

ワイヤレス情報伝送の物理限界を探る

～二重選択性フェージング環境においてシャノン限界にどこまで近づけるか～

唐沢 好男

筆者は、移動伝搬に関する知識のほぼ全部を搾り出して、コロナ社の「改訂 デジタル移動通信の電波伝搬基礎」[1]にまとめている。その本の最終項は「10.8.2 情報伝送の物理限界」である。この項では、ドップラー変動の標準偏差：ドップラースプレッド (σ_v ; [1]では記号 σ_f を使用) と遅延広がり標準偏差：遅延スプレッド (σ_τ) の積： $\sigma_v\sigma_\tau$ (スプレッドファクタと呼ばれる) が情報伝送の物理限界に立ちはだかる究極の伝搬の壁であることを示唆したところで終えている。その後、この問題について考察を深め、新たに得た知見を学術論文にまとめ[2]、その内容を、コロナ社の「無線通信物理層技術へのアプローチ」[3]の第 12 章「二重選択性フェージング下での伝送特性」に取り入れている。

本レポートは、[2]の内容をもとに、[3]に取り込めなかった部分を含め、このテーマに関する筆者の一連の研究を、整理してまとめたものである。

本レポートは、2017 年 11 月に公開したレポート YK-003 「ワイヤレス情報伝送の物理限界」の改訂版である。この内容のエッセンスは信学会 AP 研資料[4]にまとめている。

1. はじめに

通信路が定常状態にあるときの雑音下での情報伝送の物理限界は、シャノンの通信路容量の式によって定められている[5]。しかし、これには電波伝搬の要因が含まれていない。すなわち、究極の情報伝送は、統計多重効果によって、十分に長い時間（その極限は無限の時間）を使っての符号化や信号処理ができるという前提条件に立っている。これに対して、電波伝搬はその前提を妨げる働きをするため、シャノンの通路容量式とは別の視点での情報伝送の物理限界がある。どんなに SN 比がよくても、通信方式を工夫してもシャノンの通信路容量式を達成できない電波伝搬環境がある。

取り上げる伝搬環境は、ドップラー周波数の広がりや遅延の広がりが共に問題になるマルチパス環境、すなわち、時間領域と周波数領域に選択性を有する二重選択性フェージング環境である。この環境での情報伝送において、良好な伝送を維持する条件として、筆者は、ドップラースプレッド σ_v と遅延スプレッド σ_τ の積スプレッドファクタに着目し、通信路容量のスプレッドファクタ依存性を議論した[1], [2]（注：スプレッドファクタの定義はいくつかの流儀があり、詳しくは本稿 3 節 (p. 4) で）。

本レポートでは、まず、二重選択性フェージングの環境表現をおさらいし、この伝搬パラメータを組み入れて拡張した通信路容量式を示す。そして、この結果から見えてくる電波伝搬（スプレッド

レッドファクタ： σ_v, σ_r) と伝送特性の関係を述べる。通信路容量解析に関する本レポートで展開する手法は、伝搬モデルの特徴を利用する統計的手法である。この種の解析では、文献[6]～[8]、及び、そこに引用されている多数の論文にあるように、情報理論が扱う相互情報量をベースとした緻密な方法が正攻法であろう。しかし、そのような手法によっても見通し良い式の導出には至っていないため、本レポートで述べる統計的手法は、それを搦め手から攻めるイメージである。そして、最後の章では、限界を破るには、すなわち、伝搬劣化を克服するにはどうしたら良いかについて考察を述べる。

2. 超えられない物理限界

本レポートでは、電波伝搬を要因とする情報伝送の物理限界を扱う。最終章で述べるように、限界とは言っても、乗り越えられる希望がないわけではない。それとは別に、無線情報伝送には物理的に越えられない壁（真の物理限界）がある。代表的なものは以下の4つであろう。

- ①電波の伝搬速度（情報の伝送速度）
- ②電波の伝搬に伴う減衰
- ③受信系の雑音
- ④シャノンの通信路容量

図1はこれをまとめている。①に関して、情報伝送を担う電波の伝搬速度が光速とはいえ有限であることは電磁気学で学んでいる。3万6千kmの高さにある静止衛星を介した電話では、会話の時間ずれに戸惑うし、より遠方との宇宙通信（＝宇宙人との対話）ではさらに大きな問題になる。②は電波伝搬の問題である。自由空間を伝搬する波であっても、球面状に広がりながら伝搬するため電力密度は送信点からの距離の2乗に逆比例して弱くなる。③は温度を有するものには熱による雑音が必ず発生する。その雑音の強さは温度（絶対温度[K]）と帯域幅に比例する。値そのものはきわめて小さいが、信号電力が弱くなれば、そして帯域幅が広くなればそれが問題になる。

④はシャノン（Claude Shannon）が打ち立てた情報理論からの帰結である。雑音がある通信路（チャンネル）では、どんなに通信方式を工夫しても情報ビットを誤り無く伝送できる速度に上限がある。通信路容量と呼ばれる上限速度 C （単位：ビット/秒 (bps)）は次式で表される。

$$C = W_s \log_2(1 + \gamma) \quad (\gamma \equiv P_s / P_N) \quad (1)$$

ここで、 W_s は通信路の帯域幅 [Hz]、 P_s は信号電力、 P_N は雑音電力であり、電力比 γ はSN比である。②によって弱くなる信号電力は、③による雑音の働きを受け、④ ((1)式) で定まる限界を超えることができない。①による伝搬速度の有限性は、マルチパス伝搬路において、電波信号の到着時間のばらつきを生み、伝送波形の歪みをもたらす。ワイヤレス情報伝送では、この壁を知り、これらを受け入れた上でのシステム設計がなされる。

