。マクスウェルがそれを意識して方程式を作ったからではなく、電磁気に関する法則にそういう性質が隠れていて式に表したらそうなっていたのである。このおかげで、電磁気学は20世紀の冒頭に吹き荒れた相対性理論の嵐を無傷で乗り切ることができ、現代の力学理論の一翼を担っているのである。さらに言えば、アインシュタインは、ニュートン力学と電磁気学の矛盾に対して電磁気学に軍配を上げ、その規範に基づき作り上げたのが相対性理論であったとも言えるのである。

6.3 ローレンツ力

電磁気学は4つの法則を連立方程式にしたマクスウェルの方程式よりなる。法則は、電荷に働く力（電気力；クーロン力）や電流に働く力（磁気力；アンペアの力）から生まれており、電気と磁気の力学に関する理論である。しかしながら、現在、電磁気学教科書に出てくる4つの方程式は電界と磁界の関係、すなわち場（フィールド）の関係を表すものになっていて、力の作用（＝電磁力学）が陽には見えてこない。この力学を担う方程式が、ローレンツ力と呼ばれる式である。この式もマクスウェルの方程式同様、慣性系に対して不変である。本節は、ローレンツ力を持つ不思議な性質をまとめている。一見、パラドックスに思えるローレンツ力の力学問題も相対性理論によって、辻褄が合う説明ができる。

6.3.1 ローレンツ力とは

電界 $\mathbf{E}$ 、磁束密度 $\mathbf{B}$ の中に速度 $\mathbf{v}$ で動いている電荷 q がある。この電荷に働く力 $\mathbf{F}$ は次式で表される。

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.11)$$

（電気力） （磁気力）

上式の右辺第1項が電気力（クーロン力）、第2項が磁気力（アンペアの力）であり、合わせた力はローレンツ力と呼ばれる。(6.11)式はマクスウェルの方程式と同列に扱われる式であるので、マクスウェルの方程式がローレンツ変換と言う座標変換に対して不変であったと同様に、ローレンツ変換に対して不変である。すなわち、等速直線運動をするいかなる座標系（＝慣性系）に対しても(6.11)式は成立する[2]。ここでは、(6.11)式が慣性系に対して不変であると言うことを導くことが目的ではない。慣性系に対して不変であると言うことを受け入れれば、一見パラドックスと思われることも全て辻褄が合うように説明できるということを、簡単な二つの例（ケース1、ケース2）を用いて示したい。

ここでは、図6.4の座標系に示すように、静止座標系 K と、速度 $\mathbf{v}$ で x 軸方向に動く慣性系 K' で考える（座標系そのものは図6.1と同じ）。 K 系において電界の向きを y 軸正方向にとり、ケース1では磁束密度を z 軸の正方向に、ケース2では負方向にとる。いずれも、二つの要因（電界と磁束密度）による力の向きは y 軸方向ではあるが、ケース1は逆向き、ケース2は同じ向きになる。

$$\text{ケース1 (K系)} : F_y = qE_y - qvB_z \quad (6.12a)$$

$$\text{ケース2 (K系)} : F_y = qE_y + qvB_z \quad (6.12b)$$

ケース1の特別な場合として、電気力と磁気力が等しい大きさであったとする。この場合は、釣り合いが取れていて、 $F_y=0$ である。これを電荷と一緒に動いている系（ K' 系）で見るとどうであろうか。 K' 系では電荷の速度は0なので、磁気力は無く電気力のみになる。 K 系で balan

スがとれているのなら、すなわち、 $F_y=0$ であるのなら、 K' 系でもバランスがとれていなければならない、すなわち $F_y'=qE_y'=0$ である。本当に電界は消えてしまったのだろうか？6.3.2 項では、そういうことを調べてみたい。

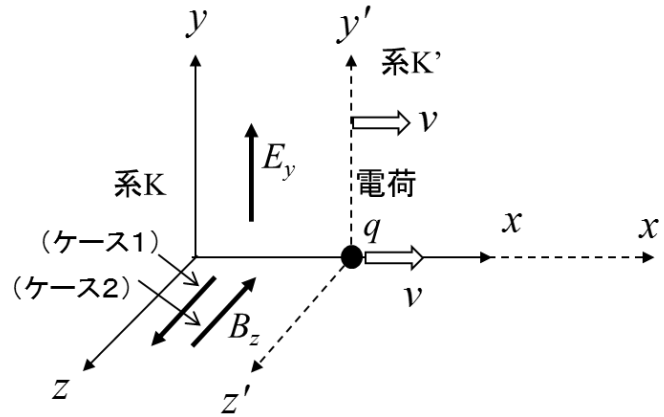


図 6.4 速度 v で動く電荷と座標系（系 K : 静止系；系 K' : 移動系（電荷と共に動く））

6.3.2 慣性系でのローレンツ力

（1）ケース 1：バランスは大丈夫？

式(6.12a)で表されるケース 1 において、電気力と磁気力のバランスが取れている場合、すなわち、 $F_y=0$ を考える。

$$F_y = 0 \quad \rightarrow \quad E_y = vB_z \quad (6.13)$$

これを電荷 q （符号は正）と共に動いている系 K' でみると、電荷に働く力は $v=0$ なので、磁気力は無く、電気力のみになり、力 F' は以下のように展開される。

$$\begin{aligned} F_y' &= qE_y' \\ &= q\gamma E_y - qv\gamma B_z \\ &= \gamma F_y = 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

このことによって、両系共にバランスが取れており、矛盾がない。

（2）ケース 2：時間の進み方

ケース 1 と同様に、 K' 系で電荷に働く力 F_y' を求めると、以下になる。

$$F_y' = qE_y'$$

$$\begin{aligned}
&= q\gamma E_y + qv\gamma B_z \\
&= \gamma F_y
\end{aligned} \tag{6.15}$$

電荷が静止しているときの質量を m_0 とする（注：電荷そのものは質量 0 であるが、帯電している荷電粒子に質量がある）。K 系では電荷は動いているので、相対性理論により、その状態での質量は γm_0 である。一方、K' 系では静止しているので m_0 である。

それぞれに、質量に対して力が働いているのであるから、そこには y 方向に対する加速度場があり、K 系では a_y 、K' 系では a_y' とする。力学の原理 $F=ma$ より、それぞれの系では

$$F_y = \gamma m_0 a_y, \quad F_y' = m_0 a_y'$$

であるので、両系の加速度 a_y 、 a_y' は

$$a_y' = \gamma^2 a_y \tag{6.16}$$

である。

$x=x'=0, t=t'=0$ で静止質量 m_0 の電荷が、それぞれ、微小時間 $\Delta t, \Delta t'$ 後に、加速度方向 (y 軸方向) へ微小に動く距離を $\Delta l_y, \Delta l_y'$ とするとき、それぞれ以下の位置になる。

$$\begin{aligned}
\Delta l_y &= \frac{1}{2} a_y (\Delta t)^2 \\
\Delta l_y' &= \frac{1}{2} a_y' (\Delta t')^2 = \frac{1}{2} \gamma^2 a_y (\Delta t')^2
\end{aligned}$$

ここで、微小時間、微小距離としているのは、時間を長くとると、電荷の動きの向きが x 方向からずれてきて、発生する力の向き（＝加速度の向き）が変わってしまい、それを避けるためである。

それぞれの系の物差しで $\Delta l_y = \Delta l_y'$ となる時間を計ると、

$$\Delta t' = \frac{1}{\gamma} \Delta t \tag{6.17}$$

となる。

式(6.3)で時間と空間のローレンツ変換を見ると、 Δt と $\Delta t'$ の関係については

$$\begin{aligned}
\Delta t' &= -\frac{\gamma v}{c^2} \Delta x + \gamma \Delta t \\
&= -\frac{\gamma v^2}{c^2} \Delta t + \gamma \Delta t = \frac{1}{\gamma} \Delta t
\end{aligned} \tag{6.18}$$

となって、(6.17)式と一致している。動いている人の系の時間を、静止系の時計で見ると時間の

進み方が遅いということを意味している。これは相対性理論が教えてくれている事実そのものである。

このようにして、ローレンツ力に関する力学的振る舞いを、異なる慣性系から相対論視点で見ると辻褄が合っていて、電磁気学のからくりの一端に触れることができるであろう。

6.4 動く電荷が作る電磁界

静止した電荷は電束の源（湧き出し）となって、その周囲に放射状の電界を作る。では、これが一定速度で動いている場合には、周囲にどのような電磁界を作るのか、この問題を考えてみたい。本内容は江沢洋らの科学啓蒙書[3]に取り上げられ、定量的な解説がなされているが、それを筆者流に読み解いた形でまとめなおしている。江沢等の言葉を借りれば、「動く電気力線は磁場を生む」である。

【問題設定】

図 6.5 に示すように、電荷 q が x 軸方向に一定速度 v で動いている。このとき、空間にできる電磁界はどうなっているのだろうか。電荷の速度が光の速度に近づくとどうなるのだろうか。この問題を通して電界と磁界の関係を考えてみたい。

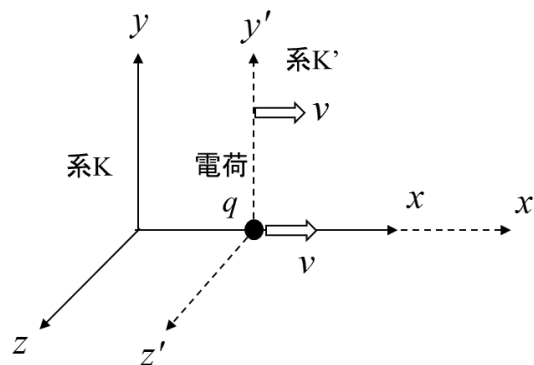


図 6.5 速度 v で動く電荷と座標系（系 K: 静止系；系 K': 移動系（電荷と共に動く））

6.4.1 静止系（K 系）および移動系（K' 系）でみるマクスウェルの方程式

この問題を定式化するために二つの座標系：電磁界を求めたい座標系（静止系 K）と電荷と共に動く人が見る座標系（移動系 K'）で考える。まず、K 系で、この現象をマクスウェルの方程式で表すと以下となる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.19a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 q v \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.19b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{vt}) \quad (6.19c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.19d)$$

ここで、 δ はディラックのデルタ関数である。

求めたい電磁界はこの方程式を解けばよいのであるが、直接に解くのは難しそうに見える。そこで、電荷と共に動く K' 系に置き換えて解くことを考える。なぜなら K' 系では磁界 (磁束密度) が 0 となって、解きやすいであろうと考えるからである。

ローレンツ変換の式(6.3), (6.4), (6.5)を用いて、 K 系のマクスウェルの方程式を K' 系に座標変換し、 K' 系でのマクスウェルの方程式を作ってみよう。この手順は (6.19)式を根気よく変換して行けばよく、結果として次式にたどり着く。

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} \quad (6.20a)$$

$$\nabla' \times \mathbf{B}' = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} \quad (6.20b)$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{E}' = \frac{q}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{x}') \quad (6.20c)$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{B}' = 0 \quad (6.20d)$$

この部分の導出の説明は省略したい。なぜなら、よくよく考えれば、 K' 系でのマクスウェルの方程式は電荷が $\mathbf{x}'=0$ に止まっていて、かつ、電荷量 q はローレンツ変換に対して不変 (=電荷保存の法則) であるのだから、いきなり (6.20)式からスタートしても良いと考えるからである。 K 系から K' 系への(6.19)式から(6.20)式への変換はその出発点の妥当性を確かめただけと言えるからである (この部分の変換の詳細は[3]の 14 章に)。

さらに、 K' 系では電荷は止まっているので、電磁界に時間変化は無く時間微分項は全て 0 になるので、電界に関するガウスの法則により、以下のように整理できる。

$$\mathbf{E}' = \frac{q\mathbf{r}'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \quad (6.21a)$$

$$\mathbf{B}' = 0 \quad (6.21b)$$

6.4.2 静止系 (K 系) における電磁界

K' 系で得られた電磁界を K 系に変換するには、式(6.3)~(6.5)の変換の逆変換をすればよいのであるが、その変換式は、同式両辺のベクトルで表されている量を入れ替え、かつ、行列要素の中の $\mathbf{v}$ を $-\mathbf{v}$ にすればよい (K' 系を静止系と見れば、 K 系が x 軸の負方向に速度 $\mathbf{v}$ で動いているのと等価であるので)。すなわち、電磁界の座標変換式は以下である。

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & \gamma v \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & -\gamma v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma v/c^2 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \gamma v/c^2 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \\ B'_x \\ B'_y \\ B'_z \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

式(6.21)を(6.22)に代入すると

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'_x \\ \gamma E'_y \\ \gamma E'_z \\ 0 \\ -(\gamma v/c^2) E'_z \\ (\gamma v/c^2) E'_y \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} E'_x &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(x-vt)}{(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ E'_y &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y}{(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

などにより、(6.23)式を整理してまとめると

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0 (\gamma^2 (x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x-vt \\ \gamma y \\ \gamma z \\ 0 \\ -(\gamma v/c^2)z \\ (\gamma v/c^2)y \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

となり、これが求めたかった答えである。電界と磁束密度の関係は次式である。

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{v}{c^2} \begin{pmatrix} 0 \\ -E_z \\ E_y \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad (6.25)$$

6.4.3 速度と共に変わる電界と磁界

式(6.24)により求める解が得られたので、電磁界が速度と共にどう変わるかを見てみたい。電磁界は電荷を中心とする一定の範囲に集中して存在し、この形を保ったまま電荷と共に x 軸方向に動いてゆくので、 $t=0$ すなわち、電荷が $x=0$ を通過した瞬間を調べてゆきたい。この時、電磁界は

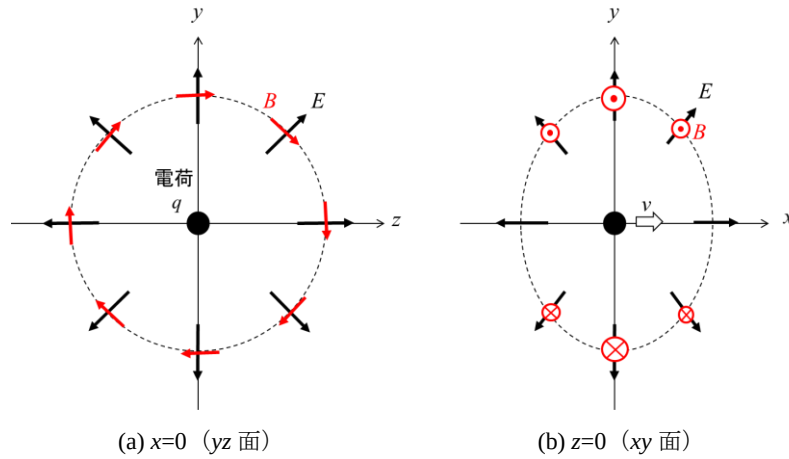
$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0 (\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ \gamma y \\ \gamma z \\ 0 \\ -(\gamma v/c^2)z \\ (\gamma v/c^2)y \end{pmatrix} \quad (@ t=0) \quad (6.26a)$$

である。これでもまだイメージがわきにくいので、 $x=0$ 面 (yz 面@ $x=0$) と $z=0$ 面 (xy 面@ $z=0$) での電磁界分布を図 6.6 に示す。式で表すと以下である。

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{\gamma^2 q}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \\ 0 \\ -(\nu/c^2)z \\ (\nu/c^2)y \end{pmatrix} \quad (@ t=0, x=0) \quad (6.26b)$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0 (\gamma^2 x^2 + y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ \gamma y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\gamma\nu/c^2)y \end{pmatrix} \quad (@ t=0, z=0) \quad (6.26c)$$

単一電荷であるから、電荷に近いほど電界の強度は大きくなる、すなわち、 $\nu=0$ の場合は等高線が球面で、大きさは距離の2乗に反比例し、 $0<\nu<c$ では x 軸方向に扁平な楕円球面になる。



(電荷の移動方向は紙面表から裏へ)

(速度が速いほど楕円の扁平率が大きくなる)

図 6.6 動く電荷が作る $t=0$ における電磁界 ($0<\nu<c$) (点線は電界強度の等高線をイメージ)

以上より、電荷が静止している状態 ($\nu=0$) では、径方向に球面状に広がる電界成分のみであったものが、動くことにより、動く方向に扁平な楕円球面状に広がる形に変わる(扁平度はローレンツ因子で決まる)。それに伴い、静止状態では存在しなかった磁界(磁束密度)が yz 面上に渦状に現れてくる。動く電束(あるいは電界)が磁界を生み出す様が理解できる。磁界は電界の相対論的効果とも言えよう。

本節での設定では電荷が動くとしたが、相対的な意味で、静止している電荷の近くを動く観測者が感じる電磁界でもある。

ではこの速度が光速 ($v=c$) になったらどうなるであろうか。ローレンツ因子 γ が無限大になるから楕円球の短軸が 0 になり、電磁界は yz 平面の中に閉じ込められる (電界および磁束密度の等高線は円)。この時、 E_y と B_z の比を見ると、(6.25)式より

$$\frac{E_y}{B_z} = c \rightarrow \frac{E_y}{H_z} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \equiv Z_0 \quad (@ v = c) \quad (6.27)$$

となり、電界と磁界 (H) の比に換算すると、自由空間のインピーダンス $Z_0 (\simeq 377\Omega)$ に等しくなっている。本来は波動方程式の解から得られる電磁波の空間インピーダンスが、このような道筋からも現れてくるのが興味深い。

参考文献

- [1] 太田浩一, *電磁気学の基礎 II* (§15.6), 東京大学出版会, 2012.
- [2] R.P.ファインマン, R.B.レイトン, M.L.サンズ: (宮島龍興訳), *ファインマン物理学 III 電磁気学* (§15-6), 岩波書店, 1969.
- [3] 江沢洋, 上條隆志 編), *相対論と電磁場* (§14), 江沢洋選集 II, 日本評論社, 2019.

