

ランダム行列と漸近固有値分布

～マッシブ MIMO 基礎理解のための～

唐沢 好男

1. はじめに

送受信にアレーアンテナを用いる MIMO (multiple-Input Multiple-Output) と呼ばれる無線技術が、高能率情報伝送を実現する手段として活躍している。さらに、アンテナ素子数が 100～1000 にも及ぶ大規模 MIMO にも注目が高まり、マッシブ MIMO と呼ばれている。この MIMO、そしてマッシブ MIMO の動作や性能を理解するためには通信路を表す行列表現の知識が不可欠になる。

無線通信路では、電波は不規則な反射や散乱を受けるので、MIMO チャネルを表現する伝送路行列はランダム行列に分類される。マッシブ MIMO の場合には、行列サイズが大きくなり、そこには、大きいことに起因する固有の性質が現れてくる。このようなランダム行列を扱う理論は数理科学（あるいは数理統計学）に基礎を置き、高度な数学で体系化されている。ゆえに、筆者のような無線工学分野の者には非常に敷居が高い学問分野になる。

そこで、本資料では、マッシブ MIMO 理解の基礎になるランダム行列を取り上げ、入り口部分の解説を行う。そして、その性質がマッシブ MIMO の基礎理解に役立つことを示す。筆者の非力さゆえに、ランダム行列征服のための山登り（富士登山）を始めようというわけではない。隣の山の見通しのよいところから、富士山の裾野を眺めているレベルになる。さらに理解を深めたい読者のために、最後の章で有用な専門書を紹介しているので、それを学んで山登りを始めてほしい。

2. 行列の基本的性質

2. 1 固有値と固有ベクトル

行と列の個数が同じ行列は正方行列と呼ばれる。正方行列 A に対して、以下の関係を満たす数値 λ は固有値、ベクトル e は固有ベクトルと呼ばれる。

$$Ae = \lambda e \quad (1)$$

N 行 N 列の正方行列においては、代数学の基本定理より N 個の固有値が存在する。ただし、同じ値であったり、複素数であったりすることも含めてである。 N 個の固有ベクトルはそれぞれの固有値に属する。

正方行列の要素が全て実数で、 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ (上付き文字 T は転置を表す) である行列を**実対称行列**と言う。また、複素数を要素とする正方行列において $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$ (上付き文字 H は複素共役転置を表す) となる行列を**エルミート行列**と言う。エルミート行列の主対角成分はそれ自身の複素共役と等しい条件から実数である。実対称行列およびエルミート行列の固有値は実数である。

実対称行列およびエルミート行列の固有値である N 個の実数値において、その統計値を扱う場合、値の大きい順 (あるいはその逆) に並べたものを**順序付き固有値**と言う (本稿では、順序付きの場合は大きい順 ($1, 2, \dots, N$) とする)。大小を区別せず、まとめて全体を表す場合は、それらを**順序無し固有値**という。

2. 2 固有値の確率分布

MIMO の通信路は一方のアレー (素子数 M 、素子番号 : $1, 2, \dots, m, \dots, M$) ともう一方のアレー (素子数 N 、素子番号 : $1, 2, \dots, n, \dots, N$) を結ぶ、以下の $N \times M$ の行列表現になる。

$$\mathbf{A} = \{a_{nm}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix} \quad (2)$$

行列の要素は振幅と位相よりなる複素数量で、電波伝搬環境によって不規則に現れる。このように、行列要素が不規則確率過程で定まる行列は**ランダム行列**になる。MIMO の伝送特性の評価では、このチャネル行列そのものではなく、以下の正方行列の固有値が重要な働きを示す (具体的な使われ方は本稿 4 節で)。

$$\mathbf{R}_r = \mathbf{A} \mathbf{A}^H \quad (3a)$$

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{A}^H \mathbf{A} \quad (3b)$$

\mathbf{R}_r は $N \times N$ の、 \mathbf{R}_t は $M \times M$ の正方行列であり、エルミート行列である。元の行列がランダム行列のとき、 $\mathbf{R}_r, \mathbf{R}_t$ の形で表される行列は**ウィシャート行列 (Wishart 行列)**と呼ばれる。行列のサイズの小さい方の次元を p 、すなわち、 $p = \min\{N, M\}$ とすると、二つの行列は共に同じ組み合わせの非負の実数固有値 : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ を持つ。サイズの大きい方の行列の次元を q 、すなわち、 $q = \max\{N, M\}$ とすると、残りの固有値 : $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_q$ は値が 0 になる。

ランダム行列では固有値は確率分布するが、ウィシャート行列での具体的な分布 (ウィシャート分布と呼ばれる) については、一般的な導出方法と共に 4×4 の大きさまで、その理論式を文献[1] (9.4.1 節) および[2] (7.1 節) にまとめているので、ここでは割愛する。