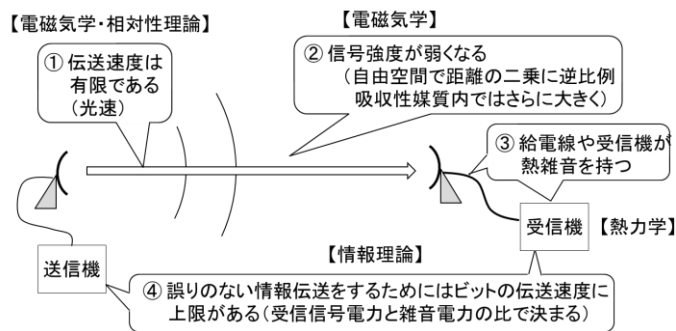


図1 ワイヤレス情報伝送における越えられない四つの壁

3. 二重選択性フェージング環境の統計的性質

送受信アンテナ間で見通し確保が困難な移動通信では、送信アンテナからの電波は周囲の地物や建物などで反射や回折を受け、さまざまな経路を通過して受信点に到達する。図2に示すように、移動通信に見られるマルチパス伝搬では、到来角度・ドップラー周波数・遅延時間に値の広がり (=ばらつき、スプレッド) があることである。これにより、場所・時間・周波数の領域で強弱の変化が現れる選択性をもたらすことになる。本レポートでは、このうちの二つ：遅延広がりによる周波数領域での選択性と、ドップラー広がりによる時間領域での選択性が同時に現れる二重選択性フェージング環境を対象とする。

遅延の広がりを伴うマルチパス環境は時変インパルス応答 $h(t, \tau)$ (t :経過時間、 τ :遅延時間)で表され、素波 i の複素振幅 a_i 、遅延時間 τ_i により、

$$h(t, \tau) = \sum_i a_i(t) \delta(\tau - \tau_i(t)) \tag{2}$$

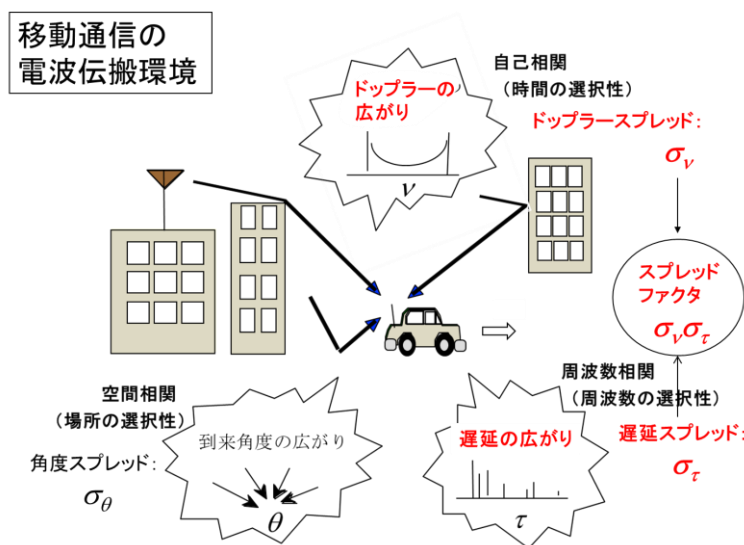


図2 マルチパス環境の特徴と二重選択性フェージングのキーパラメータ “スプレッドファクタ”

で表される。ここで、 δ はDiracデルタ関数である。

ここでは遅延とドップラー周波数領域での表現を扱うので、時間変化(t)をフーリエ変換して周波数領域(ν)に置き換えた遅延・ドップラースプレッド関数 $g(\nu, t)$ で表す[9]。(注：文献[1]等において、ドップラー周波数の変数に f を用いてきたが、キャリア周波数と区別するために、ここでは ν (ニュー) を用いる)。

$$g(\nu, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) e^{-j2\pi\nu t} dt \quad (3)$$

統計的な環境表現とするために、スプレッド関数の電力次元の期待値をとると、

$$G(\nu, \tau) \equiv \langle |g(\nu, \tau)|^2 \rangle \approx S(\nu) p(\tau) \quad (4)$$

となる。遅延とドップラーの発生メカニズムは独立と考えられるので、(4)式の右辺のように、ドップラースペクトル $S(\nu)$ と遅延プロファイル $p(\tau)$ に変数分離した積で近似する。

遅延時間の最小値と最大値を τ_{min} , τ_{max} 、ドップラー周波数の最小値と最大値を ν_{min} , ν_{max} とするとき、 $\Delta_H \equiv (\nu_{max} - \nu_{min})(\tau_{max} - \tau_{min})$ は、**スプレッドファクター**と呼ばれる[10],[11]。到来角度に広がりがある環境で移動受信を行うと受信信号はドップラー広がりによって、周波数 $\pm f_D$ (f_D : 最大ドップラー周波数: これのみ ν でなく慣例の f を用いる) の範囲でスペクトル広がりを持つ。ゆえに、上述の $\nu_{max} - \nu_{min}$ は、通常 $2f_D$ に置き換えられる。スプレッドファクタの値が 1 以上の状態 ($\Delta_H > 1$) のとき **オーバースプレッド (overspread)**、1 以下の状態 ($\Delta_H < 1$) のとき **アンダースプレッド (underspread)** と呼ばれる[10]。通信やレーダ計測が成立するためにはアンダースプレッドが必須条件であり、通常生起する無線伝搬環境は、これより何桁も小さい値になる。このような状態は、**強いアンダースプレッド (highly underspread)** と呼ばれる。