第7章 近接作用で見る電磁誘導の法則

電磁気学の根幹を支える法則の一つに電磁誘導の法則がある。これまでも述べてきたとおり、あくまで経験則であってその現象が正しいことを証明できる人は誰もいない。例外がないから法則として成立していて、我々はそれが正しいと信じて受け入れているだけである。でも、そこにはどのようなからくりがあるかについては、思考を巡らすことによって物理現象に対する理解を深めることができる。この章では、電磁誘導現象である磁界中の起電力発生メカニズムについて、近接作用の視点で、すなわち、空間に置かれた導線ループの線上だけを見て、何が導線に対して作用しているかを調べる。現場に起きる出来事は原因もその現場にある、という発想である。この追求によって得られた描像は次のとおりである。導線は電界センサーを持っている。導線の周りにはベクトルポテンシャルが充満しているが、電界センサーはそれを感じ取ることはできない。しかし、それが少しでも時間変化すれば電界センサーが反応する。起電力はその反応の結果である。これはひとつの解釈であるが、物理現象を現場に起きる出来事とみて、現場に原因を求める態度は、狭義な意味での近接作用の考え方であり、電磁誘導の法則はそれを学ぶのに良い教材になろう。

7.1 電磁誘導の法則と近接作用

議論の始めに、クーロン力を例に、**近接作用**の考え方をおさらいしたい。距離が離れた位置に二つの電荷 Q と q がある。一方の電荷 q に着目すると、電荷 q は Q 方向に力 F を受ける（クーロン力：電荷の極性が同じ場合は反発力、異なる場合は引力）。このとき、電荷 q に Q が直接に力を及ぼしている（すなわち、引っ張っている、あるいは押し返している）と見るのが**遠隔作用**の考え方である。それに対して、電荷 Q が周囲に電氣的な歪をもつ場（すなわち電界 E ）をつくり、電荷 q の置かれている場所にもその場が広がっていると考え、電荷 q はその場所にてきている電界 E の作用で $F=qE$ の力を受ける、と考えるのが**近接作用**の考え方である。現場に起きることは原因も現場にある、ということである。大局的には電荷 Q によって作られた電界ではあるが、電荷 q にとっては、どこでどのようにして作られたかには関係なく、自分のいる場所にどのような電界があるかだけが気になることであり、この後の議論も、この視点で進める。

電磁誘導の法則は2.4節で学んでいる。電磁誘導の法則を表す方程式は、以下の3つが代表的である。

$$V = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (7.1)$$

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (7.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.3)$$

式(7.1)～(7.3)はどれも電磁誘導の法則を表す方程式であり、同じ現象を違う言葉で表している。電磁誘導の原因から結果までを通して整理すると、

- ① 磁束密度（磁界）が時間的に変化する
 - ② その場所に電界の回転（ $\nabla \times \mathbf{E}$ ）で表される場が生まれる
（向きは磁界の変化を防ぐ方向）
 - ③ その周囲に渦状の電界 $\mathbf{E}$ ができる（注1）
 - ④ その電界中に置かれている導線に起電力 V が発生する
- となるであろう。

この整理の中では近接作用の考え方は③、④に現れている。式の上ではそうなのであるが、磁界の存在場所とループ状導線の位置の関係が異なる3つのケース（ケース1：完全に重なる、ケース2：部分的に重なる、ケース3：重なりがない）を個別に見てゆくと、電界の存在が必ずしも明確に見えない場合がある。これを調べてゆきたい。（なお、本章では、それが磁束密度 $\mathbf{B}$ であっても磁界と呼ぶことが多い）。

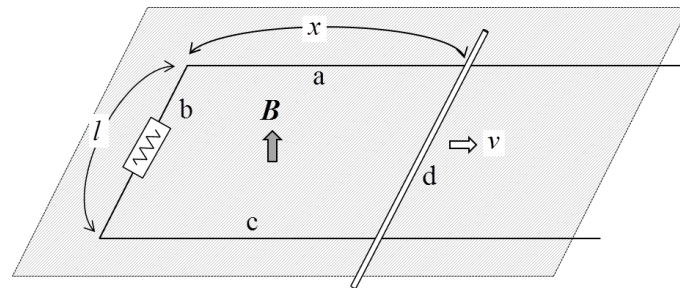
注1：4.3.1項（ストークスの定理）でも述べたとおり、電界の回転（ $\nabla \times \mathbf{E}$ ）は、その周囲に渦状の電界（ $\mathbf{E}$ ）を生み出す種（渦巻きを作る力、モーターの回転軸）であって、“電界の回転”と“渦状の電界”は、物理量としての性質も存在する場所も違うものである（ $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ の場所にも $\mathbf{E}$ はあるというように）、と言う認識を持って欲しい。

図7.1に示す3つのケースを考える。同図(a)と(b)で示すケース1とケース2では、均一磁界中を、辺 d で表す導線が間隔 l の平行な辺 a, c と接触を保ちながら一定速度 v で動いていることは共通であり、違いは磁界が存在する範囲（図で影をつけて描いた範囲）である。ケース1は2.4節で例題2.8として既に解いている。（図中ループの途中に抵抗を入れているが、これは起電力によって生まれるループ電流を抑えて磁界を乱さなくするためのもので、起電力算定には大きな意味は無い）。ケース3を表す同図(c)は、導線ループの中にループを貫くように磁界が存在し、かつ、導線部分には磁界は無い場合である。具体的には無限ソレノイドの外側（電界も磁界も存在しない）を導体ループで囲んだような場合である。この場合は、ソレノイドの誘起電流 I を制御し、電磁誘導が起きよう中心の磁界を時間的に変化させる。

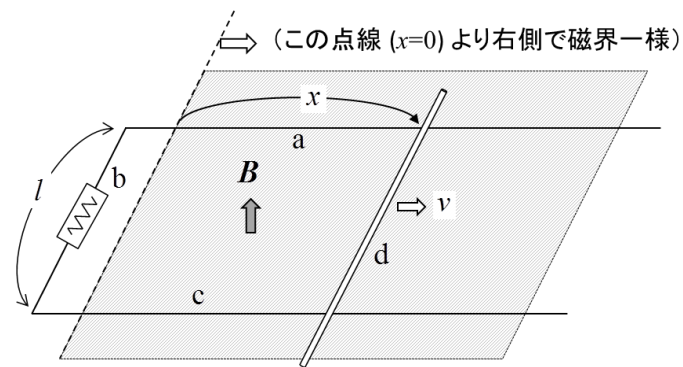
この3つについて、式(7.1)を用いて、ループに発生する起電力 V を求めると、ケース1、2では $V = Blv$ と、その値がたちどころに求められる（例題2.8）。ケース3も具体的に磁束密度の時間変化率を与えれば、同様に求められる。このようにして、(7.1)式は万能である。でも、これで、めでたしめでたしと終わってしまっては本章の出番はない。

(7.1)式は、導線に現れる起電力が、すなわち、導線ループに起きることが、導線から離れた部分の磁束密度変化に対応しており、直接に導線のところで何が起きているかを読み取りにくい。

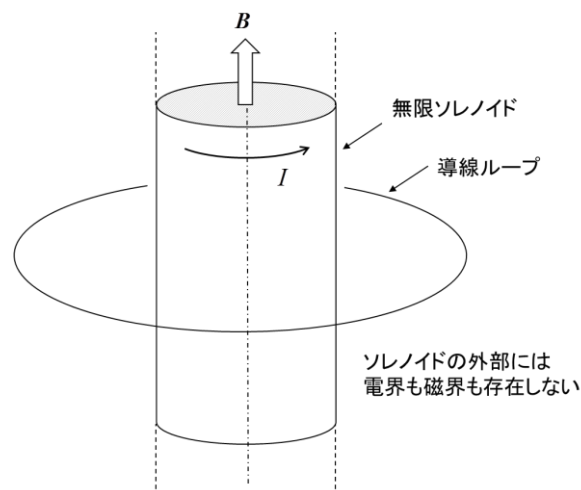
(7.2)式も同様であり、導線の現場である線積分が、現場から離れた面積分で得られている。これが電磁誘導の法則だと言われれば、納得せざるを得ないが、導線と場との直接的な作用が見えず、何かもやもや感が消えない。



(a) ケース 1 (磁界内にループがある場合；磁界の向きは面に垂直)



(b) ケース 2 (ループが磁界外の領域を含む場合)



(c) 磁界がループの中であって、ループが置かれている領域には無い場合

図 7.1 電磁誘導を検討する 3 つのケース

7.2 ローレンツ力で説明できるか

電磁誘導の現象を導線に起きる出来事という目で見てみたい。

ケース1, 2について、4つの辺のうち、電磁現象が起きそうなのはどれかを探す。辺 a, b, c は磁束密度も導線の位置も時間的に変化無く、何も起こりそうにない。一方、辺 d は磁束密度中を動いているので、何かあるとしたらここである。辺 d は導線なので、この中には、電荷が存在する（正負等電荷量だが、動くことができるのは負電荷を持つ電子の方）。この電荷密度を λ [C/m] とする。辺 d の導体棒に存在する荷電粒子（電荷）は磁界中の移動になり、ローレンツ力を受ける。長さ l にある電荷全体が受ける力 $\mathbf{F}$ は

$$\mathbf{F} = \lambda l \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

であり、向きは導線方向になる。一方、荷電粒子に加わる力はクーロンの法則の帰結（ $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ ）から、電界があるところにおいて

$$\mathbf{F} = \lambda l \mathbf{E}$$

であるので、

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

で与えられる電界が導線 d にかかっていることと等価になり、発生する起電力 $V = El = -Blv$ となって、式(7.1)を用いた前述の結果と同じになる。

この解法から言えることは、閉路に起きることは閉路を構成する導線のところにその現象を引き起こす場が存在し、その作用によって導線に起電力が生まれるということである。近接作用の考え方からは、導線に起きることは、導線の場所に何かが無ければ起きないのだから、この解法はその精神に合致している。しかし、ケース3については、この解法は無効である。さらに、ケース2においても、この解法は以下の議論により適用が限定的である。

ケース1, 2では、導体棒を速度 $\mathbf{v}$ で移動させたが、移動する棒と共に動く観測者が見る現象を考える（6章で学んだ異なる慣性系で同じ物理現象を見る視点）。この場合は、棒は止まっているのでローレンツ力は生まれない。ゆえにこの棒には起電力は生まれない。その場合、ケース1では、反対側の辺 b が磁界中を逆方向に動いているように見えるので、こちら側にローレンツ力が働き、結果として、ループに生まれる起電力は変わらない。それに対して、ケース2では、反対側の辺 b は磁界中にないので、ここにも何もおきず、全体として起電力は0ということになる。ゆえに、電磁誘導の現象をローレンツ力で説明するのは、できる場合もあるが、全てをこれで行うには無理と結論せざるを得ない。さらに、ローレンツ力の議論は導体内の電荷への力を考えているので、単にループ状の経路があってその線積分の結果としての起電力と考えると、その実態が見えてこないという弱点もある。

なお、ケース2で視点が辺 d と共に動く場合に対しても、6.3節で述べたように、相対論的に電磁界を考え、座標系の変換をローレンツ変換で行うことによって辺 d の部分に電界が現れてく

るので現象の説明が可能である。また、それをケース1に適用しても、反対側にある辺 b の部分に現れる電界とその部分に現れるローレンツ力に起因する電界が打ち消しあい、矛盾無く起電力を求めることができる。しかし、ケース3に対しては無効であることに変わりない。

以上見てきたように、導線の電荷に働くローレンツ力や相対論による説明は有力であるが、それだけで全てのケースの電磁誘導現象を共通に説明することはできず、ここで求めたかった汎用的な近接作用の解釈としては満足できるものではなかったといえよう。

7.3 導線に起電力を生み出すものは何か

導線ループが置かれている経路上に電界があれば、その線積分として起電力が得られるわけで、次式である。

$$V = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (7.4)$$

電磁誘導の基本式である式(7.2)は、線積分と面積分との関係を与えるもので、導線に対する直接の作用が見えない。式(7.3)は電界の回転 ($\nabla \times \mathbf{E}$) と磁束密度の時間微分を点对点で結び付けているが、繰り返し述べてきたように $\nabla \times \mathbf{E}$ と $\mathbf{E}$ は異なる物理量であり、この式を変形しても(7.2)式以上のものは出てこない。図7.1の3つのケースについて、(7.4)式の $\mathbf{E}$ の部分に共通に入る磁場関係の物理量は何であろうか？それがわかれば、本章で追及している近接作用の問題がクリアになる。

そのためには、もうひとつ、新たな役者に登場してもらう必要がある。5.3節で学んだベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ である。ベクトルポテンシャルは磁束密度との関係で次式により定義されている。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (7.5)$$

ベクトルポテンシャルが単に数学的なものなのか、物理量として実態があるかの議論については、後者であること (= 実在する物理量) を 5.4 節で紹介している。(7.5)式を(7.3)式に代入すると

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \quad (7.6)$$

であるので、電界 $\mathbf{E}$ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ には以下の関係が有る。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (7.7a)$$

上式の右辺第1項は微分方程式から出る積分定数であり、静電界の話であって、ここでの議論には関係しないので、第2項のみに着目し、

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (7.7b)$$

と結び付けられる。

さらに、磁束と磁束密度の関係、及び、ベクトルポテンシャルの定義より

$$\oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_0} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \Phi_m \quad (7.8)$$

である。これを整理すると(7.4)式を磁場の目で見た電磁誘導基本式は

$$V = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \rightarrow \quad V = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{または} \quad V = -\oint_c \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} \quad (7.9)$$