2. 3 漸近固有値分布

確率分布の理論で**中心極限定理**がある。分布が同じ多数の変数の和の分布（あるいは平均値の分布）は、元の変数の分布が何であれ、正規分布に収束すると言うものである（分散が定まらないような特殊な分布、例えばコーシー分布など、を除くなどの若干の条件はあるが）。ランダム行列にも同様に、その行列サイズが十分大きいところでは、その要素の確率分布に関係なく、固有値が一定の分布に近づくことが調べられている。このような分布は**漸近固有値分布**と呼ばれる。これについては次節で、典型的なケースについて紹介する。

3. ランダム行列の漸近固有値分布

ランダム行列の分野では有名な3つの基本法則：円則、ウイグナーの半円則、マルチェンコ・パスツール則があり、これを紹介する。紹介すると言う意味は、導出を説明しないと言うことである。これらの導出は、数理科学（あるいは数理統計学）の基礎知識を必要とし、無線技術者である筆者の力（数学力）が及ばないためである。興味ある読者のために、最後の節に、より深く進むための参考文献を挙げているので見てほしい。

3. 1 円則（ランダム正方形行列に対して）

正方形行列の要素がランダムである場合、固有値は複素数になる。この固有値の分布は、行列サイズ N を十分大きくしてゆくと、一つの形に集約してくる。例えば、標準正規分布（平均値 0、分散 1）する乱数で与えた場合、行列サイズ（=固有値の数）の平方根 \sqrt{N} で割った正規化固有値 $\hat{\lambda} (= \lambda / \sqrt{N})$ は複素平面で半径 1 の円に均等に分布する。この性質を**円則**と呼ぶ。図 1 は、 $N=10,000$ として、全部の固有値をプロットしたものである。

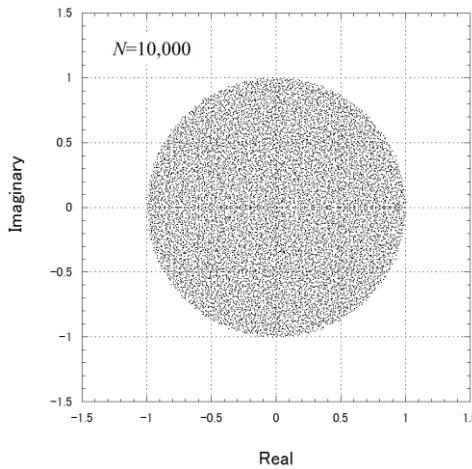


図 1 大規模ランダム行列の固有値分布 ($N=10,000$ 、各要素は標準正規分布)

2. 3節で中心極限定理の例を出したように、この場合も、元の分布の形に依存しない。実数の一様分布でも、二次元の複素ガウス分布 ($x+jy$ の x, y が独立な正規分布) でも、平均値 0、分散 1 であれば、半径 1 の円則が成り立っている。各自試してみるとよい。