電波伝搬現象は確率過程に従うため、上述の最大値 (特に、遅延広がりでの) は、観測時間に依存してしまい、統計モデルとして扱いにくい量である。そのため、環境を表すパラメータには、統計値での指標が望ましい。このため、次式で定義される指標：**遅延スプレッド σ_τ** と **ドップラースプレッド σ_ν** を用いる。

$$\sigma_\tau = \sqrt{\frac{1}{P_R} \int_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} (\tau - \tau_m)^2 p(\tau) d\tau} \quad (5)$$

$$\tau_m = \frac{1}{P_R} \int_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} \tau p(\tau) d\tau$$

$$\sigma_\nu = \sqrt{\frac{1}{P_R} \int_{-f_D}^{f_D} (\nu - \nu_m)^2 S(\nu) d\nu} \quad (6)$$

$$\nu_m = \frac{1}{P_R} \int_{-f_D}^{f_D} \nu S(\nu) d\nu$$

$$P_R = \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} p(\tau) d\tau = \int_{-f_D}^{f_D} S(\nu) d\nu$$

ここでは、ドップラースプレッドと遅延スプレッドの積： $\sigma_\nu \sigma_\tau$ をスプレッドファクタと呼び、強いアンダースプレッド環境（具体的には、およそ全ての無線通信環境が含まれる $\alpha \leq 0.01$ が目安）を対象とする。以下、これを α と置く。

$$\alpha \equiv \sigma_\nu \sigma_\tau (\leq 0.01) \quad (7)$$

なお、統計値でのスプレッドファクタ定義は、Kennedyが文献[12]において、 $\sigma_\nu^2 \sigma_\tau^2$ をtotal spreadと呼んで用いており、本稿はこの思想に組み込んでいる。

マルチパス環境を広義定常無相関散乱（WSSUS）過程とみなすことにより、周波数相関特性 $\rho_a^{(\text{delay})}(\Delta f)$ は遅延時間領域の統計的表現である遅延プロファイルのフーリエ変換により、また、自己相関特性 $\rho_a^{(\text{Doppler})}(\Delta t)$ は、ウィーナ・ヒンチンの関係式より、ドップラーの周波数領域表現であるドップラーパワースペクトルの逆フーリエ変換により求まり、それぞれ、以下の形で表される。

$$\rho_a^{(\text{delay})}(\Delta f) = \frac{1}{P_R} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} p(\tau) \exp(-j2\pi \Delta f \tau) d\tau \quad (8)$$

$$\rho_a^{(\text{Doppler})}(\Delta t) = \frac{1}{P_R} \int_{-f_D}^{f_D} S(\nu) \exp(j2\pi \nu \Delta t) d\nu \quad (9)$$

レイリーフェージング環境では、複素振幅変動の相関係数 ρ_a は、電力変動の相関係数 ρ_P とは、次式で結ばれる [13]（解説は[1]に）。

$$\rho_P = |\rho_a|^2 \quad (10)$$

図3は、2つの伝搬要因（遅延とドップラー）の時間領域と周波数領域の統計的関係をまとめている。広帯域情報伝送を想定し、電波伝搬環境が通信帯域内で周波数選択性になっている状態でのデジタル伝送を考える。帯域幅を B_s 、通信信号のシンボル時間長を T_s とすると、両者は $B_s \sim 1/T_s$ の関係で結ばれる。

図3(a)の遅延プロファイル上に、 T_s の位置を定めると図の実線のようなであったとする。この場合は、遅延波がシンボル長を超えて存在するので、良好な通信ができない状況と言える。同じことは同図(b)でも帯域 B_s では、帯域内で相関が劣化している。良好な通信を得るためには $\sigma_\tau \ll T_s$ でなければいけないが、それを満たしていないということである。では、全く通信ができないかというそうではない。何らかの方法によって実効的にシンボル時間を長くすることができれば、これを克服することができる。図の例で言えば T_s を点線で示す実効シンボル長 T_e に替えることができればである。実際にOFDMでは、広帯域化（マルチキャリア化）によってそれが行われており、 $\sigma_\tau \ll T_e$ を満たす T_e （OFDMでは T_{OFDM} ）に変えることは可能である（等化器でも、メモリー機能を使って実効的に時間を引き延ばしているのと同じ働きになる）。このように、信号帯域幅 B_s

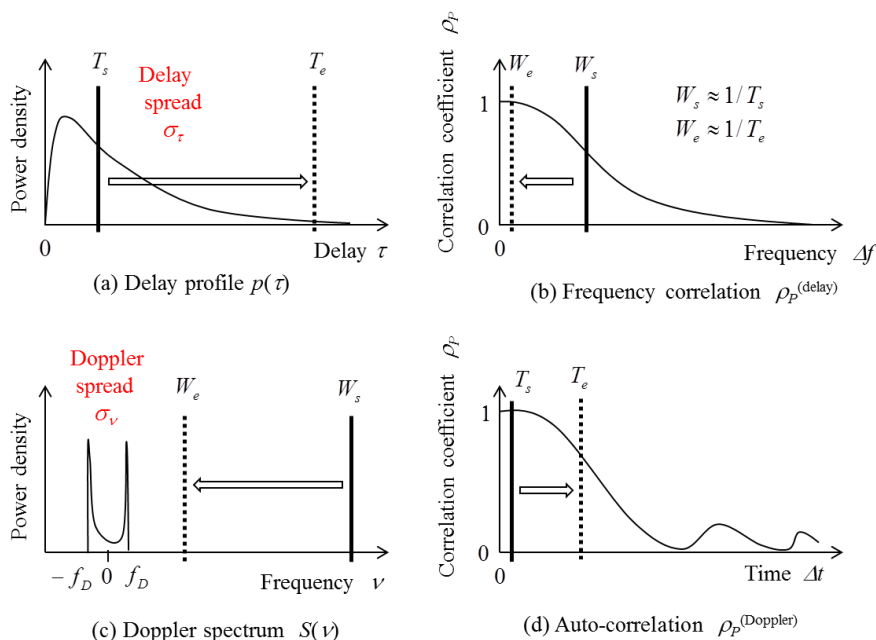


図3 二つの伝搬要因（遅延とドップラー）の時間領域と周波数領域の統計的關係（図の特性はイメージ）

に対応するシンボル長 T_s を実効的なシンボル時間 T_e に引き伸ばす信号変換をしても、マルチキャリア化等により、信号全体の帯域幅 W_s を変えないようにできる。