このように見てくると、電磁誘導の現象は以下のように解釈される。

- ① 空間内に磁場があるとき、空間全体がベクトルポテンシャルで満ちている
- ② ベクトルポテンシャルの時間変化量（時間微分値）が電界の働きをする
- ③ その等価電界の中に導線があると、その線上に起電力が生まれる

図 7.2 は関連する式も含めて上記の解釈をまとめている。

ケース 3 については、式(7.8)からベクトルポテンシャルの導線に沿った線積分が Φ_m として得られるので、起電力はその時間微分で求められる。では、ケース 1 とケース 2 はどうであろう。この扱いは両ケースで共通なのでケース 1 で説明する。磁場は静的なので、それによって生まれるベクトルポテンシャルも空間に静的な場を作っている。ただし、その大きさは周囲の全ての磁場の寄与によって成り立っている所以図の設定だけでは情報が不足していて確定はできない。しかしひとつだけ言えることがある。それは、ベクトルポテンシャルの経路に沿った周回積分はそのループを鎖交する全磁束に等しい、ということである（式(7.8)）。すなわち、

$$\oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Phi_m \quad (\text{式(7.8)の再掲})$$

である。

$$\oint_{abcd} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = Bxl = Bvlt \quad \rightarrow \quad -\frac{\partial}{\partial t} \left(\oint_{abcd} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right) = -Bvl = V$$

より、 $V = -Bvl$ を得る。このように、ケース 1 ～ 3 の全てにおいて、ベクトルポテンシャルの近接作用（＝導線への直接的な働きかけ）とみると、首尾一貫した説明ができる。導線自体はベクトルポテンシャルそのものには何の感じるところもないが、それが時間的に変化すると電界として感じられるのである。

電磁誘導の法則の本質は(7.3)式で表される関係で、それが全てを言い尽くしている。また、この種の問題を解きたいだけなら(7.1)式で事足りるであろう。ここで述べてきたことは、近接作用の考えの追求であり、導線に起きることは、その導線に何かが直接に作用しているのであろうからそれを見つけないと言う目的であった。ローレンツ力の働きに原因を求めることも有力であったが、それだけでは説明できないこともあった。そして行き着いたものが、ベクトルポテンシャルの場が空間を覆っていて、ループの位置にあるベクトルポテンシャルの時間変化にループ導線が反応するということである。考えられる複数ケースにおいて、うまく説明できることがわかり、これを本章の結論としたい。

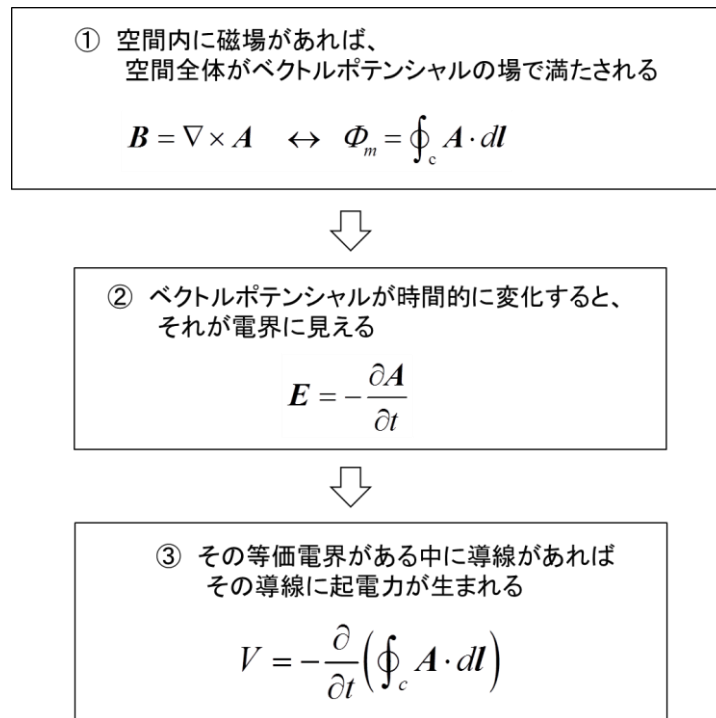


図 7.2 電磁誘導現象を近接作用的に捉えた一つの描像

余談 1：誘導起電力を測る（ここにもある不思議）

電磁誘導を学ぶ過程において、以下のような疑問が湧いたことはないであろうか？図 7.3 に示すように、時間に比例して磁界が強くなっている場があり、ここに抵抗体で構成される円形ループが置かれている。ループを貫く磁束を $\Phi_m(t) = \Phi_{m0} + \Delta\Phi_m t$ とすると、ループには $V = -\Delta\Phi_m$ の起電力が発生し、ループ一周分の抵抗を R とすると $I = -\Delta\Phi_m/R$ の電流が流れる。このループの任意の場所 P と Q 間の電位差 V_{PQ} を電圧計で計ったらどういう値を示すであろうか？という問である。

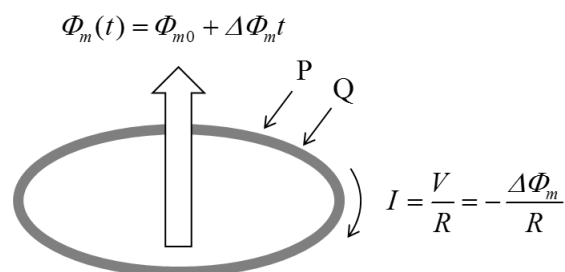


図 7.3 磁界の時間変化によって発生する誘導起電力と抵抗体ループに流れる電流
(PQ 間の電位差は？)

電気回路的に考えると、抵抗体に電流が流れているのだからその部分で $I\Delta R$ (ΔR は PQ 間の抵抗) 電圧降下するわけだから $|V_{PQ}| = I\Delta R$ と予想される。しかしこの答えはすぐ破綻していると気がつくであろう。PQ の間隔を広げて行くとやがて反対方向に回って Q が P 点に届いたとき、電圧計は IR なのか 0 なのかと。あるいは、 V_{PQ} を時計方向に測るのか、反時計方向に測るのかで値が違ふぞと。このパラドックスはどう考えればよいのだろう。

これに対しては以下の説明はどうであろう。

図 7.4 のように抵抗でつながれた輪を考える。 $\sum r = R$ である。説明の分かりやすさから 8 角形の絵にしているが、実際は無限大多角形、すなわち円である。同図(a)は誘導起電力がない場合、電流は流れていない。同図(b)は電磁誘導によって誘導起電力がループ内に一様に発生した状態を示す。 $\sum v = V$ である。これによって電流は $I = V/R$ 流れる。同図(b)を見ると、各部分部分で、誘導起電力 v と抵抗 r による電圧降下がペアになって打ち消し、PQ 間の電位差は、P, Q をどのようにとっても $V_{PQ} = 0$ になる。これが答えであると言ってよさそうである。でも、磁界が空間的に不均一で線上の起電力が場所によって異なる場合はどうなのだろう、どこかに電位差が現れるのだろうか。

図 7.1(a) のケース 1 を、辺 d の動く導体中の電荷へのローレンツ力による起電力生成と考えると、起電力 V は辺 d に発生することになる。視点を動く棒に置けば、反対側の辺 b が動いていることになり、起電力の発生場所が異なることになり、あれっと思う。さらに、導線上のベクトルポテンシャルの線積分 (式(7.9))、あるいは、電磁誘導の基本式 (式(7.2)) では、ループ一周分の起電力 (= 積分値) がわかることを言っているのみであり、発生場所の情報を持たない。本章での、導線への直接的な働きかけに目を光らせてきたこととは矛盾する物言いになってしまうが、電磁誘導においては、どの場所に起電力が生まれているかの追求はあまり意味のあることではないのかもしれない。

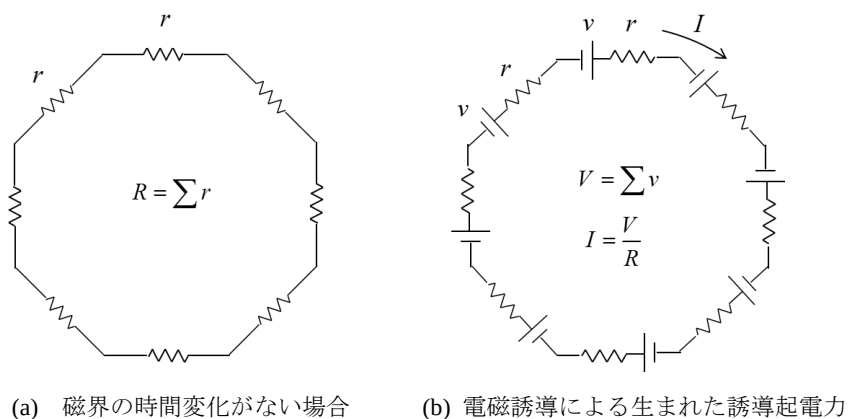


図 7.4 円形ループに対する電磁誘導の等価回路 (8 角形の例で)

余談2：電磁誘導と磁力線

電磁誘導の発見者ファラデーは磁力線の存在に拘ったと言う[1]。鉄粉をまいたガラス板の下に磁石を置くとN極とS極を結ぶような線が見えてくるが、磁力線自体が実在するとはだれも考えなかった（ファラデー以外は）。ファラデーは電磁誘導の説明に、磁力線が存在するところで、それを切るように導線が動くと、あるいは、導線があるところを磁力線が動いて導線を切ると、その導線に電磁誘導が起きると考えた。本文で述べたローレンツ力で説明する考え方だ。しかし、磁力線を切ることが見えないケース3での説明ができず、完ぺきではないと本文で述べた。しかし、ケース3についても、ソレノイドの中に勝手に磁力線が増えてゆくと言うのは、おかしい。実態がある磁力線が増えたということはその磁力線はどこからかやってきたわけである。それは外側から中に入って行ったはず、そのとき、導線を切ったはず、と考えると、ケース3でも、説明できるのかなと思うがどうであろうか？（ケースは異なるが、類似の議論が[2]でも行われている）

参考文献

- [1] ヨセフ アガシ（立花希一訳），*科学の大発見はなぜ生まれたか*，ブルーバックス B-1395，講談社，2002.
- [2] 江沢洋，上條隆志（編），*相対論と電磁場（江沢洋選集II）*，日本評論社，2019.

第8章 電線を流れる電流の速さ

電線に電圧をかけて電流を流し、相手にエネルギーや信号を送る仕組みは電気回路の授業で学ぶ。しかし、電気回路で扱うスケールは地球規模に比べて十分小さいので、エネルギーが届く時間についてはあまり気に留めることはなかったと思う。一方、電磁気学では、空間を伝搬する電波の速さは光の速さになること、すなわち、電波も光も同じ電磁波であることを学ぶ。では、電線を流れる電流の速さはどのくらいなのであろう。電流も光の速度に近いという話がある一方で、それを運ぶ電子の移動速度はカタツムリの歩み程度しかない、ということも言われている。何か不思議である。電流の速さという言葉自体が正しくないのかもしれない。本章では、電磁気学的視点からこの疑問を読み解き、丁寧に噛み砕いた形でまとめている。

8.1 電気エネルギーの伝送

距離の離れた2点間で、電氣的エネルギーを伝送するには、主なものとして、アンテナを用いて空間を電波の形で伝送する（空間伝送）か、中空の金属パイプの中に電波を閉じ込めて伝送する（導波管伝送）か、導線に電流を流して伝送する（有線伝送）かの三つの方法がある。空間伝送と導波管伝送は学部レベルの電磁気学や電磁波工学（あるいは、電波工学、マイクロ波工学）の授業でしっかり学ぶはずである。

本章では、電線を伝わる電気エネルギーの伝送速度に着目する。空間伝送では電波の速度は光の速度であること、導波管伝送では、管内に存在できる種々のモードに依存した速度になることを学んでいる。では、有線伝送では、どうであろうか？というのが本章での問いである。

有線伝送の場合、何の速度を見ればよいのであろうか？エネルギーは、電荷を電流の形で相手に運ぶわけだから電流の流れる速さを調べればよいということになりそう。18世紀の中ごろ、ホイットストンは、導線を伝わる電流の速度が光の速度に近いことを調べ、フィゾーは電話線を用いた測定で光速度の2/3を得ていたと言う[1]。一方、導体内において、電流（電荷）を運ぶ担い手となる電子の動きは、カタツムリの歩みより遅いらしい（[2]の例題6.1、あるいは[3]）。足の遅いランナーに荷物を預けたら、超スピードで届けてくれたという有り得ないことが起こっている。どうなっているのだろうか？本章では、このメカニズムを分かりやすく解説する。

有線伝送では、2本の導線を用意し、一方を電流の送り出し、もう一方を受け止めに使う。電流の向きが反対になり、一方が I のとき、もう一方は $-I$ である。この特性を理論的に調べたい場合には、幾何学的に対称な構造が望ましく、典型的なものとして、2本の平行導線（間隔は信号の波長に比べて十分狭い）と、同軸円筒ケーブルの二つがある。前者（平行導線）はレッヘル線と呼ばれ、アナログテレビ時代のフィード線や商用電源の送電線でお馴染みである。電磁界解析を容易に行うには、円筒同軸ケーブルの方が向いており、本章でも円筒同軸ケーブルの場合を扱う。円筒同軸ケーブルは、導波管の一種ともみなせるが、伝送モードが異なっており、本目的のメカニズム説明に好都合である。

8.2 準備

8.3節では円筒同軸ケーブルでの説明を行うので、ベクトル表示及びマクスウェルの方程式を円筒座標で表しておく。

円筒座標系 (1.2節参照)

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad dv = r dr d\varphi dz$$

$$\mathbf{A} = A_r \hat{\mathbf{r}} + A_\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z \hat{\mathbf{z}}$$

$\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\mathbf{z}}$ は、 r, φ, z 方向の単位ベクトル

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

円筒座標でのマクスウェルの方程式

本章に出てくるマクスウェルの方程式は、以下の二つである。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{電磁誘導の法則}) \quad (8.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{アンペア・マクスウェルの法則}) \quad (8.1b)$$

円筒同軸ケーブルでは次節で説明するように、電界 ($\mathbf{E}$)・磁界 ($\mathbf{B}$: 正確には磁束密度であるが、ここでは磁界と呼ぶ) は、円筒座標の3成分に対して、 E_r と B_φ のみであり、かつ φ 方向に依存しないため、式(8.1a)と(8.1b)を、円筒座標を用いて、この条件で書き表すと、(8.1a)の φ 方向成分、および、(8.1b)の r 方向成分は、それぞれ次式になる。

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} = -\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} \quad (8.2a)$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_r}{\partial t} \quad (8.2b)$$

波動方程式の一般解（ダランベールの解）

波動方程式が、空間の1変数（例えば z ）にしか依存しない場合

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(z, t) = 0 \quad (8.3)$$

の形になる。変数 z, t を下記の関数 u, v で置きなおす。

$$u = z - ct, \quad v = z + ct$$

この変数 u, v に対して任意の関数を $F(u), G(v)$ とすると、1次元の波動方程式の一般解は次式で与えられる。

$$\psi(z, t) = F(z - ct) + G(z + ct) \quad (8.4)$$

これは、ダランベールの解と呼ばれる（導出の詳細は、微分方程式の教科書を見て欲しい）。これは、任意の波形（ F, G ）が、 z 方向の正の方向と負の方向に、速度 c で伝達されることを意味している。定常状態においては、 F と G は、次式の形であり、

$$F(z, t) \propto \exp\{-j(z - ct)\}, \quad G(z, t) \propto \exp\{-j(z + ct)\}$$

そのときの F や G の偏微分は次式である。

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -jF, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = jcF \quad (8.5a)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = -jF, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = -jcF \quad (8.5b)$$