この解析には、数学の道具立てが必要になり、長い歴史がある。大変面白い性質だが、無線通信の固有値解析で、この「円則」が出てくる場面を筆者は知らない。

3. 2 ウィグナーの半円則（ランダム実対称行列に対して）

実対称行列の固有値は実数である。行列の要素を標準正規分布とし、 $N=10, 100, 1000, 10000$ の場合の固有値のヒストグラムを図 2 に示す。

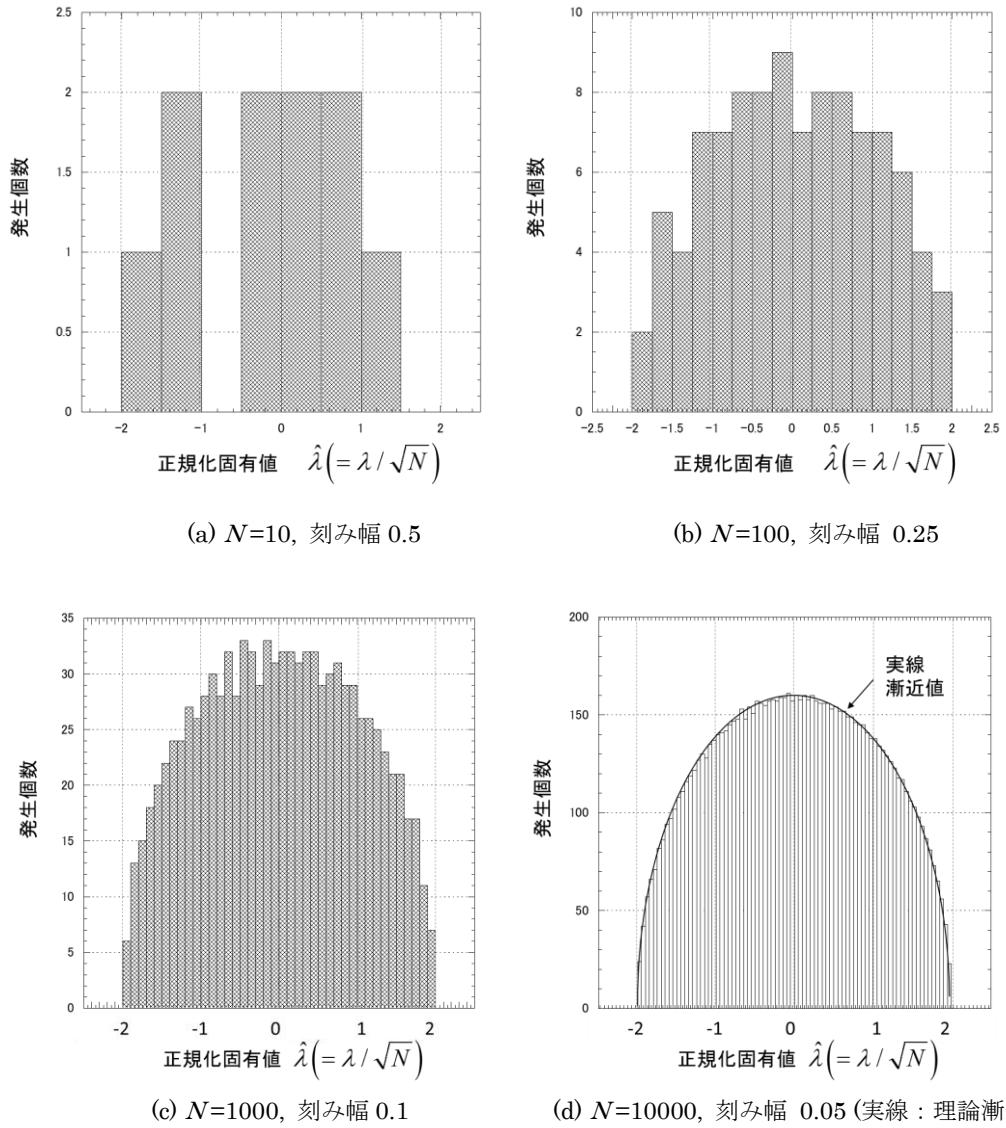


図 2 実対称行列の固有値分布

図からわかるように、 N を大きくしてゆくと固有値の分布は次式に収束してくる。

$$f(\hat{\lambda}) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4-\hat{\lambda}^2}}{2\pi} & (|\hat{\lambda}| \leq 2) \\ 0 & (|\hat{\lambda}| > 2) \end{cases} \quad (4)$$

この計算値を $N=10000$ のヒストグラム（図 2(d)）に重ねている（(4)式で $f(0)=1/\pi$ であるが、ヒストグラムの縦軸スケールに合わせると $1/\pi \times 10000 \times 0.05 = 159.2$ になる）。式(4)の右辺の $\sqrt{4-\hat{\lambda}^2}$ が半円の形であり **ウィグナーの半円則** と呼ばれる。この導出は文献[3]の第 1 章で丁寧に示されているが、数学的手順を踏んで進めてゆく形になるため、フォローするのは結構手ごわい。

これも、行列要素の元の分布の形は問わず、平均値 0、分散 1 の実対称行列であればよい。他の分布（例えば一様分布）で試してみると良い。「円則」の場合と同様、この「**ウィグナーの半円則**」も、無線通信の固有値解析で出てくる場面を筆者は知らない。

3. 3 マルチェンコ・パスツール則（ウィシャート行列に対して）

2. 2 節の(3)式により、ウィシャート行列を示した。元になる $N \times M$ のランダム行列 \mathbf{A} の要素は、実数の正規分布であっても、複素数の 2 次元正規分布であっても、要素間が無相関の同一分布 (i.i.d.) であればよい。

行列 \mathbf{A} の M と N の比を β とし、 $N \rightarrow \infty$ でのウィシャート行列の順序無正規化固有値 $\hat{\lambda}$ の漸近固有値分布 $f(\hat{\lambda})$ を考える。

$$\beta \equiv M / N \quad (5a)$$

$$\hat{\lambda} = \lambda / N \quad (5b)$$

$$f(\hat{\lambda}) = N \lim_{N \rightarrow \infty} f^{unord}(N\hat{\lambda}) \quad (5c)$$

(5c) 式の f^{unord} は順序無し固有値の確率分布を表す。また、(4)式と (5b) 式で正規化固有値 $\hat{\lambda}$ の式が異なるのは、(4)式ではランダム行列 \mathbf{A} の、(5b) 式ではウィシャート行列 $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ の固有値を求めていることによる。漸近固有値分布 $f(\hat{\lambda})$ は、**マルチェンコ・パスツール (Marčenko-Pastur (MP)) 則** と呼ばれ、次式で与えられる（この解説は[3], [4]に）。

$$f(\hat{\lambda}) = (1 - \beta)^+ \delta(\hat{\lambda}) + \frac{\sqrt{(\hat{\lambda} - \hat{\lambda}_-)^+(\hat{\lambda}_+ - \hat{\lambda})^+}}{2\pi\hat{\lambda}} \quad (6)$$