ところが、ドップラー変動が激しい環境では、この操作が、伝送特性を劣化させる働きになる。図3(c)で、この領域で見ると、 $\sigma_\nu \ll W_s$ が満たされていた状態（すなわち $\sigma_\nu T_s \ll 1$ の状態）が W_e への変換によって、それが満たされなくなることになる。これは、同図(d)からわかるように、自己相関特性の劣化、すなわち高速フェージング（＝シンボル時間内の大きな位相変化）状態になって、伝送特性の劣化になるのである。

このよう見ると、周波数・時間の両領域で選択性がある場合には、理想的な T_e を定めることができなくなり、どこかの伝送特性の最良点（＝限界点）で妥協するということになる。文献[1], [2]では、良好な伝送のためのシンボル時間に対する条件は、 $\sigma_\tau \ll T_e \ll 1/\sigma_\nu$ 、良好な伝送を実現できる伝搬環境は、通信方式によらず $\alpha (= \sigma_\nu \sigma_\tau) \ll 1$ であることを議論している。図4は、通信信号の実効シンボル長 T_e が、上述の二つの電波伝搬の壁（遅延広がりどとドップラー周波数広がり）に挟まれる領域に設定されるイメージを示している。5節では、二重選択性フェージング環境の通信路容量を議論するが、そこに、情報伝送の物理限界として、スプレッドファクタが現れてくることを示す。

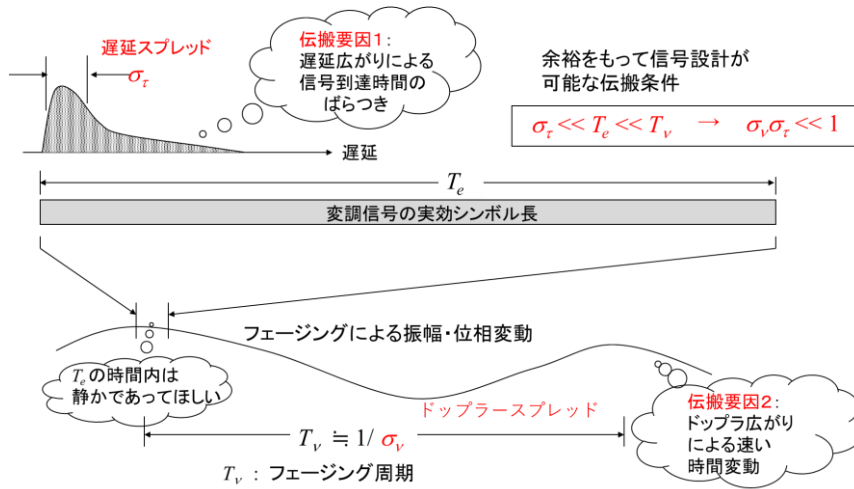


図4 信号設計に立ちはだかる電波伝搬の二つの壁

4. フラットフェージング及び周波数選択性フェージング環境における通信路容量

4.1 雑音通路における通信路容量

シャノンはその原著論文[5]の中で、誤りなく情報伝送ができる上限の伝送レートを通信路容量 C と定め、以下の式を与えている。

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} \max_{q(x)} \frac{1}{T} \iint q(x, y) \log_2 \frac{q(x, y)}{q(x)q(y)} dx dy \quad (11a)$$

$$C_{AWGN} = W_s \log_2(1 + \gamma) \text{ (bps)} \quad ((1) \text{式の再掲}) \quad (11b)$$

ここで、 x, y は送受信信号、 $q(x), q(y)$ は x および y の確率密度関数、 $q(x, y)$ は結合確率密度関数である。(11b)式は、通信路に発生する雑音加法性白色ガウス雑音 (AWGN) である時に成立する式である。上式からも明らかなように、伝搬環境が定常状態において、十分な時間をかけて送信信号の符号化を工夫すれば、式(11b)の伝送レートが誤りなく達成されることになる。熱雑音下の定常状態において、情報伝送の物理限界はこのシャノンの通信路容量にあると言える。

4.2 フェージング環境における通信路容量

フラットフェージング環境と周波数選択性フェージング環境についてみてみよう。遅延のばらつきが無視できるように小さく (すなわち、 $\sigma_\tau \ll T_s$)、かつ、時間的に十分に緩やかに変化する場合 (すなわち、 $\sigma_v \ll 1/T_s$) のフェージングはフラットフェージングと呼ばれる。フラットフェージングの場合には、十分な時間をかけての符号化が可能であるという前提が維持されるので、平均通信路容量 C_e は、SN 比 γ がその平均値を Γ_0 として、次式のように表される。

$$C_e = W_s \int_0^\infty p_{SNR}(\gamma; \Gamma_0) \log_2(1 + \gamma) d\gamma \quad (12a)$$

$$\leq W_s \log_2(1 + \Gamma_0) \quad (12b)$$

ここで、 p_{SNR} は、SN比: γ の確率密度関数である。(12b)式は Jensen の不等式によるが、ほぼ等号と考えて良い。ゆえに、フラットフェージングでは、熱雑音通信路の通信路容量に十分近づけることができると言える。