これで、以下の説明に対する準備完了である。

8.3 電流の速度

図 8.1 に示す中空の円筒導体（半径 b ）の中心に一本の円筒導線（半径 a ）がある無限に長い同軸ケーブルを考える。内側の導線に電荷密度 λ の、外側の円筒に電荷密度 $-\lambda$ の電荷があり、中心の導線に電流 I 、外側円筒に反対方向の電流 I が流れているとする。中空部分の電界と磁界は次式となる。

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (8.6a)$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (8.6b)$$

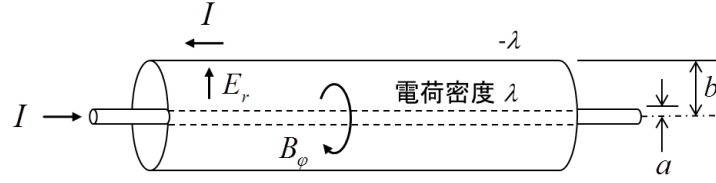


図 8.1 円筒同軸ケーブル

同軸ケーブルの単位長さ当たりの静電容量を C 、導体間の電位差を V とすると、

$$V = \int_a^b E_r dr = \frac{\lambda \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi\epsilon_0} \quad (8.7)$$

$$C = \frac{\lambda}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (8.8)$$

ファラデーの電磁誘導の法則(8.2a)より、

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} = -\frac{\partial B_\phi}{\partial t} \rightarrow \frac{C}{\epsilon_0} \frac{\partial V}{\partial z} + \mu_0 \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \rightarrow c^2 C \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \quad (8.9a)$$

アンペア・マクスウェルの法則(2b)より、

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_r}{\partial t} \rightarrow \mu_0 \frac{\partial I}{\partial z} + \frac{C}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial I}{\partial z} + C \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (8.9b)$$

両式より

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0 \rightarrow I = F_I(z - ct) + G_I(z + ct) \quad (8.10a)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \rightarrow V = F_V(z - ct) + G_V(z + ct) \quad (8.10b)$$

であるので、式(8.9), (8.10)と(8.5)より、

$$F_V = \frac{1}{cC} F_I, \quad G_V = -\frac{1}{cC} G_I$$

となり、

$$V = Z \{F_I(z - ct) - G_I(z + ct)\} \quad (8.11)$$

で表される。ここで、

$$Z = \frac{1}{cC} = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi\epsilon_0 c} = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) Z_0 \quad Z_0 \equiv \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 [\Omega] \quad (8.12)$$

単位時間に伝送するエネルギー（＝電力）を、電流と電圧が運ぶとすると

$$P_{VI} = VI = Z \{F_I^2(z - ct) - G_I^2(z + ct)\} \quad (8.13)$$

空間の電磁波が運ぶとすると、ポインティングベクトル

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\lambda I}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{z}}$$

の絶対値を同軸ケーブルの中空部分の断面で積分することにより、次式となる。

$$P_{EB} = \int_0^{2\pi} \int_a^b S r dr d\phi = 2\pi \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\lambda I}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = VI = P_{VI} \quad (8.14)$$

この結果から、単位時間に運ぶエネルギー（＝電力）は、電線の電圧 V と電流 I が運んでいると考えてもよいし、電線の周りの空間の電磁波（ $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ ）が運んでいると考えても良い、ということになる。

式(8.10a), (8.11), (8.13)の形から、導線による伝送においては、電流も電圧もエネルギーも光の速度で進むということが示されたわけである。 z 軸の正の方向に進む電圧の成分に着目してみれば、 $V=ZI$ であり、 $V=\lambda/C$, $Z=1/cC$ より、

$$I = c\lambda \quad (8.15)$$

となって、電荷が光速で動いて電流を作っているように見える。

しかし、電荷を運ぶ電子そのものの移動速度は、量子力学的考察から極めて緩慢であることが知られている[3]。では、この結果をどう解釈すればよいのであろうか？この問題に関しては、現在の電磁気学では、以下のように解釈されている（と筆者は理解している）。

- 1) 電磁エネルギーは導線の周りの電磁波（電界と磁界）が運ぶ（式(8.14)）。電磁波は自由空間を伝搬するので、速さは光速である。
- 2) この電磁波に触発されて、電線に電荷が誘起される。誘起された電荷は、電磁波の進行に伴

って光速で動いているように見えるが (式(8.15))、実際にそのスピードで進行方向に動いているわけではない。それぞれの位置で出たり消えたりしているだけである。海の波が伝搬するとき、海水がその速度で動いているわけではないのと同じである。しかし、同じ電荷ではないにしても、式(8.15)で示されているように、一つ一つの電荷が光速で動いたと同じことが起きていることは確かである。

2)をもう少し分かりやすく言うと、手旗信号による情報伝達に例えられる。旗の上下運動によって、情報は高速で進むが、手旗を動かしている人は、その位置に留まっており、速く走る能力は求められていない (手を動かすスピードの速さは求められるが)。

これで、説明は終わるが、新たな疑問。同軸ケーブルの空間の一部に、電波吸収材を埋め込むと、電線はつながっていても、電流は流れなくなると言うことになるのであろうか？

ここでの説明では、往復の導線が完全に対称構造で、かつ、伝送損失やインダクタンスの影響がないものとしている。実際はそうではなく、故に波形も歪んだり弱くなったりするが、そのような例については、ヘビサイドの「電信技手の方程式」以来、様々な検討が進められて今日の伝送線路の学問大系に至っている[1]。

参考文献

[1] 太田浩一, 電磁気学の基礎 II, 東京大学出版会, 2012.

[2] 宇野亨, 白井宏, 電磁気学, コロナ社, 2010.

[3] <http://azusa.shinshu-u.ac.jp/~coterra/enjoyphys/current2.html>

第9章 フリスの伝達公式

電磁気学の授業では、図 1.2 に示したように、マクスウェル山の登頂、すなわち、マクスウェルの方程式が出そろったところをゴールとすることが多い。電磁現象を解析できる万能な道具を手に入れたところまでである。実際にはこの道具を使いこなすことが難儀であり、電磁波工学という次のステップの授業科目にバトンタッチされてゆく。そして、そこでは、アンテナ、様々な媒質中の電波伝搬、反射・回折・散乱、マイクロ波回路などを学ぶことになる。本章では、電磁波工学を学んだ先の無線通信工学への橋渡し、fris の伝達公式を取り上げる。fris の伝達公式は自由空間伝送における受信電力を算定する公式であり、無線伝送の基本式（イロハのイ）である。そのfris の伝達公式の基礎は電磁気学にあり、アンテナ利得と実効面積の関係が鍵を握る。本章では、アンテナの基本的性質の説明に比重を置く形でfris の伝達公式を学ぶ。

9.1 アンテナとは

9.1.1 アンテナ解析の概要

アンテナは無線機器と空間とのインターフェースを担うハードウェアである。機器で作り出された電気信号を電波として空間に送り出す、あるいは、到来してきた電波を受け止め、電気信号として機器に取り込む働きをする。前者は送信アンテナ、後者は受信アンテナである。

第3章や5章で述べたように、電磁波は、導体上に存在する電流が時間変化することにより生まれる。ゆえに、アンテナの放射特性は、導体で構成されるアンテナ上の電流分布が分かれば、そこから生まれる電磁界はマクスウェルの方程式によって求めることができる。また、アンテナ上の電流分布そのものもマクスウェルの方程式で定めることができる。

角周波数 ω に対するアンテナ特性解析の一般的な手順は以下のとおりである。

- ① 空間 V 内に置かれているアンテナ上の電流密度分布 $\mathbf{i}$ より放射電磁界に寄与するベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を次式により求める（5.5節で述べた式(5.42)）

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} dV \quad (9.1)$$

- ② ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ から次式によって磁界 $\mathbf{H}$ を求め、その結果を用いて電界 $\mathbf{E}$ を求める

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} \quad (9.2)$$

$$\mathbf{E} = -j \frac{1}{\omega \epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H} \quad (9.3)$$

一般論としてはこの手順で良いのであるが、実際には、解析的に（＝数式的に）解けるものは

少なく、計算機による数値計算に頼ることになる。また、アンテナの形状、例えばダイポールアンテナやヘリカルアンテナのように線状構造であるか、ホーンアンテナやパラボラアンテナのような面状構造であるかによって、解析の仕方も異なったものになる。種々のアンテナに対する具体的な解析手法や特性については、電磁波工学、あるいは、アンテナ工学の専門書で学んでほしい。

9.1.2 微小ダイポールアンテナ

本項では、一つの例として、微小ダイポールアンテナの解法を学ぶ。これを取り上げるのは以下の二つの理由による。

- 1) 数式的に解けるアンテナであり、解析の具体例が分かる
- 2) フリスの伝達公式導出の過程で、この特性が必要になるからである。

図 9.1 に微小ダイポールアンテナの構造を示す。 z 軸方向に波長に比べて十分短い長さ l の導線（微小ダイポール）がある。この導線上を空間的に一様な電流 I が流れていて、角速度 ω で時間変動をしている。（注：実際の構造は微小ダイポールの中央に給電点があり、そこから電流が供給されているのであるが、遠方から見れば、ダイポール上の電流だけが見えるので図では一本の棒になっている）

$$I = I_0 e^{j\omega t} \quad (9.4)$$

電流連続の法則（あるいは電荷保存則）より、導線の両端はこの電流を受け止めるための電荷の蓄積（増減）があるが、ベクトルポテンシャルを求めることには影響しない。

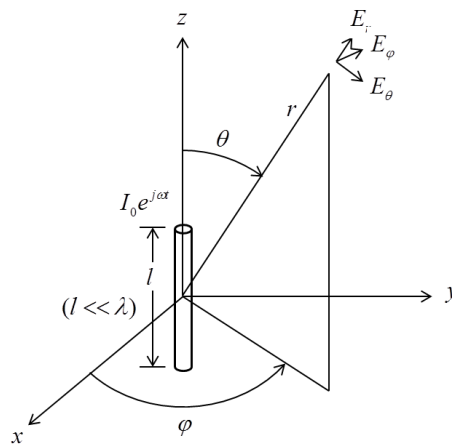


図 9.1 微小ダイポールアンテナと座標系

このとき、ベクトルポテンシャルは z 方向成分のみであり、 l が十分短いことより、(9.1)式のベクトルポテンシャルは以下で求められる。

$$A_z = \frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \left(k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \right) \quad (9.5)$$

ここで k は電波の波数、 λ は波長である。

ベクトルポテンシャルの極座標における各成分は

$$\begin{aligned} A_r &= A_z \cos \theta \\ A_\theta &= A_z \sin \theta \\ A_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (9.6)$$

であるので、(9.2)式で与えられる磁界の各成分は次式となる。

$$\begin{aligned} H_r &= H_\theta = 0 \\ H_\phi &= \frac{I_0 l}{4\pi} \left(j \frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta e^{j(\omega t - kr)} \end{aligned} \quad (9.7)$$

電界成分は (9.3) 式より、次式のように求められる。

$$E_r = \frac{I_0 l Z_0}{2\pi} \left(\frac{1}{r^2} - j \frac{1}{kr^3} \right) \cos \theta e^{j(\omega t - kr)} \quad \left(Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \right) \quad (9.8a)$$

$$E_\theta = \frac{I_0 l Z_0}{4\pi} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} - j \frac{1}{kr^3} \right) \sin \theta e^{j(\omega t - kr)} \quad (9.8b)$$

$$E_\phi = 0 \quad (9.8c)$$

上式より、微小ダイポールアンテナによって生み出される電磁界は、距離 r に対して $1/r^3$, $1/r^2$, $1/r$ の三つの成分よりなることが分かる。これらはそれぞれ、

$1/r^3$: 準静電界 (静電界における電気双極子による電界の距離特性と等価)

$1/r^2$: 誘導電磁界 (ビオ・サバールの法則に従う誘導界)

$1/r$: 放射電磁界

と呼ばれる。準静電界と誘導電磁界はアンテナのごく近傍に漂う電磁界で遠方に伝わることは無い。一方、放射電磁界はアンテナから空間に電力を放射して遠方に伝搬してゆくので、無線通信に利用される。

放射電磁界は遠方放射界ともよばれ、 $r \gg \lambda$ において以下で表される。

$$E_\theta = j \frac{I_0 l Z_0 \sin \theta}{2\lambda r} e^{j(\omega t - kr)} \quad (9.9)$$

$$H_{\phi} = j \frac{I_0 l \sin \theta}{2\lambda r} e^{j(\omega t - kr)} = \frac{E_{\theta}}{Z_0} \quad (9.10)$$

電界と磁界の比は、3.2 節の式(3.11)で与える自由空間の固有インピーダンス $Z_0 (\approx 377\Omega)$ になる。

微小ダイポールアンテナの放射電力は、アンテナを包む閉曲面 S 上のポインティング電力の法線方向成分を積分すれば得られ、 $r \gg \lambda$ において次式になる。

$$P = \int_S \frac{|E_{\theta}|^2}{2Z_0} dS = \frac{\pi Z_0}{3} \left(\frac{I_0 l}{\lambda} \right)^2 \quad (9.11)$$

このときの放射抵抗 R は $P = (1/2) I_0^2 R$ より、

$$R = \frac{2P}{I_0^2} = \frac{2\pi Z_0}{3} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (9.12)$$

となる。

9.2 アンテナ利得と実効面積

9.2.1 アンテナ利得

通常、アンテナは受動的な装置なので、入力された電力以上にアンテナから電力が放射されることはないが、特定の角度方向に対して集中して放射される場合には、3次元空間に均一に放射されたときの遠方での電界強度を基準にして電力密度比をとると、その角度に対しては比の値が1以上になる。このため、この比を利得と呼んでいる。極座標表示で表される十分に遠方の地点 (r, θ, ϕ) でのアンテナの放射電界を $E(r, \theta, \phi)$ と表すと、アンテナ**指向性利得**が次式のように定義される。

$$D(\theta, \phi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{|E(r, \theta, \phi)|^2}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |E(r, \theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta d\phi} \right) \quad (9.13)$$

指向性利得 D が距離 r の関数でないのは、 r が十分大きい地点、すなわち、アンテナからの電波が平面波として届く距離では、 D は距離に依存しなくなるためである。この指向性利得の角度特性は**アンテナ放射パターン**とも呼ばれる。 E が方向 (θ, ϕ) に対して依存性がない場合、すなわち**無指向性** (isotropic) である場合には、式(9.13)の分母での正規化により、全方向に対して $D=1$ となる。ある方向の利得が大きいということは、その方向に集中して電波が放射されているということを意味している。

実際のアンテナは、入力した電力の全部が空間に出てゆくことはなく、内部で吸収されたり、入力ポートに反射されて戻ってくるものもある。そのため、効率 $\eta (\leq 1)$ を用いて、**アンテナ利**

得 G を次式のように定める。

$$G(\theta, \varphi) = \eta D(\theta, \varphi) \quad (9.14)$$

回線設計をする場合には、指向性利得 D ではなくて、真の実力であるアンテナ利得 G を用いる。アンテナの利得は、 $10 \log_{10} G$ で求められる dB (デシベル) に換算して表されることが普通である。この場合、無指向性アンテナを基準とする意味で dBi と表記される。最大利得の方向を中心とする部分の指向性を主ローブ (主ビーム)、主ローブ以外の方向にある低利得なビームをサイドローブと呼ぶ。主ローブで最大利得から 3dB 低下する部分の角度幅は電力半値幅と呼ばれ、指向性の鋭さの目安になる。図 9.2 はアンテナ放射パターンと関連するアンテナ用語を説明している。