$$\hat{\lambda}_{\pm} = (1 \pm \sqrt{\beta})^2$$

$$(z)^+ \equiv \max(0, z)$$

右辺第1項のデルタ関数 δ は、 $\beta < 1$ 、すなわち、 $M < N$ で $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ の固有値を求める場合に、値が 0 となる固有値を含むことによるものであるため、以下では、 $\beta \geq 1$ ($M \geq N$) に限定して、右辺第2項のみで考える。その時、式(6)は次式のようにも書ける。

$$f(\hat{\lambda}) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4\beta - (\hat{\lambda} - 1 - \beta)^2}}{2\pi\hat{\lambda}} & \text{for } (1 - \sqrt{\beta})^2 \leq \hat{\lambda} \leq (1 + \sqrt{\beta})^2 \\ 0 & \text{for others} \end{cases} \quad (7)$$

$\beta = 1$ ($M = N$) の場合には、簡単になって、

$$f(\hat{\lambda}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4}{\hat{\lambda}} - 1} & \text{for } 0 \leq \hat{\lambda} \leq 4 \\ 0 & \text{for others} \end{cases} \quad (8)$$

となる。累積分布関数は式(9)である[1] (積分解法は「岩波数学公式 I」より)。

$$F(\hat{\lambda}) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \sqrt{-\hat{\lambda}^2 + 2(1+\beta)\hat{\lambda} - (1-\beta)^2} - (1+\beta) \sin^{-1} \left(\frac{1+\beta-\hat{\lambda}}{2\sqrt{\beta}} \right) \right. \\ \left. - |1-\beta| \sin^{-1} \left(\frac{(1+\beta)\hat{\lambda} - (1-\beta)^2}{2\sqrt{\beta}\hat{\lambda}} \right) + \pi \right\} \quad (9)$$

$N=M$ である $\beta=1$ の場合には、

$$F(\hat{\lambda}) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\hat{\lambda}(4-\hat{\lambda})} - \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \left(1 - \frac{\hat{\lambda}}{2} \right) + \frac{1}{2} \quad (10)$$

となる。

図 3 は、式(7)で与えられる正規化漸近固有値の確率密度関数を、 β をパラメータとして示している。それぞれ、正規化固有値が限定された範囲に収まることが興味深い ($\beta=1$ では 0 ~4 の範囲)。図 4 は、確認の意味で、 $\beta=4$ について、 $N=2000$, $M=8000$ としたときのシミュ

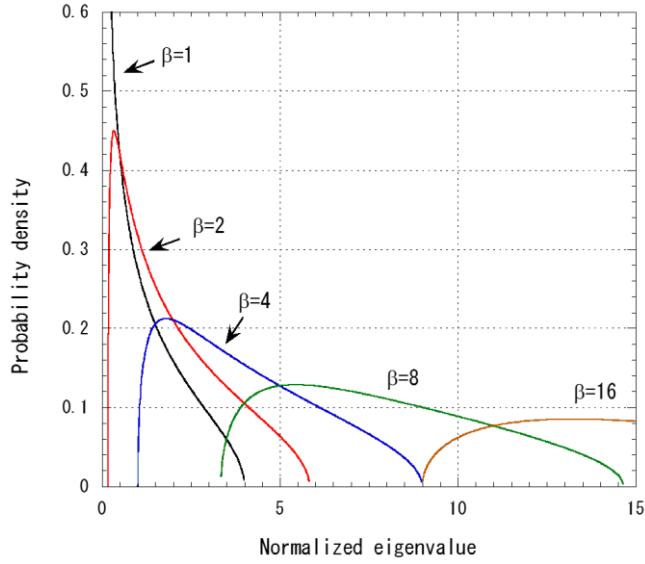
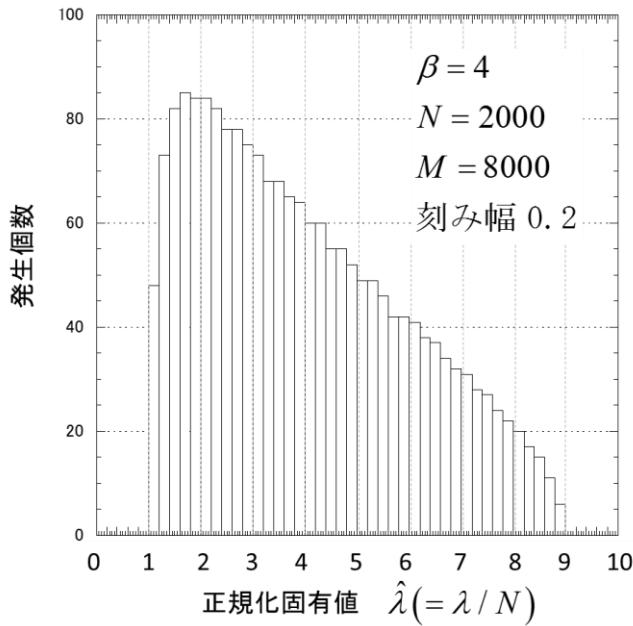