では、広帯域情報伝送で問題になる周波数選択性フェージングではどうであろうか。この場合でも、OFDM に代表されるように、広帯域信号を狭帯域に分割して伝送すれば、そのサブキャリアごとには十分フラットなフェージングとして扱える。故に、周波数フェージング環境下でも、通信路容量は(12b)式と同じになって、熱雑音に対するシャノンの式がほぼ維持できると言えてよい。OFDM は伝搬の遅延広がり問題(=周波数選択性フェージング)を克服しているのである。

5. 二重選択性フェージング環境における通信路容量

前述のように、二重選択性フェージング環境では、送信波形に対して時間領域にも周波数領域にもひずみが生じるため、十分な時間をかけて符号化するという通信路容量実現に課せられる前提条件が崩れてしまう。情報伝送の限界は、電波伝搬条件によってさらに狭められることになる。このため、電波伝搬的な視点からの物理限界の議論が必要になる。

なお、通信路容量には通信路情報 (CSI) の扱いによって、coherent capacity と noncoherent capacity の区別がされている。送信側が CSI 情報に基づいて最適伝送を行う場合に得られる通信路容量が coherent capacity、通信路の特徴パラメータ (τ_{max} , ν_{max} , σ_v , σ_τ など) を利用する伝送によって得られる通信路容量が noncoherent capacity である。本節で紹介する情報理論的アプローチも、統計的アプローチも noncoherent capacity を対象にしている。

5.1 情報理論的アプローチ (概要)

通信路容量解析に関する本稿で展開する手法は、電波伝搬モデルベースの統計的手法であり、大胆な近似を多用している。この手法については、次節 (§5.2) で述べるが、この分野の世界の大勢となっている情報理論的アプローチの概要をここにまとめる。情報理論ベースの通信路容量解析については、IEEE Trans. Information Theoryの論文誌上におびただしい数の論文が発表されている。1997年時点までの研究の成果は、Biglieriのレビュー論文 ([6], ページ数 74、引用文献数549 の超大作) にまとめられている。その後10年程度も、高度な数学をベースとした研究が継続されるが[14]-[16]、二重選択性フェージング環境での通信路容量解析と言う意味では、明確なモデル構築には至っていなかった。そのような中で、2010年、Durisi等は、時間と周波数領域をWeyl-Heisenberg setでの分割を行うことによる符号設計法に基づく新たな展開を試み、通信路容量研究に一つの有望な道筋を示した[7],[17]。この手法は、情報理論的アプローチとして、その完成に向け現在も研究が進んでいる[8],[18]。しかしながら、このような高度な数学的手法をもってしても、電波伝搬と通信システムの関わりを明確にしたモデル (通信システム設計に役立つ実用的なモデル) は、まだ確立されていない (と筆者は理解している)。

この節では、Durisiらによって打ち立てられた情報理論的アプローチによる通信路容量解析の

方法の入口部分を簡単にまとめる。(非常に高度な数学理論で組み立てられており、筆者の力では理解しきれないというのが正直なところ)。

電波伝搬環境として、遅延広がりとドップラー広がりを共に有する二重選択性フェージング環境を対象とする。マルチパスの発生が広義定常無相関散乱 (WSSUS) の確率過程に従うレイリーフェージング環境である。

Durisi等の情報理論的アプローチでは、伝搬パラメータとして、遅延の範囲を $\pm\tau_0$ 、ドップラー周波数シフトの範囲を $\pm\nu_0$ とし、パラメータ値の2次元エリアを $4\nu_0\tau_0$ で定める。前述のスプレッドファクタ Δ_H である。

マルチパス環境下での送受信信号は時変インパルス応答 $h(t, \tau)$ を介して、次式で表される。

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) s(t - \tau) d\tau + n(t) \quad (13)$$

ここで、 $s(t), r(t)$ は送信および受信信号、 $n(t)$ は受信機で発生する熱雑音 (AWGN)、 t は経過時間、 τ は遅延時間である。

インパルス応答の時間変化の部分をドップラー周波数に変換して表したものが、遅延・ドップラー・スプレッド関数であり、この関数 $g(\nu, \tau)$ は、(3)式で示したように、 $h(t, \tau)$ の $t \rightarrow \nu$ のフーリエ変換で与えられる。情報理論的アプローチにおいても、筆者らの統計的アプローチにおいても、このドップラー周波数・遅延時間領域での信号表現が鍵になる。

Durisi等らは、式(13)で与えられる連続信号を時間領域と周波数領域において、Weyl-Heisenberg (WH)系で離散化し、送信信号 $s(t)$ を $K \times L$ のブロックに分けた信号の和として、次式で表している。

$$s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} s[k, l] u_{k,l}(t) \quad (14)$$

図5はWH直交系による離散化のイメージを示している。 T と F は時間及び周波数領域のグリッドパラメータで、それぞれの楕円エリア内の特性が、準定常状態となるよう $T \leq 1/(2\nu_0), F \leq 1/(2\tau_0)$ で設定される。信号の帯域幅 W は $W = LF$ 、時間ブロック長 D は $D = KT$ である。サブキャリア間隔 F (サブキャリア数 L)、シンボル時間長 T のOFDMをイメージするとよいであろう。式中の $u_{k,l}(t)$ は、送信信号の (k, l) 成分 $s[k, l]$ を送り出す時間波形で、パルス波形 $u(t)$ に対して、 $u_{k,l}(t) = u(t - kT) e^{j2\pi l F t}$ と変換される。