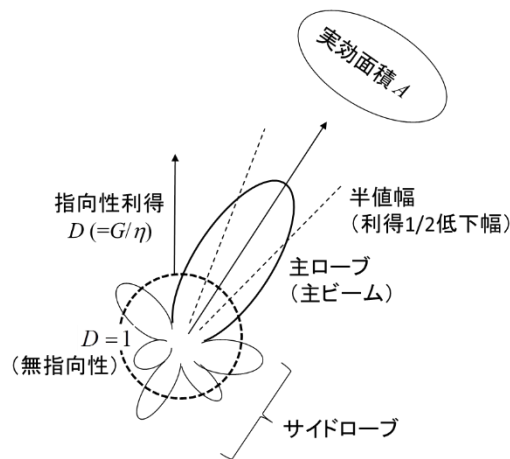


図 9.2 アンテナパターンと関連するアンテナ用語 (実効面積の説明は後述)

9.2.2 アンテナ利得の送受信可逆性

アンテナ特性の大事な性質であり、かつ、フリスの伝達公式の前提になる**アンテナ利得の送受信の可逆性**、すなわち、送信アンテナの利得や指向性は、それを受信アンテナに用いたときの利得や指向性と同じであるという性質を述べる (詳細は[1]に)。

この可逆性は、電気回路における**相反定理** (テレゲンの定理) を根拠とする。図 9.3 に示すように 2 ポートが対向した線形受動素子で構成される回路を考える。同図(a)のように、ポート 1 側に電流 I_1 を流した時、ポート 2 側に電圧 V_2 が現れる。また、同図(b)のように 2 側に電流 I_2 を流すと、1 側に電圧 V_1 が現れたとする。相反定理とはこの状態で、

$$I_1 V_1 = I_2 V_2 \quad (9.15)$$

となる性質である。この証明は電気回路の教科書に譲る。

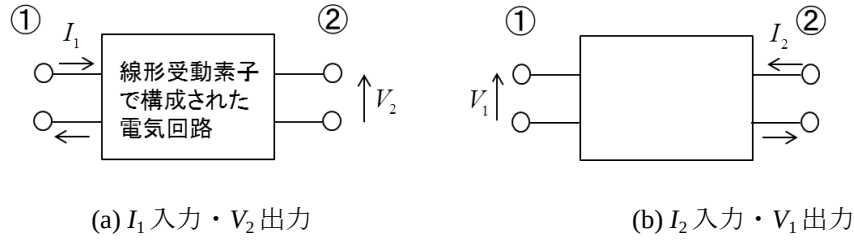


図 9.3 4 端子回路の相反定理の説明図

この定理を二つのアンテナが送受信で対向する場合に適用する。アンテナが向き合う関係は、両アンテナ間に線形受動素子が入った回路と等価である。図 9.4 を用いて、アンテナ利得の送受信の可逆性を説明する。ここでは 3 つのアンテナを用いる。一つは着目するアンテナ、すなわち、被測定アンテナで、これを A_1 とする。もう一つは、 A_1 と対向するアンテナで A_2 とする。さらに、基準アンテナとして、利得が既知な A_0 を用意する。 A_1 と A_0 のアンテナのインピーダンス（抵抗）は、それぞれ R_1, R_0 とする。また、 A_0 は A_1 との比較のために用意するものであり、 A_0 が置かれる位置は A_1 と同じ場所である。

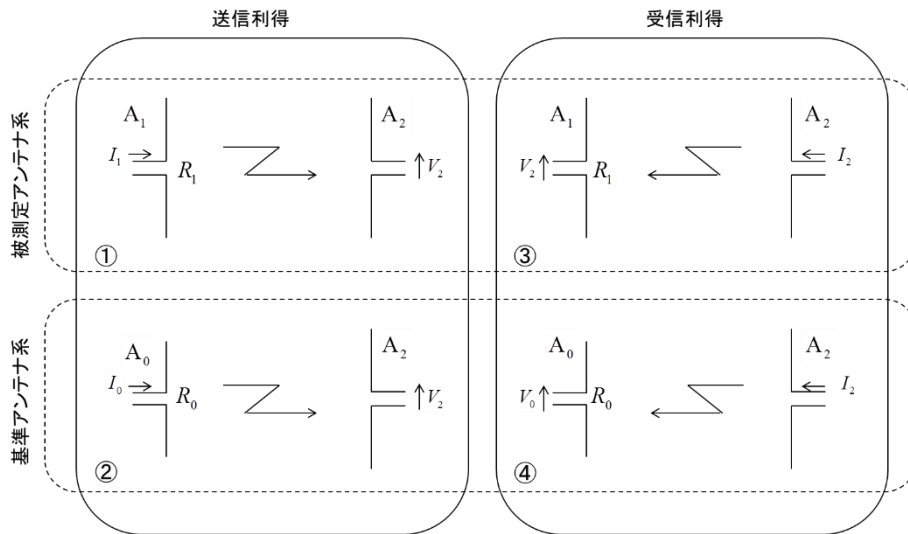


図 9.4 アンテナ利得の送受信可逆性を説明するための図

以下の手順に従って議論を進めてゆく。

- ① A_1 のポートに電流 I_1 を流す。この時、 A_2 の出力は V_2 であるとする
 - ② A_1 の場所に A_0 を置き、電流 I_0 を流して、 A_2 の電圧が V_2 になるように I_0 を調整する。
- この思考実験によって、基準アンテナに対する送信利得の関係が以下のようにわかる。

$$A_1 \text{ の送信電力: } P_{t,1} = R_1 |I_1|^2$$

$$A_0 \text{ の送信電力: } P_{t,0} = R_0 |I_0|^2$$

測定アンテナの利得と基準アンテナの利得の比：

$$\frac{G_{t,1}}{G_{t,0}} = \frac{P_{t,0}}{P_{t,1}} = \frac{R_0 |I_0|^2}{R_1 |I_1|^2} = \frac{R_0 |V_1|^2}{R_1 |V_0|^2} \quad (9.16)$$

となる。式の最終辺への変換は、相反定理の式(9.15)を用いている。

次に、受信アンテナ利得を調べる。

③ A_2 のポートから電流 I_2 を流す。このとき、 A_1 のポートの電圧を V_1 とする

④ A_1 を A_0 に置き換え、その状態で、 A_2 のポートから電流 I_2 を流す。このとき、 A_0 のポートの電圧を V_0 とする

このとき、 A_1 と A_0 の受信電力は、それぞれに整合負荷（ A_1 では R_1 、 A_0 では R_0 ）の接続により、

$$A_1 \text{ の受信電力： } P_{r,1} = |V_1|^2 / (4R_1)$$

$$A_0 \text{ の受信電力： } P_{r,0} = |V_0|^2 / (4R_0)$$

となる。測定アンテナ(A_1)と基準アンテナ(A_0)との電力比が、受信アンテナ利得の比になるので、以下の式となる。

$$\frac{G_{r,1}}{G_{r,0}} = \frac{P_{r,1}}{P_{r,0}} = \frac{R_0 |V_1|^2}{R_1 |V_0|^2} \quad (9.17)$$

式(9.16)と (9.17) の比較より、両者の比は等しいことが分かる。基準アンテナには、理論的に利得の分かったアンテナ（例えば、半波長ダイポールアンテナ）を想定すればよく、かつ、基準アンテナ（例えば、微小ダイポールアンテナ）では、理論計算によって、送信アンテナ利得と受信アンテナ利得は等しいことが確かめられているので、任意のアンテナについて、アンテナ利得の送受信可逆性、すなわち、

$$G_r(\theta, \varphi) = G_t(\theta, \varphi) \quad (9.18)$$

が成り立つ。

9.2.3 実効面積

アンテナには実効面積（あるいは有効面積）の概念があり、受信アンテナとして、どのくらいのエリアの電波を受信しているかの目安になる。電力密度 p_0 [W/m²] の平面波の中にアンテナを置き、整合負荷（アンテナ抵抗に等しい）で受信したとき、受信電力が P_r [W] であったとする。このとき、実効面積 A_r [m²] は

$$A_r = P_r / p_0 \quad (9.19)$$

で定義される。

開口面アンテナのように受信面がイメージできるアンテナでは、それが実効面積の目安になる（ただし、通常はアンテナの効率が1以下であるので、実開口面積よりは効率に応じて小さくなる）が、線状アンテナのように面積がイメージしにくいアンテナでは、実効面積を推定するのは簡単ではない。

図9.5は実効面積（受信）の定義を説明している。なお、実効面積についても、送信アンテナとしての実効面積 A_t が定義でき、詳しい議論は省くが、実効面積も送受信で等しくなる可逆性がある。

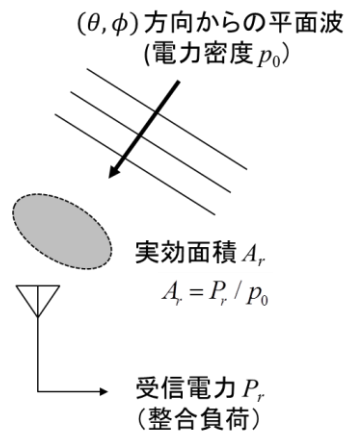


図9.5 アンテナの実効面積（受信）

9.2.4 アンテナ利得と実効面積の関係

(1) 第一段階：アンテナ利得と実効面積の比は一定

アンテナ利得と実効面積の関係を求める。これには、二つの段階を経て答えに至る。まずはその第一段階。

電波の伝搬を妨害する媒質が何もない真空中の空間（自由空間と呼ばれる）において、平面波とみなされる十分な距離 d にある2地点間での伝送を考える。送信電力を P_t 、送信アンテナの利得を G_t 、受信アンテナの実効面積を A_r とする（図9.6）。受信点において、送信アンテナから放射された電波の電力密度は $P_t G_t / (4\pi d^2)$ であるので、実効面積 A_r の受信アンテナで受信すると、受信電力 P_r は次式になる。

$$P_r = \frac{P_t G_t}{4\pi d^2} A_r \quad (9.20)$$

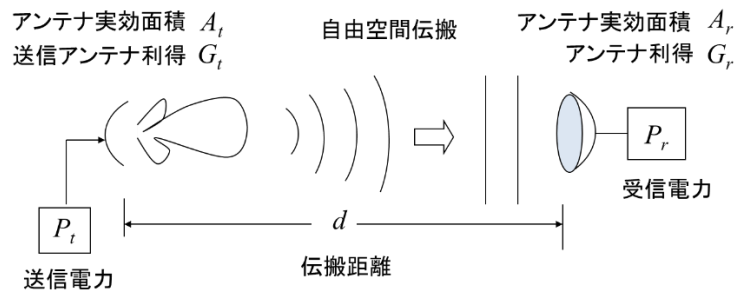


図 9.6 無線通信の基本伝送系

図9.6では、左側を送信局としているが、符号を付け直し、左側のアンテナ特性を G_1 （送信）、 A_1 （受信）、右側を G_2 （送信）、 A_2 （受信）とする。左側を送信局として電力 P_t を送ったときの右側の局の受信電力を P_{r1} 、逆方向で、右側を送信局として電力 P_t を送ったときの左側の局の受信電力を P_{r2} とすると、電気回路の相反定理より $P_{r1} = P_{r2}$ である。それゆえ、

$$\frac{P_t G_1 A_2}{4\pi d^2} = \frac{P_t G_2 A_1}{4\pi d^2} \rightarrow \frac{G_1}{A_1} = \frac{G_2}{A_2} \quad (9.21)$$

となる。この関係は、任意のアンテナについて、すなわち、アンテナがどのようなタイプであろうがそのことには関係なく成り立ち、アンテナ利得と実効面積の比は一定であるというを示している（注1）。では、この比の値は何であろうか。次の第二段階ではこれを求める。

注1 この性質の別解： 9.2.2項の図9.4の③と④で A_1 と A_0 の実効面積の比を実効面積の定義に従って求めると、受信利得の比と同じになる。そこから、アンテナ利得と実効面積の比は一定、という性質が求められる。

（2）第二段階：アンテナ利得と実効面積の比の値

第一段階で、どんなアンテナでもアンテナ利得 G と実効面積 A の比は一定であることが分かった。以下その比を求めたいが、結論からすると、

$$A = \frac{\lambda^2}{4\pi} G \quad (9.22)$$

の関係が導かれる。ただし、これを導くのは一筋縄では行かない。一つ言えることは、どんなアンテナでも G/A =一定の関係が成立することが第一段階において証明されているのだから、第二段階では、何か解析出来るアンテナを一つ選んで答えが得られれば、それで良いということになる。さらに言えば、その選んだアンテナの何か一つの方角だけ（通常は最大利得の方角を考えるが、それに限らない）でよいのである。では、どのアンテナを選ぶか、その正攻法は、理論的な解析ができる微小ダイポールアンテナ（9.1.2項で放射特性を述べている）である。以下、微小ダ

イポールアンテナによる導出の概要を述べる。

長さ l の微小ダイポールアンテナ（以下、微小ダイポールと呼ぶ）を角度 θ （ダイポール方向を $\theta=0$ ）方向から到来する平面波（電界の強さ E_r ）内に置き、その受信電力からアンテナ利得や実効面積を以下の手順で求める。

- ① 微小ダイポール（長さ l ）の端子電圧 V_0

$$V_0 = E_r l \sin \theta$$

- ② 微小ダイポールのアンテナ利得 G

アンテナパターンは①より $\sin \theta$ である。(9.13)式に $E \rightarrow \sin \theta$ として、アンテナ利得を求める（効率 $\eta=1$ ($G=D$)として）

$$G = \frac{3}{2} \sin^2 \theta$$

- ③ 微小ダイポールの放射抵抗 R

式(9.12)より

$$R = \frac{2\pi}{3} Z_0 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad \left(Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \right)$$

- ④ 最大受信電力 P_r は、整合負荷条件より

$$P_r = \frac{|V_0|^2}{4R} = \frac{3|E_r|^2 \lambda^2 \sin^2 \theta}{8\pi Z_0} = \frac{|E_r|^2 \lambda^2}{4\pi Z_0} G$$

- ⑤ 到来波の電力密度 p_0

$$p_0 = \frac{|E_r|^2}{Z_0}$$

- ⑥ 実効面積 A と利得 G の関係

$$A = \frac{P_r}{p_0} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G$$

この方法の優れた点は、全方向（ θ の全範囲）に対して(9.22)式が示されているということである。（ただし、上述のとおり、それは必要条件ではない。）

そのほかの方法として、波長サイズに比べて十分大きい開口面アンテナを用いる方法が [2]により紹介されている。半径が波長に比べて十分大きい円形開口面（面積 S ）を定めて放射源を置き、その放射パターンからアンテナ利得 G を求め、 $S=A$ として A と G の関係を定める方法で、面積

Aが既知であることを利用する。微小ダイポールアンテナの方法に比べて、電磁界解析部分が少なく簡易であることが特長になる。この方法に類似したものとして、無限金属平板に空けられた一定面積の開口からの放射を電磁界理論で厳密に解き、開口面積と利得の関係を求める方法もある（文献[3]（IV章3.4.1(3)）より）。

上記によってアンテナ利得と実効面積の関係は導かれたが、どれも導出に手間隙かかり、もっと直感的に導く方法はないのだろうかと思う。無指向性アンテナ ($G=1$) の実効面積は $\lambda^2/4\pi$ であり、これは周の長さ1波長の円の面積である。こんな美しい関係を、すっきりした方法（＝直感的な方法）で説明できないのであろうかと思うが、簡単にはできそうもない。特性が単純である無指向性アンテナで考えることの難しさは、そのアンテナが空想上のアンテナであって、具体的な形がないということにあるからかもしれない。我こそはと思う人はチャレンジしてほしい。

無指向性アンテナの受信イメージは、半径 $\lambda/2\pi$ （電波の波数 $k=2\pi/\lambda$ を用いると半径 $1/k$ ）の球があり、この表面に入射する平面波のエネルギーを全部吸い取る黒体受信球（図9.7：ブラックホール）である。