図3 漸近固有値分布（マルチエントロ・パスツール則）

図4 大規模ウェーハート行列の正規化固有値分布 (A : 2次元複素正規分布)

レーション結果である。図は縦軸を度数とするヒストグラムで描いているが、換算して軸を合わせると、図3の $\beta=4$ のカーブとぴったり一致する。

図5は $\beta=4$ のときの正規化固有値の累積分布である。実線は、式(9)で求めた正規化漸近固有値の分布である。また、 $\beta=4$ に相当する $N=2, M=8$ の場合と $N=4, M=16$ の場合につき、固有値の数が 10000 個になるよう乱数を変えて試行した結果 ($N=2$ では 5000 回、 $N=4$ では 2500 回) を点線で示している。比べてみると、ほとんど同じ形に見える。累積確率が 1 に

近い部分と 0 に近い部分にわずかに差は現れてくる（文献[1]の図 9.17, 9.18 には $\beta=1$ の例を示している）が、漸近固有値分布は、かなり小規模のウイシャート行列の固有値（ただし、順序無し固有値）の確率分布も良い近似になっていることがわかる。

では、両者（大規模ウイシャート行列の漸近固有値分布と小規模ウイシャート行列の順序無し固有値分布）は同じような特性と言つてよいか？ 答えは “No” である。分布が持つ意味合いが異なっているのである。大規模ウイシャート行列では、その一つの行列の中に、固有値が分布し、行列を変えても同じような分布が現れ、ランダム行列であっても、行列ごとの特性が安定である。一方、小規模行列では、例えば $N=2$ では、一つの行列に現れる固有値の数は 2 つであり、行列を変える毎に値が大きなばらつきを持つ。その多数回の試行の結果として、図 5 に見られるような確率分布になる。「一つの行列の中に確率分布の全体が現れる（大規模行列）」のと「確率的にばらついて現れる（小規模行列）」の違いである。MIMO システムの回線設計においては、この確率の捉え方の違いを生かすことができる（*）。

次節のマッシブ MIMO の応用で詳しく述べるように、無線通信で重要な漸近固有値分布は、ウイシャート行列に対してであり、本節で挙げた 3 つの法則のうち、マルチエンコ・ペスツール側が大事な働きをする。

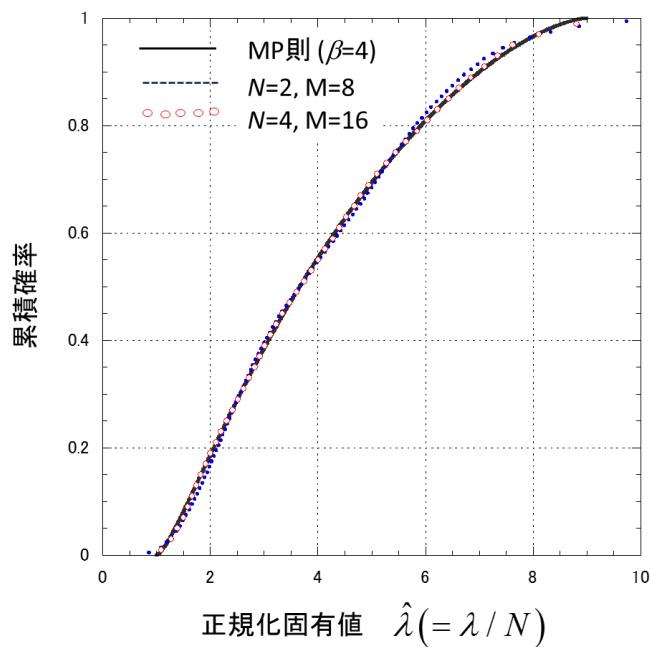


図 5 $\beta=4$ における MP 則と小規模ウシャート行列の正規化固有値の累積分布

注*）本稿では具体的な伝送方式を議論しないので、イメージが掴みにくいかもしれない。例えば、10 個のものが使えるとしたとき、i) 手持ちの 100 個の中から、よいものを 10 個選んで使うのと、ii) 与えられた 10 個を使うのでは、発生の確率分布が同じだとしても、i) にメリットが出るであろう。そんなイメージ[7]。

4. マッシブ MIMO 伝送特性評価への応用

4. 1 通信路容量

シャノンの情報理論によれば、通信路の SN 比が γ であるとき、1 秒 1Hzあたりの伝送可能ビット数：通信路容量 C は次式で与えられる。

$$C = \log_2(1 + \gamma) \quad (\text{bit/s/Hz}) \quad (11)$$

式(11)で与えられる通信路容量は、具体的な伝送方法に対するものではなく、理想的な伝送方法が実現された場合の伝送可能ビット数の上限を与えるものである。

MIMO では、以下の二つの方式で通信路容量が異なるものになる。

- ・ 方式 1：受信側のみが MIMO チャネル応答行列の情報(CSI)をもつ場合
- ・ 方式 2：(事前の測定などにより) 送信側・受信側の双方で CSI を共有している場合