このとき、時間・周波数空間上で離散化された受信信号 $r[k, l]$ は次式で表される。

$$r[k, l] = h[k, l] s[k, l] + \sum_{\substack{k'=0 \\ (k', l') \neq (k, l)}}^{K-1} \sum_{l'=0}^{L-1} z[k', l', k, l] s[k', l'] + n[k, l] \quad (15)$$

ここで、 $h[k, l]$ は、 (k, l) セグメントでのチャネル特性、 $z[k', l', k, l]$ は (k', l') セグメントから (k, l) への干渉を与えるチャネル特性である。(15)式右辺の第1項は信号成分、第2項は自己干渉成分 (ISI+ICI)、第3項は熱雑音 (AWGN) である。文献[7]では、現実的な解を得るために、第2項もガウス雑音換算として扱っている。

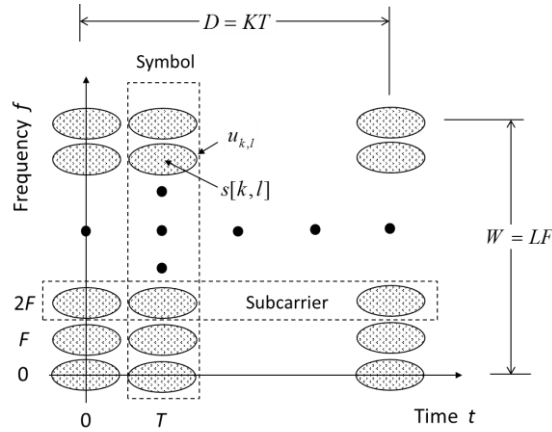


図5 信号のWeyl-Heisenberg (WH)系 離散化表現 (Durisi et al. [17]のFig. 2.1より)

通信路容量は、伝送ビット数の上限を与える指標であるので、 $u(t), T, F$ の最適化問題になる。式(15)のように離散化された信号に対する通信路容量は

$$C \equiv \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{KT} \sup_{f(\mathbf{s})} I(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \quad (16)$$

で表現される。 \mathbf{r}, \mathbf{s} は離散化された送受信信号のベクトル列、 I は相互情報量、 $f(\mathbf{s})$ は送信信号の確率分布、 \sup は上限値である。

Durisi等の情報理論的アプローチでは、(15)式を(16)式に組み入れ、信号電力の上限を設定した上で、 C を最大にする $u(t), T, F$ の最適化問題を解くことになる。グリッドパラメータ T と F の関係については、以下の条件を課している。

$$TF \geq 1 \quad (17a)$$

$$T / F = \tau_0 / \nu_0 \quad (17b)$$

式(17b)はグリッドマッチング則 (grid matching rule) と言われ、理論的裏付けがある[7]。

式(16)の noncoherent capacity について、数学的手段を駆使しての概念式は得られているが、実用的に役立つ閉形式の表現式には至っていない。そのため、種々の仮定を加えて上限や下限を与える式が得られているが(式表現は割愛)、それでもなお、伝搬パラメータの影響が陽に見え、かつ、簡易に計算できる式ではない[7],[8],[17],[18]。

5.2 統計的アプローチ (提案手法)

本節では、統計的アプローチを採る筆者らの提案モデル[2]を解説する。式(7)、(8)で表される周波数領域及び時間領域の相関特性の劣化は、所望波に対する干渉波成分として現れる。遅延の広がりによって劣化した信号の信号対干渉波電力比を $SIR_{delay}(\equiv \langle P_S / P_{I_{delay}} \rangle)$ 、ドップラーの広がりによって劣化した信号の電力比を $SIR_{Doppler}(\equiv \langle P_S / P_{I_{Doppler}} \rangle)$ とする。ここで P_S は、全信号成分電力 P_R のうちの干渉波成分 ($P_{I_{delay}} + P_{I_{Doppler}}$) を除いた所望波成分電力である(注1)。この干渉波成

分も雑音と同じようにランダムに振る舞うと仮定して雑音に組み入れると、通信路容量は(11b)式を拡張して、以下の形で近似できる（注2）。

$$C_{AWGN+fading} \approx W_s \log_2 (1 + SNR_e) \quad (18)$$

$$SNR_e = \left\langle \frac{P_S}{P_N + P_{I_delay} + P_{I_Doppler}} \right\rangle \approx \left(\Gamma_0^{-1} + SIR_{delay}^{-1} + SIR_{Doppler}^{-1} \right)^{-1} \quad (19)$$

(19)式は、アンダースプレッドの性質が比較的強い環境、すなわち、 $P_S \gg P_{I_delay}, P_{I_Doppler}$ で成立する。

注1： P_S が P_I より、ある程度大きいことを前提にする。 P_S を干渉波成分電力を除いた信号電力と説明しているが、モデルとしては P_S が干渉成分を含んだ全信号電力として扱える範囲を対象にしている。後述する「相関係数が1に近い部分」、あるいは「スプレッドファクタ $\alpha \leq 0.01$ 」がその範囲になる。

注2：ここでは、所望波と干渉波の高周波成分電力比を扱っているのでCIR (carrier-to-interference power ratio) に相当する量になるが、広義な意味でSN比 (SIR) と呼ぶ。

SIRは、複素振幅変動の相関係数 ρ_a 、電力変動の相関係数 ρ_p を用いて次式で求められる[1]。

$$SIR = \frac{|\rho_a|^2}{1 - |\rho_a|^2} = \frac{\rho_p}{1 - \rho_p} \quad (20)$$

図3(b),(d)に示す周波数領域および時間領域の相関係数の双方において、少なくとも通信が成立する範囲では、 $\Delta f, \Delta t$ が0付近、すなわち相関係数が1に近い部分に着目すればよい。相関係数 ρ_p を $x=0$ の付近でテイラー展開すると次式の形になる。

$$\rho_p(x) = \rho_p(0) + \rho_p'(0)x + \frac{1}{2}\rho_p''(0)x^2 + \dots \quad (21)$$