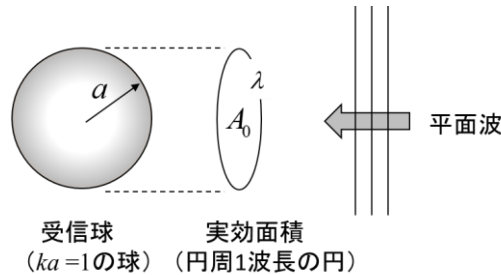


図9.7 無指向性アンテナ（全方向 $G=1$ ）の受信球

9.3 フリスの伝達公式

アンテナ実効面積とアンテナ利得の関係は (9.22)式であるので、これを送受信電力の関係を与える(9.20)式に代入すると、次式で整理される。この式をフリス(Fris)の伝達公式という。

$$P_r = \frac{1}{L_p} G_r G_t P_t \quad L_p = \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2 \quad (9.23)$$

ここで、 L_p は自由空間伝搬損と呼ばれる。

準備を長々としたので、求めたかった公式の導出はこれで終わりである。フリスの伝達公式は、無線伝送における回線設計の基本式である。この公式からわかるように、異なる周波数において、同じ距離、同じ送信電力、同じ利得のアンテナである場合には、周波数の二乗に反比例して、高い周波数ほど受信電力が弱くなることがわかる。学校の授業では、「ミリ波のような高い周波数は自由空間伝搬損が大きいので、電波は遠くまで飛ばないですよ」と説明を受けて、フリスの伝達公式の説明は終わる。

フリスは、原著論文[4]の中で冒頭に次式の形を示し、その導出を行っている。

$$P_r / P_t = A_r A_t / (d\lambda)^2 \quad (9.24)$$

ここで、 A_t は送信アンテナの実効面積である。式(9.22)により送信アンテナ利得 G_t を実効アンテナ面積 A_t に変換して式(9.23)に代入すれば、式(9.23)と(9.24)が、同じことの別表現であることが分かる。式(9.24)では、4つの基本パラメータ (A_p , A_r , d , λ) が数値係数を含まず結ばれていて、美しい形になっている（フリス自身もそれを強調している）。

式(9.24)からは式(9.23)とは別の景色が見えてくる。式(9.24)では、アンテナ実効面積 A_p , A_r が周波数によらないなら、受信強度は周波数が高いほど強くなると言っている。式(9.23)で述べた結論と一見矛盾するように感じられる。これは、式(9.22)からも分かるように、アンテナの特性である利得と実効面積の関係そのものが周波数を介して結ばれており、両方の特性が周波数に依存しないアンテナは存在しないからである。これは、図9.8(a)に示すダイポールアンテナ対向での回線（利得一定）と(b)のパラボラアンテナ対向の回線（面積一定）の違いであり、例えば、同図(c)のように、一方をパラボラアンテナ、一方をダイポールアンテナで対向させれば、この回線では周波数特性はなくなっている。

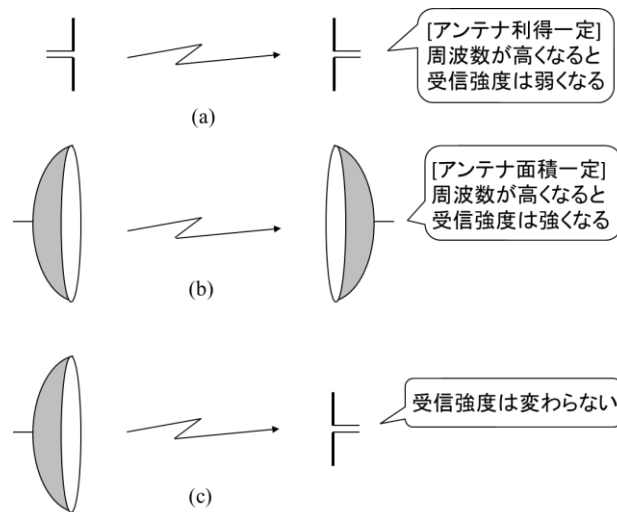


図9.8 使うアンテナのタイプによって、通信路の周波数特性が違って見えてくる

自由空間の伝搬損 L_p は(9.23)式で定義される。周波数と関係なさそうな自由空間の伝搬に周波数特性が入ることに違和感を持たないだろうか。これは、アンテナ特性から利得を引き出して式を作った(9.23)式の表現に起因する。周波数に対して利得が同じアンテナは、周波数の増加と共にサイズが小さくなる。すなわち電波を受信する面積が小さくなるわけで、その分が自由空間伝搬損に組み入れられ、アンテナの都合を伝搬特性に押し付けているとも解釈できる。

フリスの伝達公式を無条件に適用すると、距離 d が小さくなると $P_r/P_t > 1$ となって、不合理が生じる。ゆえに、フリスの伝達公式には距離に対する適用条件がある。空間的な広がりを持った面からの放射であっても、十分遠方であれば、送信点から角度指向性を持った球面波が伝搬している（＝放射パターンが距離によって変化しない）ように見える。また、遠方に有る受信点には平面波がきているように見える。このような領域は、**フラウンホーファー領域**（遠方界）と呼ば

れる。フラウンホーファー領域は $d > 2S/\lambda$ (S は送信アンテナ面積)が目安とされている。フリスの伝達公式はこのフラウンホーファー領域に適用できる公式である。

一方、伝送距離がフラウンホーファー領域より短いところでは、開口面から出た平面波は、その面形状を保持したままビーム状に伝送される。この領域内に同じサイズの開口面アンテナを対向させて受信すれば、原理上の伝送損失はない（実際には、回折による漏れもあるので、ある程度の損失はあるが、ここでは大雑把な話として）。このような伝送ができる距離範囲は**フレネル領域**と呼ばれる。図9.9はこの説明図である。

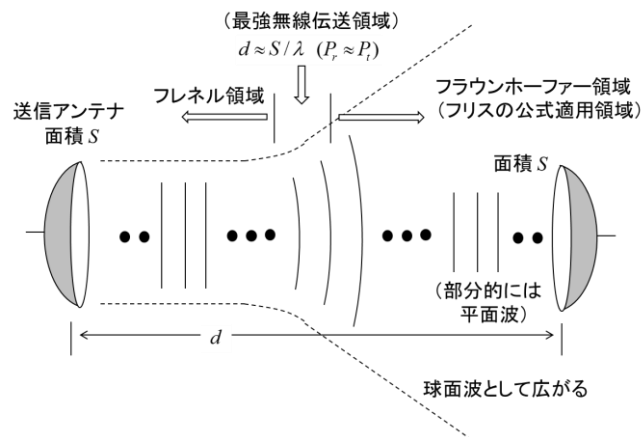


図9.9 対抗するアンテナ間の距離を離してゆくと

実効面積で表したフリスの伝達公式（(9.24)式）で、 $P_r/P_t=1$ 、 $A_t=A_r=S$ としてみると、 $d=S/\lambda$ を得る。係数2の違いは有るが、フラウンホーファー領域の境界付近という意味でオーダー的には合っている。フリスの伝達公式は、 $P_r/P_t \ll 1$ で使うべきであるが、距離を小さくしてきて1以上になったら、それより短い距離では $P_r/P_t \approx 1$ のフレネル領域であると理解してよい。このフラウンホーファー領域とフレネル領域の境界あたり（図9.9に最強無線伝送領域と示した付近）の利用は、大電力を宇宙から地球上に低損失に伝送したい宇宙太陽光発電システム（SPS）での電力伝送に適している。

参考文献

- [1] 虫明康人, アンテナ・電波伝搬, 電子通信学会編, コロナ社, 1961.
- [2] 中嶋信生, “微小アンテナ実効面積の分かり易い求め方,” 信学会 AP 研第2種研究会（楽しく学ぶ電波教室）, A.P85-S8, pp. 47-50, 1986.01.
- [3] 後藤尚久, 中川正雄, 伊藤清彦(編), アンテナ・無線ハンドブック, オーム社, 2006. (引用部分は、IV-3.4.1, pp. 347-348 (鈴木康夫))
- [4] H. T. Friis, “A note on a simple transmission formula,” Proc. IRE and Waves and Electronics, pp. 254-256, May, 1946.

第10章 パラドックスを楽しもう

不思議に焦点を当ててきた本書の締めくくりとして、電磁現象に見られるパラドックスを取り上げたい。物理学者ファインマンは、電磁気学の教科書[1]の中で、「物理のパラドックスは我々の理解の迷いにすぎない」と言い切っているように、本当はパラドックなんて無いのだから、ここで取り上げる話も、パラドックスに見えること、と言ったほうが正確なのかもしれない。でも、至らない理解の中で、その不思議に翻弄されることも楽しいことである。また、その格闘を通じて、より深い理解へと進んで行くことこそ、本来の学びであろう。

10.1 バランスが崩れる？

(1) 電線に働く力

アインシュタインは電気と磁気の力に関するある思考実験を行った。そのことは、「ファインマン物理学 III (§13-6, 7)」[1]で紹介されている。そこでは、電流が流れている電線と、電線の中の電子と同じ速度で、電線と平行して走る電子に対する力に関する思考実験である。この思考実験を筆者なりに整理して単純化したものとして、以下のような問題を考えてみたい（ファインマンの本の設定とは異なるが、言いたいことは同じである。）

図 10.1 のように、距離 r 離れた 2 本の無限直線上に、それぞれ、電荷密度 λ_0, λ で電荷が周密に並んでいて、かつこれが光速 c で z 方向に動いているとする。このとき、それぞれの線の電流 I_0, I は $c\lambda_0, c\lambda$ である。右側の電流に加わる長さ dl 当たりの力を調べる。ここに存在する力は、同一電荷同士が反発するクーロン力 dF_e と、同一方向の電流同士が引き合うアンペアの力（磁気力） dF_m の二つであり、以下となる。

$$dF_e = \frac{\lambda_0 \lambda dl}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$dF_m = \frac{\mu_0 I_0 I dl}{2\pi r} = \frac{\mu_0 c^2 \lambda_0 \lambda dl}{2\pi r} = \epsilon_0 \mu_0 c^2 dF_e = dF_e$$

この設定では、反対方向の力がうまく打ち消しあって、合成力は 0 になる。

次に、観測者が速度 v で電荷の動く方向（この方向を x 方向とする）に動き、この観測者の視点で力関係を見てみる。クーロン力 dF_e' は動いても動かなくても変化無く

$$dF_e' = dF_e$$

であろう。

一方、電流に働く力 dF_m' は、単位時間に通過する電荷の数が $(c-v)/c$ の比率で少なくなるので、

$$dF_m' = \frac{\mu_0 I_0' I' dl}{2\pi r} = \frac{\mu_0 (c-v)^2 \lambda_0 \lambda dl}{2\pi r} = \epsilon_0 \mu_0 (c-v)^2 dF_e' \leq dF_e'$$

となり、速度 v の増加と共に、だんだん弱くなる。光の速度($v=c$)で進んだ場合には、磁気力は消えてしまう。

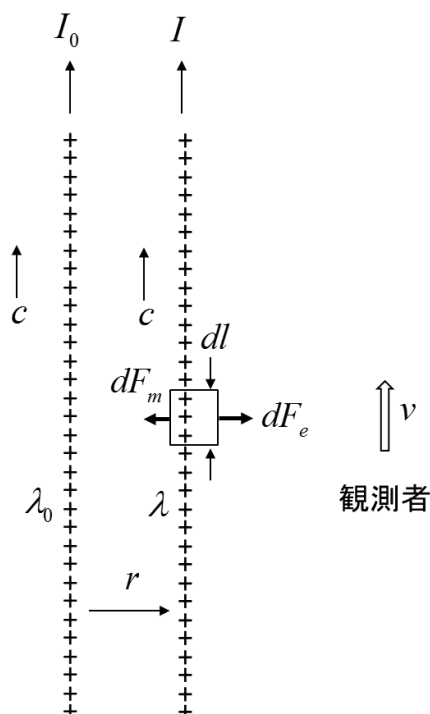


図 10.1 思考実験の図（電流が流れる方向を x 軸）

静止している観測者 ($v=0$) の目には力のバランスが取れていたのに、動いている観測者にはバランスが崩れて見えるのは、物理として明らかに不合理である。なぜなら、観測者は物理現象を見ているだけであって、なんら働きかけをしているわけではないからである。本来、全ての慣性系（等速移動する観測系）において、物理現象は同等ではないのであろうか？この思考実験はどこがおかしいのであろうか？あるいは、電磁気学そのものに問題点が潜んでいるのであろうか？以下、このパラドックスを考える。

静止している系で起きる現象を、動いている系で見ることによって起きるパラドックス的なことの解決には、第6章を学んだ相対論的視点が必要なことに気付くであろう。観測者がいる移動系でみた静止系における図 10.1 の現象を、ローレンツ変換後の座標で改めてみてみよう。この場合は、電流や電荷密度のローレンツ変換なので、使う式は(6.6)式である。左側線上の電荷密度は、観測者が見ると

$$\lambda'_0 = \gamma \lambda_0 - \gamma \frac{v}{c^2} I_0 = \gamma \lambda_0 \left(1 - \frac{v}{c} \right)$$

となる。右側線上の電荷密度も同様に変換され、長さ dl' に働くクーロン力 dF'_e は以下で算定さ

れる。

$$dF'_e = \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 \lambda_0 \lambda dl'}{2\pi\epsilon_0 r'}$$

さらに、観測者が見る電流 I'_0 も、速度は c で変わらず、式(6.6)より、

$$I'_0 = \gamma I_0 - \gamma v \lambda_0 = \gamma (c - v) \lambda_0$$

となる。電流 I' の長さ dl' 当たりの力 dF'_m は

$$dF'_m = \frac{\mu_0 I'_0 I' dl'}{2\pi r'} = \frac{\mu_0 (c - v)^2 \lambda_0 \lambda dl'}{2\pi r'} = dF'_e$$

となる。これより、二つの力は観測者の速度の如何に関わらずバランスが取れていて、先のパラドックスが解消されたわけである。

以下、図 10.1 の思考実験について二つのことを補足したい。一つは、この例のように、電流間に働く力にクーロン力も加わってしまえば、純粋な磁気力 dF_m が測定できず、アンペアの実験は大丈夫だったのだろうかと言う点である。これは、上記思考実験での電流と実際に金属導線に流れる電流の違いからきている。導線はそれを構成する原子で満たされていて、電流はそこから飛び出した自由電子が運んでいる。自由電子が飛び出した原子はプラス電荷の働きを持ち、かつ、移動はしない。このため、電流は流れるが電氣的には中性で、クーロン力は働かない。故に、アンペアの測定に問題は無い。なお、冒頭に述べたファインマンの本では、アインシュタインの思考実験として、この例（プラスイオンの中を流れる電流に対して、平行に動く電子に働く力）での説明を行っている。

もう一点は電流の速さである。導線を流れる電流の速度（＝電気の伝わる速さ）も光の速度としてよいことは第8章で学んでいる。故に、本思考実験では電荷の移動速度を光速とする電流を仮定した。しかし、電荷を運ぶ電子そのものの移動速度は、カタツムリの歩み程度であるらしいから、個々の電子が光の速度で動いているわけではない。運ばれる電荷の動きが等価的な意味で、光の速度になっていると理解してほしい（式(8.15)）。

(2) 電流ループ内の電荷に働く力

図 10.2 に示すように、静止系（K 系）と、これを左から右に一定速度 v で動く移動系（K'）がある。K 系も K' 系も共に慣性系と呼ばれる。図 10.3(a) のように、K 系において、x-y 面上に原点を中心とする半径 a の円があり、図の向きに電流 I が流れている。円の中心に電荷 q （正電荷を仮定）が置かれている（注1）。この状態を K 系で見れば、電荷の位置に磁界 $\mathbf{B}$ （向きは z 軸方向）はあるが、電荷に対する力は何も働いていない。すなわち、この状態は変化することなく安定である。なお、 $\mathbf{B}$ の正確な呼び名は磁束密度であるが、ここではでは磁界と呼んでいる。