方式 1 では、

$$\begin{aligned} C_1 &= \log_2 \left| \mathbf{I} + \frac{\gamma_0}{p} \mathbf{A} \mathbf{A}^H \right| \\ &= \sum_{i=1}^p \log_2 \left(1 + \frac{\lambda_i \gamma_0}{p} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

の情報量を伝送できる能力を持つ。この場合の γ_0 は送信側の全電力が单一アンテナで放射され、それがパス利得 1 のパスで到来したとき、これを单一アンテナで受信するときの SN 比である。送信側で通信路の状況が分からぬときは、全アンテナ（ただしこの場合、送信アンテナ数 = p ）に均等に電力配分するとき、結果として最大容量が得られることを意味している。

方式 2 では、

$$C_2 = \sum_{i=1}^p \log_2 (1 + \lambda_i \gamma_i) \quad (13a)$$

$$\sum_{i=1}^p \gamma_i = \gamma_0 \quad (13b)$$

である。ここで、各固有パスには、固有値 λ_i に応じた電力が配分されることになるが、その最適割り当ては注水定理(water filling law)に従う（文献[1]の 9.3 節で解説）。

このように、両方式共に、MIMO の伝送特性（通信路容量や BER 特性）は、ウェイシャー行列の固有値に支配されている、このため、伝送特性の把握には、固有値分布を知ることが本質的なことになる。

4. 2 マッシブ MIMO の通信路容量

前節で述べたとおり、通信路容量は、送信側にチャネル情報が有って、送信電力を最適に制御する場合（注水定理に基づいて行われる）と、チャネル情報を持たず、各アンテナから等電力で送信する場合で異なる式になるが、ここでは、後者を対象とし、かつ、その平均通信路容量を議論する。漸近固有値分布は N が無限大の時の分布であるが、この式を、有限素子数 N の場合に近似すると、平均通信路容量は式(12)より

$$\begin{aligned}
 \langle C \rangle &\approx N \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \log_2 \left(1 + \gamma_0 \hat{\lambda} \right) f(\hat{\lambda}) d\hat{\lambda} \\
 &= \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \log_2 \left(1 + \frac{\gamma_0 \lambda}{N} \right) f\left(\frac{\lambda}{N}\right) d\lambda \\
 &= \frac{N}{2\pi} \int_{(1-\sqrt{\beta})^2 N}^{(1+\sqrt{\beta})^2 N} \log_2 \left(1 + \frac{\gamma_0 \lambda}{N} \right) \frac{\sqrt{4\beta - \left(\frac{\lambda}{N} - 1 - \beta \right)^2}}{\lambda} d\lambda
 \end{aligned} \tag{14}$$

となる。 $\beta=1$ ($M=N$) では、

$$\begin{aligned}
 \langle C \rangle &\approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{4N} \log_2 \left(1 + \frac{\gamma_0 \lambda}{N} \right) \sqrt{\frac{4N}{\lambda} - 1} d\lambda \\
 &= \frac{N\gamma_0}{\ln 2} {}_3F_2 \left[\left\{ 1, 1, \frac{3}{2} \right\}; \{2, 3\}; -4\gamma_0 \right] \propto N
 \end{aligned} \tag{15a}$$

となり、アンテナ素子数に比例する[5]。式中の ${}_3F_2$ は ${}_pF_q$ 型の一般型超幾何関数である。上式の積分解法は、数式ソフト Mathematica を利用しているが、文献[6]では、式(15b)で与えられている。

$$\langle C \rangle = \frac{N}{\ln 2} \left(\ln \gamma_0 - 1 + \frac{\sqrt{1+4\gamma_0} - 1}{2\gamma_0} + 2 \tanh^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+4\gamma_0}} \right) \tag{15b}$$

式(15a)と(15b)は、同じものの別表現であるので、当然ながら、数値計算結果は同一値になる【注：文献[6]では、 e を底とする自然対数（単位ナット）で通信路容量を表しており、式(15b)では $1/\ln 2$ を掛けてビットに変換している。】

図 6 は、式(14)で求めた正規化漸近固有値の累積分布を β をパラメータとして示している。図より、 β の値が大きくなるに従い、i) 正規化固有値の値が大きくなること、ii) 固有値変化の範囲が (dB 値の変化幅で見て) 小さくなることがわかる。i) は β の値が大きくなるに従い、対応するアンテナの数 M が βN となって大きくなるので当然ではあるが、ii) の性質には