(8)式及び(10)式で定まる $\rho_p^{(delay)}$ に関し、

$$\left. \frac{\partial \rho_p^{(delay)}}{\partial \Delta f} \right|_{\Delta f=0} = \frac{1}{P_R} \left. \frac{\partial \left| \int_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} p(\tau) \exp(-j2\pi \Delta f \tau) d\tau \right|^2}{\partial \Delta f} \right|_{\Delta f=0} = 0 \quad (22)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \rho_p^{(delay)}}{\partial \Delta f^2} \right|_{\Delta f=0} = \frac{1}{P_R^2} \left. \frac{\partial^2 \left| \int_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} p(\tau) \exp(-j2\pi \Delta f \tau) d\tau \right|^2}{\partial \Delta f^2} \right|_{\Delta f=0} = -8\pi^2 \sigma_\tau^2 \quad (23)$$

であるので、 $\rho_p^{(delay)}$ は、(21)式の x を Δf として

$$\rho_p^{(\text{delay})}(\Delta f) \approx 1 - 4\pi^2 \sigma_\tau^2 \Delta f^2 \quad (24)$$

と近似できる。(式(22), (23)の導出は[1]のp.93)。

一方、(9)式で定まる $\rho_p^{(\text{Doppler})}$ についても、上記と同様に、

$$\left. \frac{\partial \rho_p^{(\text{Doppler})}}{\partial \Delta t} \right|_{\Delta t=0} = \frac{1}{P_R} \left. \frac{\partial \left| \int_{-f_D}^{f_D} S(\nu) \exp(j2\pi \nu \Delta t) d\nu \right|^2}{\partial \Delta t} \right|_{\Delta t=0} = 0 \quad (25)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \rho_p^{(\text{Doppler})}}{\partial \Delta t^2} \right|_{\Delta t=0} = \frac{1}{P_R^2} \left. \frac{\partial^2 \left| \int_{-f_D}^{f_D} S(\nu) \exp(j2\pi \nu \Delta t) d\nu \right|^2}{\partial \Delta t^2} \right|_{\Delta t=0} = -8\pi^2 \sigma_\nu^2 \quad (26)$$

となるので、 $\rho_p^{(\text{Doppler})}$ は次式になる。

$$\rho_p^{(\text{Doppler})}(\Delta t) \approx 1 - 4\pi^2 \sigma_\nu^2 \Delta t^2 \quad (27)$$

周波数相関 $\rho_p^{(\text{delay})}$ に対しては、 $\Delta f = W_e = 1/T_e$ と対応付けると、

$$\rho_p^{(\text{delay})}(1/T_e) \approx 1 - (2\pi\sigma_\tau / T_e)^2 \quad (28)$$

となる。また、自己相関 $\rho_p^{(\text{Doppler})}$ に対しては、 $\Delta t = T_e$ と対応付けると、

$$\rho_p^{(\text{Doppler})}(T_e) \approx 1 - (2\pi\sigma_\nu T_e)^2 \quad (29)$$

となる。

式(20)より、 SIR_{delay} および SIR_{Doppler} は、それぞれ次式となる。

$$SIR_{\text{delay}} \approx \frac{1 - (2\pi\sigma_\tau / T_e)^2}{(2\pi\sigma_\tau / T_e)^2} \approx \frac{T_e^2}{(2\pi\sigma_\tau)^2} \quad (30)$$

$$SIR_{\text{Doppler}} \approx \frac{1 - (2\pi\sigma_\nu T_e)^2}{(2\pi\sigma_\nu T_e)^2} \approx \frac{1}{(2\pi\sigma_\nu T_e)^2} \quad (31)$$

(30),(31)式では、共に最後の右辺式が、最も粗い近似になるが、本稿では、見通しの良い目的式を得るためにこれを採用する。二つの寄与は、(19)式より、以下の形にまとめられる。

$$\frac{1}{SIR} = \frac{1}{SIR_{\text{delay}}} + \frac{1}{SIR_{\text{Doppler}}} \approx 4\pi^2 \left(\frac{\sigma_\tau^2}{T_e^2} + \sigma_\nu^2 T_e^2 \right) \quad (32)$$

実効シンボル長 T_e は、帯域幅(= W_s)を保ったまま、任意に定めて良いので、 $1/SIR$ を最小に(すなわち SIR を最大に)する値 $T_{e, \text{opt}}$ を求めると、

$$\frac{\partial \frac{1}{SIR}}{\partial T_e} = 4\pi^2 \left(-\frac{2\sigma_\tau^2}{T_e^3} + 2\sigma_\nu^2 T_e \right) = 0 \quad (33)$$

より、 $T_{e,opt}$ および、その時の SIR の最大値 SIR_{max} は次式となる。

$$T_{e,opt} = \sqrt{\frac{\sigma_\tau}{\sigma_\nu}} \quad (34)$$

$$SIR_{max} = \frac{1}{8\pi^2\alpha} \quad (\alpha \equiv \sigma_\nu\sigma_\tau \leq 0.01) \quad (35)$$

これより、求めたい通信路容量 C は、(19),(35)式、および、帯域幅で正規化した通信路容量 (以下、正規化通信路容量と呼ぶ) C_0 を用いて、次式を得る。

$$C_{AWGN+fading} = W_s C_{0,AWGN+fading} \quad (36a)$$

$$C_{0,AWGN+fading} \approx \log_2 \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\Gamma_0} + 8\pi^2\alpha} \right) \quad [\text{bit/sec/Hz}] \quad (36b)$$

$$C_{0,fading} \left(= \lim_{\Gamma_0 \rightarrow \infty} C_{0,AWGN+fading} \right) \approx \log_2 \left(1 + \frac{1}{8\pi^2\alpha} \right) \quad (36c)$$