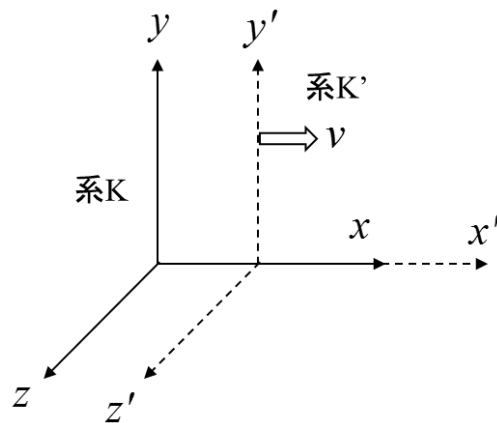


図 10.2 慣性系の座標

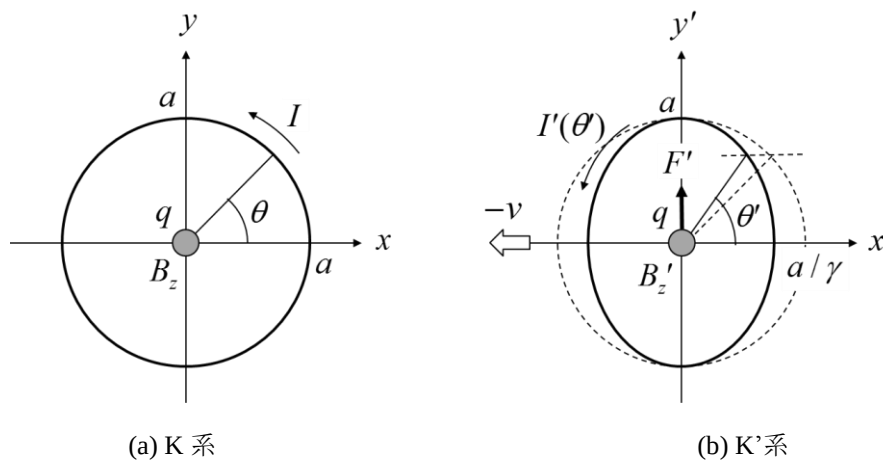


図 10.3 ループ電流の中心に置かれた電荷は力を受けるか？

【注1】これは、何かの本から取り上げたというものではないが、この種の思考実験は、多くの先人たちが様々に繰り広げており、どこかに同じものがあると思うので、例題のオリジナリティを主張するものではない。いろいろの物理法則を含んでいて、単に面白いと思うからである。

一方、これを同図(b)の移動系 (K' 系) で見るとどうであろうか？ (相対論的効果で、円が楕円に見えるが、今はそれを気にしないで良い)。ループ電流と共に、電荷も左側に速度 v で動いているのであるから、この電荷は磁界によって図の y 軸方向にローレンツ力 qvB_z を受ける。他に電界の存在は見え、電荷は y 軸方向に動いてしまうことになる。

(1)の例と同じように、同じ現象を止まって見るか動いて見るかで、力のバランス関係が違って見える。単なる見方の違いによって、力のバランスが変わってしまうことはありえず、これがパラドックスである。これもローレンツ変換によってパラドックスをほぐすことができるが、それは読者にお任せしたい。この問題は[2]で取り上げて解説しているので、気になる読者はそれを参考にしてほしい。

電磁気学では、電界と磁界が織り成す動作の不思議ゆえに、相対論的視点からの様々な思考実験が行われ、見方によって異なる結果をもたらすパラドックスが数多く生み出されている。そのようなパラドックスは、電磁気学と相対論の関係理解を深める意味において格好の教材になる。先人たちが編み出した大部分のパラドックスは、以下のようにほぼ共有な展開を見る。

【発生】 静止した系で一つの現象を見るのと、一定速度で動く系で見るのでは、力（電気力・磁気力）のバランスが異なってきて、二つの系（慣性系と呼ばれる）の間に動作上の矛盾が起きる

【原因】 磁界は電流によって生起し、動く電荷に対する力（ローレンツ力）を生み出すが、電流や電荷が動く速度は、慣性系に対して相対的なものであり、系によって力関係が変わる

【解消】 特殊相対性理論の考え方、すなわち、物理諸量がある慣性系間のローレンツ変換によって、力のバランスに関して辻褄が合い、パラドックスが解消される。その本質は、「動く電気力線は磁界を作る・動く磁力線は電界を作る」という仕組みにある[3]。

10.2 静電界にも $\nabla \times \mathbf{E}$ が？

【起】

先生：電磁気学のおさらいをします。静電界に渦はできますか？

学生：静電界は保存場（*）ですから、渦はできません。

（*：線積分が経路によらず、始点と終点の電位の差で決まる性質を持つ場）

先生：数式で表すとどうなりますか？

学生：3次元上の任意の周回経路に対して $\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ です。ストークスの定理

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \text{ より、至るところで } \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ です。}$$

先生：では、コンデンサの中の電界を考えてみよう。図 10.4 の実線で示す平行平板コンデンサ中の電界 $\mathbf{E}_0$ はどうなりますか？

学生： $\mathbf{E}_0 = -(V/d)\mathbf{k}$ ですので、大きさは V/d 、向きは z 方向下向きで、電極間は均一です。当然、 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ です。

先生：そうですね。次に、電極の一方を図の点線のようにほんの僅かに傾けてみましょう。この場合、電界 $\mathbf{E}$ はどうなりますか？

学生：電界は、 x の関数になり、ずれが十分小さい場合は、以下で近似できます。

$$\mathbf{E}(x) \approx \frac{V}{d + \Delta z(x)} \mathbf{k} \approx \mathbf{E}_0 - E' x \mathbf{k} \quad E' \text{ はコンデンサのパラメータやずれの量に依存する}$$

微小値ですが、コンデンサ内で定数として扱えます。

先生：電界の回転はどうなりますか？

学生：
$$\nabla \times \mathbf{E}(x) \approx \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_0 - E'(x) \end{vmatrix} = E' \mathbf{j}$$
 となるので、僅かながら（ E' の値は小さいだ

ろうけれど）回転があります。回転軸の向きは y 軸方向です。

先生：静電界でも回転がある場が存在するということですか？でも、保存場だから、電界の回転（渦巻き）はなかったのではないのですか？

学生：そのはずなんです、でも、この場合は確かに・・・？？

先生：マクスウェルの方程式では何と書いていますか？

学生： $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ （電磁誘導の法則）です。静電磁界では $\partial \mathbf{B} / \partial t = \mathbf{0}$ なので、 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ となっています。

先生：と言うことは・・・。

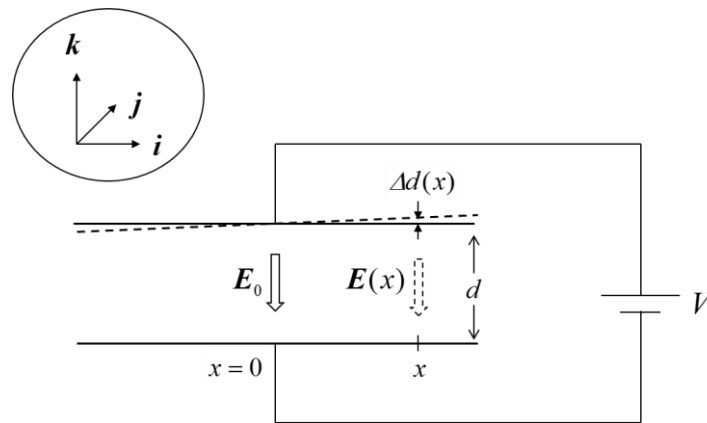


図 10.4 平板コンデンサの中の電界（紙面の上方向を z 軸方向）

【承】

学生：これ、パラドックスですね。すっきりさせたいです。

先生：ストレスがある場について考えてみよう。何か思いつきますか？

学生：大地震の原因になる二つのプレートの境界面があります。

先生：その境界面に指を入れたらどう感じますか？

学生：捻られる感じを受けるだろうと思います。

先生：そうです。そういうストレスを感じる場所に回転（渦巻きの力）があるのです。

学生：以前に読んだ本[4]で、流れの中に水車を入れて回り始めたら、そこに回転がある、とありましたが、それと同じですね。先生は、それをストレスと言っているのですね。

先生：そうです。ストレスがある場を絵に描くとどんな感じですか？

学生：図 10.5 とかです。

先生：その例で、場を $\mathbf{F} = ax\mathbf{k}$ とすると、回転はどうなりますか？

学生：
$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & ax \end{vmatrix} = -a\mathbf{j}$$
 となります。

先生：電磁気学で例を挙げると何がありますか？

学生：5.1 節の図 5.1 で学んだように、直線状の電流に対して、それと平行にベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ ができます。次式です。

$$A_z(r) = A_z(a) - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a}$$

中心からの距離 r が大きくなるに従い弱くなるので、 z 方向に対してストレスが生じています。

先生：この問題は円筒座標で考えるとよいですね。回転を計算してください。

学生：
$$\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$
 となります。

先生： $\nabla \times \mathbf{A}$ に対応する物理量は何ですか？

学生：ベクトルポテンシャルは、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ の定義から生まれており、 $\mathbf{B}$ は磁界（正確には磁束密度）です。これで、磁界が電流の周りに渦巻きを作ることがイメージできました。

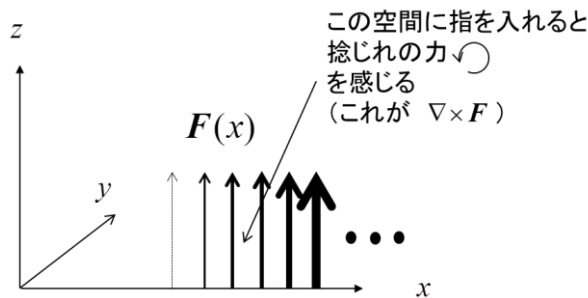


図 10.5 ストレスのあるベクトル場（右に行くほど強さが大きくなっている）

【転】

先生：次に、その磁界 $\mathbf{B}$ の性質を調べてみましょう。磁界の強さはどうなっていますか？

学生： $B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ですので、距離 r の増加と共に弱くなります。その傾向はベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ と同じです。

先生：では、ここにも回転がありますか？円筒座標で求めてください。

学生： $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$ 。あれっ、渦巻きになっているのに回転無しと出ました。

先生：ベクトルポテンシャルも磁界も距離が大きくなるほど弱くなるという性質は同じなのに、一方に回転があり、もう一方に回転はないというのはどうしてだろう。

学生：磁界（と同じベクトルを持つ流れ）の中に指を突っ込んでも、 ϕ 方向に押されるだけで、捻られる力は働きません。それだからだと思います。電流のところに中心をもつ円盤が一体として回転するイメージで、確かに、場にストレスは発生していません。

先生：アンペアの周回積分の法則を図 5.1 の磁界に適用するとどうなりますか？

学生： $\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \begin{cases} \mu_0 I & (\text{経路 } c \text{ が作る面内に差交電流有り}) \\ 0 & (\text{同無し}) \end{cases}$ です。微分形では

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 I \delta(r) \hat{\mathbf{z}}$ となります。なので、電流があるところ（式でデルタ関数が値をもつ $r=0$ ）以外は、至るところ $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ と言うことがわかりました。

先生：多くの学生は、電流の周りに渦状の磁界 $\mathbf{B}$ が生まれ、だから、 $\nabla \times \mathbf{B}$ には値がある（ $=0$ 以外の値を持つ）と思っているようですがそれは間違いです。アンペアの法則を支えるストークスの定理の教え方（意味づけ）が良くないのだと思います（4章 4.3.1 項参照）。

【結】

学生：でも、最初のパラドックスのもやもやはまだ晴れません。【承】のような考え方をして、同じような結論になりました。そしてそれはおかしいと。

先生：実はあの問題は、【転】と同じだったのです。だから、 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ となるべきだったのです。

学生：電界の近似が良くなかったのですね。そうか、電界の向きを電気力線で描くと、 z 方向に直線ではなく、バームクーヘンのように円弧状（円の中心は二つの平板が交差する位置）になっていた、ということですね。金属面から出てゆく電気力線は面に直角な方向になるのだから。

10.3 電波の重さ

この話はパラドックスではない。本当かなあと、眉に唾を付けて聞きたくなる話である。

相対性理論は、質量 m の物質には mc^2 のエネルギーがあることを教えてくれる。質量は移動速度 v の関数で、式(6.3)に示したローレンツ因子 γ を用いて、次式で与えられる。

$$m(v) = \gamma(v) m_0$$

ここで、 m_0 は物体が静止しているときの質量（静止質量と呼ばれる）である。速度が大きくなるほど重くなり $v=c$ で無限大になる。速度 v の物体の相対論的運動エネルギー ΔU は

$$\Delta U(v) = (m(v) - m_0) c^2$$

与えられ、運動エネルギーは質量の増加分に比例する。 $v \ll c$ のときは、

$$\Delta U(v) \approx \frac{1}{2}mv^2 \quad (v \ll c)$$

となり、ニュートン力学でお馴染みの式になる。

これを踏まえて、電磁波のエネルギーの等価質量 m_{EM} を考えてみたい。

自由空間でのマクスウェルの方程式、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (10.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (10.1b)$$

の、(10.1a)の両辺に $\mathbf{H} \cdot$ 、(10.1b)に $\mathbf{E} \cdot$ を作用させ、両式を引き算して整理すると、

$$-\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (10.2)$$

となる。さらに、 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ として、(10.1)を $\mathbf{E}$ と $\mathbf{H}$ のみで表すと次式の形で表される。

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (10.3)$$

両辺とも、基本単位[MKSA]で表す組立単位（組立単位の読み方は付録1の表参照）は[-1,1,-3,0]となり、単位体積当たりの電力（=電力密度）を表している。右辺の $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は、ポインティングベクトルと呼ばれ、単位面積当たりの電磁波が単位時間に持ち出すエネルギー[0,1,-3,0]を、左辺の $\epsilon_0 E^2/2$ と $\mu_0 H^2/2$ は単位体積当たりの電気エネルギーと磁気エネルギーで単位は[-1,1,-2,0]である。自由空間を伝搬する電磁波は $\epsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2$ となるので、単位体積当たりの電磁エネルギー（エネルギー密度） u は以下になる。

$$u = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = \epsilon_0 E^2 \quad [\text{J/m}^3] (= [-1,1,-2,0])$$

ところで、電磁波には質量はないことになっている。すなわち、

$$m_{EM,0} = 0$$

である。一方、単位体積当たりの質量を改めて m とすると、どのような物質も $u = mc^2$ のエネルギー密度を持つ。質量は $m = u/c^2$ であり、 c は慣性系に拠らない絶対定数なので、エネルギーがあるところには必ず質量があるということになる。光速で伝搬する質量0の電磁波といえども、エネルギーがあるのだから、静止質量が無いとはいえ、伝搬しているときは（等価的な意味での）質量があると推論できる。その質量は、

$$m_{EM} = \varepsilon_0 E^2 / c^2 = \varepsilon_0^2 \mu_0 E^2 = \mu_0 D^2 (= \varepsilon_0 B^2)$$

と算定される。 $\mu_0 D^2$ の組立単位は $[1,1,-2,-2]+2[-2,0,1,1]=[-3,1,0,0]=[\text{kg}/\text{m}^3]$ であり、次元は合っている。ではなぜ、質量 0 と言われる電波が実効的な質量をもてるのであろうか？それは

$$m_{EM} = \gamma(c) m_{EM,0} = \infty \times 0 = \mu_0 D^2$$

であったのだと言っても否定することは難しい。ちなみに、 $E=1 [\text{V}/\text{m}]$ では、 1m^3 当たりの実効質量は、およそ 10^{-28}kg (=非常に小さい値) と算定される。質量あるのが、重力空間を動いていけば、ニュートン力学により、経路は重力によって曲がる、故に、電波の経路も重力によって曲がると推測できる。