注目すべきである。近年、その技術に注目が集まっているマッシブMIMOでは、一方の（=基地局側の）アレーアンテナ素子数が100～1000、もう一方の（=端末側の）素子数が10素子以内のようなアンバランスな利用形態が想定されている。すなわち、 $\beta \gg 1$ である。同図より、 β の値が大きくなるほど、固有値の相対的な変化幅が小さくなり、安定した通信路が確保できることがわかる。図5に示したように、比較的小規模のMIMOの正規化固有値の確率分布も、同じ β に対してほぼ同じ特性になるが、例えば、共に固有値の数が3で、3ストリームの伝送ができる $N=3, M=9$ ($\beta=3$)のMIMOと $N=3, M=300$ ($\beta=100$)のMIMOでは、後者がより安定な通信路を実現している。これが、マッシブMIMO適用のメリットになる。

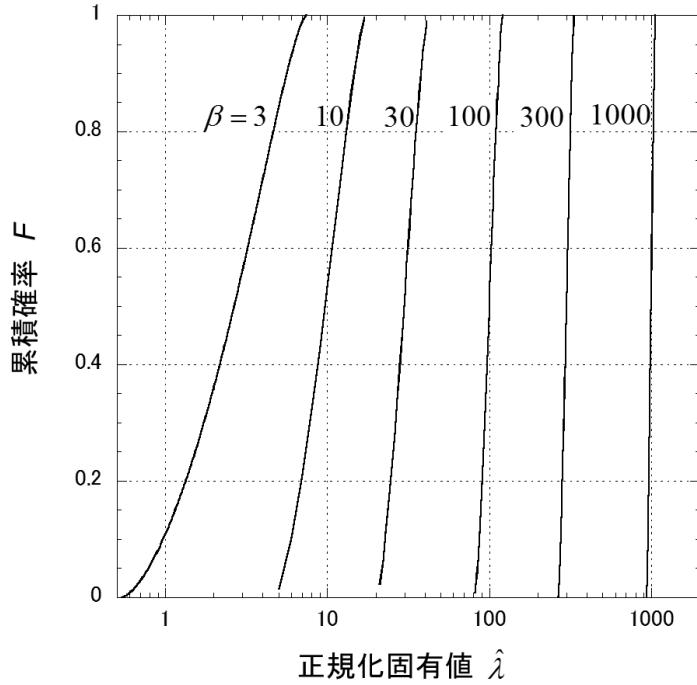


図6 MP則正規化固有値の累積分布のパラメータ β 依存性

式(15)から、 $\beta=1$ (すなわち $M=N$) の場合、漸近固有値分布に基づく平均通信路容量は、アンテナ数 N に比例しているので、 $\langle C \rangle / N$ とした正規化通信路容量で表すことができる。 $\beta=1$ 以外については、式(14)の積分が解けず閉形式にはならないが、数値計算により $\beta=1$ のケースと同様に、アンテナ数 N に比例し、式(16)の形で表されることが確認されている [5]。

$$\langle C \rangle = g(\gamma_0, \beta)N \quad (16)$$

図7は、式(16)の $g(\gamma_0, \beta)$ について、 β をパラメータとして、 γ_0 を関数として示している。図には、 $\beta=1$ については、 $N=2$ と 4 の理論値を、 $\beta=2$ については、 $N=2$ ($M=4$) の理論値

を、それぞれ N で除したものをプロットしている。同図より、MIMO 定義の最小数である $N=2$ においてさえ、式(14)での推定が、非常に良い近似になっていることは、4. 3 節や図 5 での固有値解析において述べていたとはいえ、驚くべきことと感じる。

なお、ここでは、全て $\beta \geq 1$ のケース、すなわち $M \geq N$ の場合を扱っており、 $M < N$ の場合、すなわち、 $\beta < 1$ の場合は、確率分布を式(6)に変える必要があり、通信路容量の評価等では結果が変わってくる。しかし、実際には、 $M < N$ であっても、何らかの工夫により、传送ストリーム数は $\min\{M, N\}$ とするであろうから、マルチストリーム伝送（固有モード伝送を想定）であって、かつ、ストリーム毎の送信電力制御（注水定理に基づく）を行わず、等電力で送信する場合には、ここで示した平均通信路容量が、 $\beta < 1$ の場合にも適用できることになる。

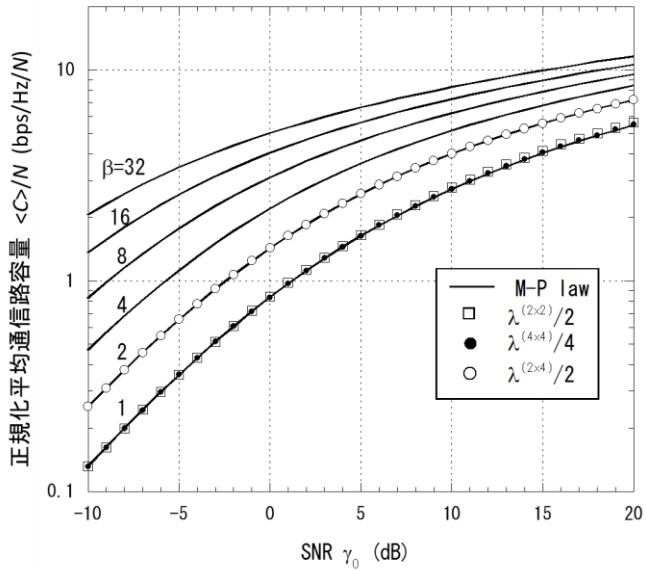


図 7 正規化平均通信路容量の SN 比特性

4. 3 発展

前節では、ウィシャート行列の元になるランダム行列に対して、行列要素は無相関という完全ランダムな行列を扱っている。マッシブ MIMO 応用においては、次のようなケースでの検討も必要になってくるであろう。

- 1) ランダム行列 \mathbf{A} の要素が、仲上・ライス分布（見通し内環境を代表）のような、平均値が 0 でない分布（非中心ウィシャート分布）
 - 2) 大規模アレー素子の選択的利用に現れるスペース形ランダム行列
 - 3) アンテナブランチ間に相関がある場合（この場合は空間相関）の有相関ランダム行列
- ランダム行列の漸近固有値分布を求める理論は、完全無相関の場合でも高度に数学的であるため、上記のケースの理論解析はさらに困難になると予想される。それでも、シミュレーションは簡単に行えるので、その方面から当たりをつけてゆくのがよいかもしれない。上

記項目 3) の有相関ランダム行列での漸近固有値分布と通信路容量については、文献[7]で検討しているので、興味ある読者は見てほしい。

5. さらに理解を深めるために

この資料をまとめるに際して筆者が勉強したランダム行列の専門書を紹介する。若い人们は基礎から学んで知見を深め、それを土台に美しい花を咲かせてほしい。

文献[8]：数理統計学の全体に亘ってその基礎がまとめられていて、多変量解析、ウィシャート分布などの自習書に良い。(絶版になっていて、図書館等で入手がしにくい場合は、同様タイトルの最新書を見つけてほしい)

文献[3]：ランダム行列の入門書：本資料 3 節の内容はこの本にまとめられている(特に、本の第 1 章(渡辺澄夫)、第 4 章(田中利幸))。まずはこの本から入ることを薦める。

文献[9]：文献[3]の著者等が、ランダム行列の基礎と応用の技術解説を行っていて、上記文献[3]の基になっている雑誌「数理科学」の特集号。大学等の図書館にバックナンバーがあると思うので、ここから入るのも良い。

文献[10]：タイトルが「ランダム行列の基礎」となっているので、すぐ読みたくなるが、数理物理学への応用を念頭において書かれていて、筆者のような無線工学者には難物。ハミルトンが編み出した四元数から講義が始まっている。

文献[4]：無線工学応用視点から書かれたランダム行列の本。章が進むにつれて難しくなるが、我々の世界のことなので、最初の基礎的なところだけでも、ぜひ勉強してほしい。

文献[11]：ランダム行列理論の集大成。入門書が物足りなく感じるようになった人は、この世界にどうぞ。(筆者は、この本を一時手元に置いたが、読むところまで進まなかった)。理論から応用まで幅広い話題を網羅したハンドブックとして文献[12]もある。

その他：論文ベースの参考文献(原著論文など歴史的なものを含む)は、文献[3]のそれぞれの章の末尾に多数挙げられている。

参考文献

- [1] 唐沢好男、改訂：デジタル移動通信の電波伝搬基礎、コロナ社、2016.02.
- [2] 唐沢好男，“伝搬モデルに現れる確率分布：～レイリーフェージングからマッシブ MIMO まで～”，私報：TR-YK-005, pp. 1-36, 唐沢研究室 HP, 2017.12.
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_005_Probability_distribution.pdf
- [3] 渡辺澄夫他, ランダム行列の数理と科学, 森北出版, 2014.
- [4] A. M. Tulino and S. Verdu, *Random Matrix Theory and Wireless Communications*, now Publishers Inc., 2004.
- [5] 唐沢好男, “Massive MIMO チャネルの漸近固有値分布と通信路容量,” 信学論(B), vol. J99-B, no. 9, pp. 637-645, 2016.09.

- [6] E. Telatar, “Capacity of multi-antenna Gaussian channels,” European Trans. Telecommun., vol. 10, no. 6, pp. 585-595, Nov. 1999.
- [7] 唐沢好男, “空間相関のあるフェージング環境におけるマッシブ MIMO の情報伝送能力について（仮題）,” 信学技報、AP 研 2018.11 (発表予定) .
- [8] ウィルクス (田中英之、岩本誠一訳) , 数理統計学 1, 2, 東京図書, 1971(1), 1972(2).
- [9] 特集、ランダム行列の広がりーその多様な応用, 数理科学, サイエンス社, 2007.02.
- [10] 永尾太郎, ランダム行列の基礎, 東京大学出版会, 2005.
- [11] M. L. Mehta, *Random Matrices (Third Ed.)*, Elsevier Academic Press, 2004.
- [12] G. Akemann, J. Baik, and P. Di Francesco (Editors), *The Oxford Handbook of Random Matrix Theory*, Oxford Univ. Press, 2011.