一方、一般相対性理論によって、光が重力によって曲がることが知られているが、これは、重力による空間のゆがみによると説明されている。実際、1919 年、皆既日食の際に、太陽近くに見える天体位置のずれの角度を正確に測定し、アインシュタインの予測が正しいことが実証されている。曲がる角度は光を質量がある光子としてニュートン力学で求めたものと、空間の曲りとして一般相対性理論で求めたものでおよそ倍の違いになるらしい。

ニュートン力学であれ、相対性理論であれ、光が重力によって曲がることは確かのようにであり、同じ電磁波の仲間として電波も同様に曲がるだろうと推量するのは許されるであろう。ただし、その曲りの角度はあまりにも微小 (太陽の重力場でも 1 秒角 (1 度の 3600 分の 1) のオーダー) であり、地上の、あるいは宇宙との無線通信回線への心配は無用である。

10.4 帯電した棒磁石の周りに起きること

著者が研究者としてまだ駆け出しのころの 1984 年、電子通信学会 (現：電子情報通信学会) の会誌 6 月号に「電磁波工学におけるパラドックス～その思い違いを探る～」と題する解説記事が安達三郎先生によりまとめられている (前年に行われた電気 4 学会連合大会のパネル討論会の要約として) [5]。その中では、6 つの項目が質問の形で提起され、それぞれについて解答が述べられている。本節では、その中のひとつ「静電界の中の磁石はポインティング電力を発生するか」に着目する。これに対する解答は、「この問題に解答を与えるのは簡単ではないように思う」で始まり、三つの考え方 (発生する・しない両面からの) がまとめられている。(問題提起は後藤尚久先生、解答担当は徳丸仁先生)

問題は以下である。

【問題 (要約)】図 10.6 に示すように同軸線路に直流電圧 V 、電流 I を印加すると、内部空間中のポインティングベクトル $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ の断面積での積分は伝送電力である VI に等しくなり、静電磁界中でも、ポインティングベクトルが電力の流れを示している。それでは、図 10.7 に示すように正電荷を帯びた棒磁石が有るとすると、電荷による静電界と磁石による静磁界によって作られるポインティングベクトルが図に示すようになり、磁石の周りをエネルギーが循環することになる。本当か？

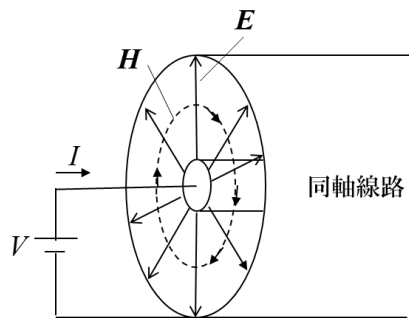


図 10.6 同軸線路による直流送電

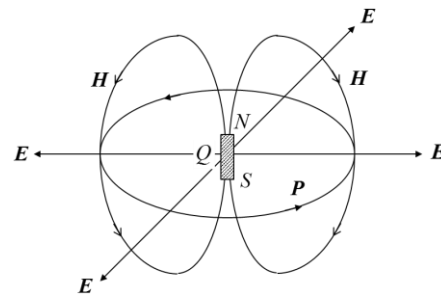


図 10.7 静電界と磁石によるポインティング電力の還流

(1) 問題点の整理

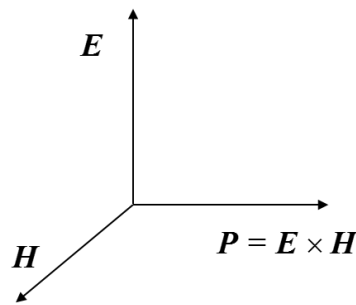
端的に言うと、静電磁界において図 10.8 のように電界と磁界が直交するとき、ベクトル $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ はエネルギーの流れを生むかである。 $(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ はポインティングベクトル (Poynting vector) と呼ばれ記号 $\mathbf{P}$ が使われるが、エネルギーに移動が無いものについてまでポインティングベクトルと呼ばれるかどうかは微妙)。ここで、考えられる答えは、組み合わせ的に考えて

- ① エネルギーの流れを生む
- ② エネルギーの流れはできない
- ③ できる場合とできない場合がある

②は図 10.6 のケースで存在が証明されているので×である。③の場合であれば、できる・できないの違いは、何の差でそうなるかが知りたいところになる。

著者が調べた電磁気学の専門書では、[6], [7]は③、[8]は①と読める書き方になっている ([8]では「今日でも、 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ (本では $(1/\mu_0) \mathbf{E} \times \mathbf{B}$) が必ずしもエネルギー流速密度を表さないと述べている教科書が多いが、それは誤りである。運動量密度 $\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ にそのような任意性はなく、相対論の要請であるプランクの関係式のため、エネルギー流速密度にも任意性はない」と記している)。こういう両論があり、[5]では「この問題に解答を与えるのは簡単ではないように思う」のまとめになっているのだと推察される。

動電磁界、すなわち、電磁波動では、ポインティングベクトルがエネルギー流速密度を表すことに議論の余地はないと思うので、ここでは、静電磁界に限定する。図 10.8 において、静電界がある方法でつくられ、静磁界は別の方法でつくられたとする。電磁場があるところエネルギーそのものは存在するが、それぞれにエネルギーの動きは無いとする。電磁界には重ね合わせの原理が通用するが、図 10.8 のような関係ができた時点で、それまでになかった作用としてのエネルギーの流れが起きるとするのは、重ね合わせの原理に合わないような感触を受ける。はたしてどうなのだろうか。

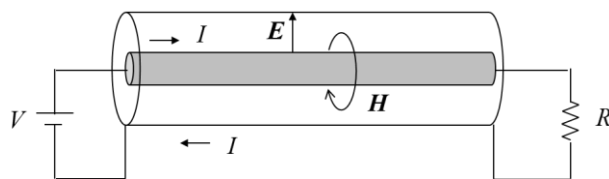
図 10.8 静電磁界中のポインティングベクトル $\mathbf{P}$ はエネルギーの流れを表しているか？

(2) 二つの例

図 10.9 は、図 10.6 の構成を直流の電気回路として完備な形にしたものである。これをケース 1 とする。左にある直流電源からエネルギーが供給され続け、右側の負荷抵抗 R で消費される回路である。電気回路的に見れば、毎秒 VI [J] のエネルギーが、すなわち VI [W=J/s] の電力が左から右に移動している。電流 I は V/R であり、 V と I は抵抗 R を介して一体なものである。このエネルギー移動を、同軸管（中心導線の半径 a 、円管の半径 b ）の空間部分を電界と磁界が運ぶと考え、軸の中心から径方向 r の電界 E_r と磁界 H_ϕ を求める。この解析は第 8 章で行っていて以下の結果を得ている（(8.14)式）。

$$P = \int_0^{2\pi} \int_a^b E_r H_\phi r dr d\phi = VI$$

単位時間あたりに管内の空間を通過するエネルギーは電気回路的電力 VI に等しくなる。故にこのケースは、ポインティングベクトルがエネルギーの流れを表していると言える。

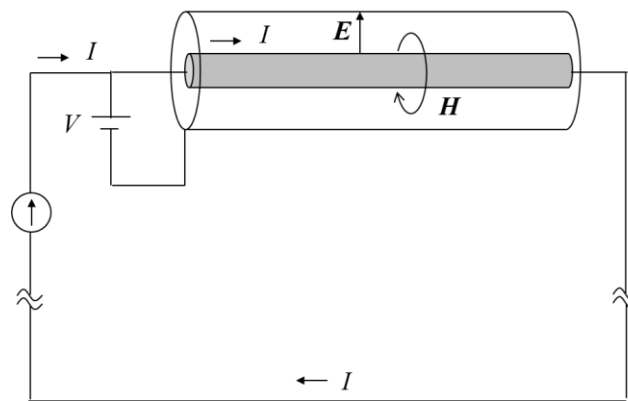
図 10.9 同軸線路を介した直流回路（ケース 1）（中心導線の半径 a 、外側円管の半径 b ）

次に図 10.10 を考える。これをケース 2 と呼ぶ。電圧と電流が独立になっているが、同軸管内の電磁界は同じである。違いは、円管の外にも磁界があるが、そこには電界はないので、その部分のポインティングベクトルは同様に $\mathbf{0}$ である。

この構成を電気回路的に見てみよう。電圧は掛けているだけで、負荷がなく電力消費はない。電流も流れているだけで負荷はなく同様に電力消費はない。図の構成は、電力消費のない二つの回路を重ね合わせただけなので、エネルギーの流れが生まれそうにない。すなわち、この構成でのポインティングベクトルは、エネルギーの流れを表していない、ということになる。冒頭の解答

案の中では③が正しそう、ということになる。

そうであれば、ポインティングベクトルは存在しても、それがエネルギーの流れを示すものとそうでないものの両方があり、問題で提示された図 10.7 の構成では、図 10.10 の構成と同分類に成り、エネルギーの循環は生まれないと結論してよさそうに思える。電磁波動で見出されたポインティングベクトルのエネルギーの流速密度を表すという性質を絶対視してはいけない、勝手に一人歩きさせると、おかしいところまで行ってしまいますよ、ということのようである。



(同軸線路内の磁界に影響を与えない程度に十分遠方)

図 10.10 電力消費のない直流回路 (ケース 2)

(3) 違いはどこにあるのか？

ケース 1 と 2 の違いは、

- 1) ケース 1 は一つの物理現象から電界・磁界が生まれているが、ケース 2 は、二つの物理現象の重ねあわせであって、電界と磁界の発生は独立である。
- 2) 電気回路として全体を見た場合、ケース 1 では、負荷抵抗によってエネルギー消費が行われていて、供給と消費の関係や同軸線路内のエネルギー移動が明確である。一方、ケース 2 ではエネルギー消費がなく、エネルギーの移動が見えない。

これで違いがわかったと言えるのであろうか？

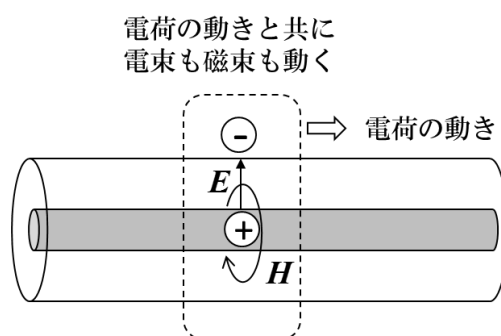
本書では物理現象は近接作用として解釈できることを強調してきた(第 7 章参照)。「現場で起きることは、現場の周囲にその原因がある」という思想である。今回のケースでは、その現場とは、同軸管の中、現場で起きることとは、エネルギーの流れが起きるかどうかが、現場の周囲にある原因は発生した電界と磁界の関係である。ところが、そこだけに限ってみれば、原因に違いが見えず(=同軸線路内の景色に違いが見えず)、異なる結果になっているということである。パラドックスの理解を目的として始めた議論が、別のパラドックスにたどり着いてしまった感がある。

(4) 一つの見方

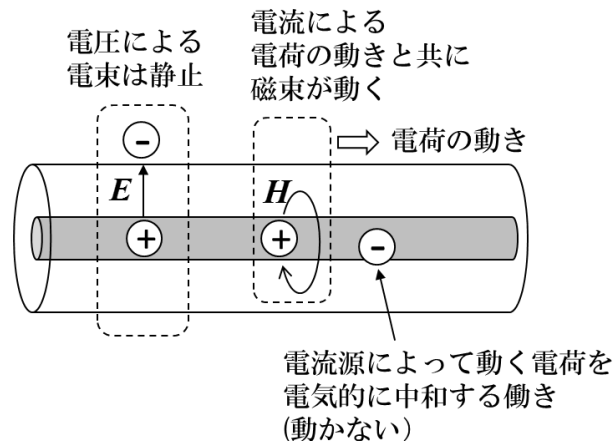
厳密な解析は、筆者にその力量がないので、直感的な考えに基づく仮説を述べる。

話を分かりやすくするために、管内の電磁界のみに着目する。もう一度、図 10.9 と図 10.10 の内部の動作を微視的に見てみよう。図 10.11 はケース 1、ケース 2 について、電荷の動きを示している。同図(a)のケース 1 では、正負の電荷が導線と円管で対になって右方向に動き、循環する電流を作っている。同図(b)のケース 2 では、電界を作るための正負の対の電荷が空間に静止している一方、電流を作る正電荷は右方向に動いている（注）（普通は、質量の重い物質の中にある正電荷は静止し負の値を持つ電子が反対方向に動くが、動きの向きをそろえるために正電荷を動かしている）。ケース 1 では、電界の元になる電束（電気力線）が電荷と共に右方向に動いていて、ケース 2 では静止している。同じ静電界でも、電束の動きに違いがある。磁界を作る導線上の電荷の動きはケース 1、2 と同じである。電荷一つ一つの動きが磁界の渦を作ると考えると、磁束（磁力線）自体も電荷の動きと共に動いているということになる（6.4 節参照）。静電磁界においては電界や磁界は空間に対して動くと言う言い方はしないが、その元になる電束や磁束は動いていた・止っていたりということになる。そこで、電束や磁束が動くものについては、電界が動く、磁界が動く、と言う言い方をする。そうすると、電界も磁界も動く場合（ケース 1）には、ポインティングベクトルがエネルギーの流れを表し、電界と磁界のどちらか一方あるいは両方が動かない場合は、エネルギーの流れがないということになる。ケース 2（磁界のみが動く）や図 10.7 のケース（両方動かない）がこれに当たる。図 10.7 のケースをケース 3 と呼び、3 つのケースについてまとめると、表 10.1 のように整理される。これによって、それぞれの違いが見え、冒頭のパラドックスに対する答えは出たように思うがどうであろうか。尚、巨視的には、ケース 1 もケース 2 も、動いた電荷の後には同じ強さの電荷が補われて、定常状態が保たれているので、 $\partial E_r / \partial t = \partial H_\phi / \partial t = 0$ であることには変わりはない。

このパラドックスに関して、答えは③であろうと言う仮説（推測）は述べたが、正しい答えが何であるか、すなわち、①であるか③であるかを著者は知らない。この理解の迷いは読者の探求に委ねたい。



(a) ケース 1（図 10.9 の回路）



(b) ケース 2 (図 10.10 の回路)

図 10.11 ケース 1、ケース 2 に対する電界・磁界を微視的に見た違い

表 10.1 静電磁界においてポインティングベクトルがエネルギーの流れを生むかどうかのまとめ

(○：有り、×：無し)

ケース	電束の動き	磁束の動き	エネルギーの流れ
1 (図4)	○	○	○
2 (図5)	×	○	×
3 (図2)	×	×	×

参考文献

- [1] R.P.ファインマン, R.B.レイトン, M.L.サンズ: (宮島龍興訳), ファインマン物理学 III 電磁気学, 岩波書店, 1969.
- [2] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ (8) : パラドックスを楽しもう” 技術レポートYK-030 (私報), 2019.
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-030_EM-8.pdf,
- [3] 江沢洋, 上條隆志 (編), 相対論と電磁場 (江沢洋選集 II), 日本評論社, 2019.
- [4] 長沼伸一郎, 物理数学の直観的方法, ブルーバックス, 2011.
- [5] 安達三郎, “電磁波工学におけるパラドックス: その思い違いを探る,” 信学誌, vol. 67, no. 6, pp. 657-662, 1984.
- [6] 砂川重信, 理論電磁気学 (第 3 版), 紀伊国屋書店, 1999.
- [7] 宇野亨, 白井宏, 電磁気学, コロナ社, 2010.
- [8] 太田浩一, 電磁気学の基礎 II, 東京大学出版会, 2012.