$C_{0,fading}$ はSN比が十分大きい場合でも、通信容量はこれ以上大きくならないと言う飽和値である。

このようにして、スプレッドファクタ α を組み入れ、シャノン式を拡張した新しい通信路容量式を得ることができた。元の式 ((11)式) が主張しているように、伝送方式にどのような工夫をしても、誤りなく伝送できるビット数は、これを越えないと言う意味である。図6は、正規化通信路容量を、スプレッドファクタをパラメータに、SN比に対して表している。スプレッドファクタの値の増加に応じて、通信路容量がより小さい値で飽和することがわかる。図には、スプレッドファクタが0.002となる移動通信環境の一例も示している。

ここで、二重選択性フェージングに耐性を有する基本信号構成を見てみよう。最適シンボル長 $T_{e,opt}$ が(24)式で決まるとき、これに対する周波数帯域幅 $W_{e,opt}$ は帯域フィルタ特性 (BT積1を想定) で決まる $W_e=1/T_e$ より、

$$W_{e,opt} = \frac{1}{T_{e,opt}} = \sqrt{\frac{\sigma_\nu}{\sigma_\tau}} \quad (37)$$

となり、伝搬パラメータとシステムパラメータが

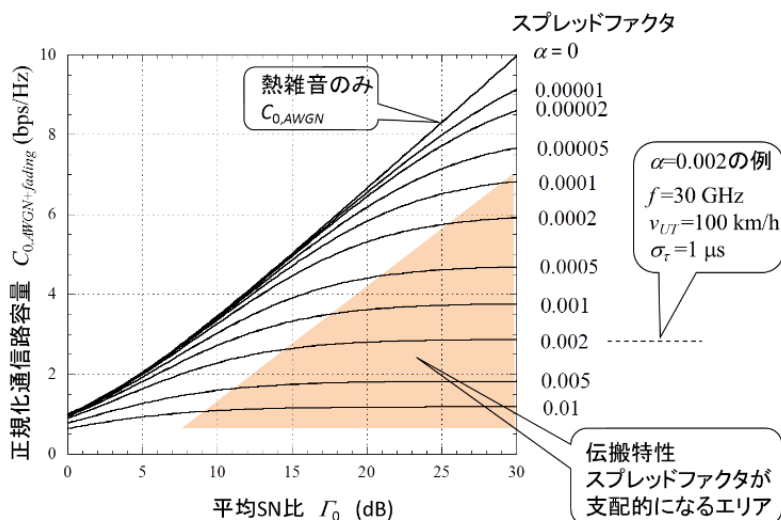


図6 スプレッドファクタをパラメータとする正規化通信路容量の SNR 特性

$$\frac{W_{e,opt}}{T_{e,opt}} = \frac{\sigma_v}{\sigma_\tau} \tag{38}$$

の簡易な形で結びつけられる。必要な帯域信号（帯域幅 W_s ）は、シンボル周期 $T_e = T_{e,opt}$ を保ったまま、周波数軸上において、 $W_{e,opt}$ を単位に W_s まで積み上げられた形になる。図7はこの関係をまとめている。なお、この信号設計は、情報理論に基づく Weyl-Heisenberg 系離散化則の結果とも符合している [17]（ただし、[17]では、スプレッドファクタの定義を、遅延とドップラーの最大差の積で与えているので、その部分が異なる）

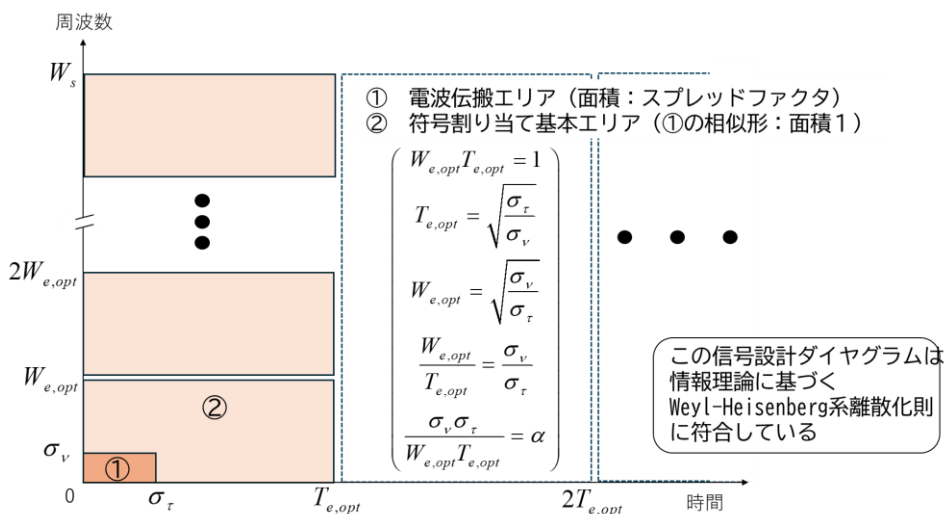


図7 伝搬パラメータとシステムパラメータの最適関係に基づく符号化の時間・周波数ダイアグラム

一例として、周波数 5GHz、移動体速度 30m/s (108km/h) (すなわち、 $f_D=500\text{Hz}$)、 $\sigma_\tau=1\mu\text{s}$ 、 $W_s=10\text{MHz}$ ($T_s=0.1\mu\text{s}$) を考える。到来方向の角度分布を水平面で一様と仮定する (いわゆる Jakes モデル) と、 $\sigma_v=354\text{Hz}$ になる。最適に変換された符号は、 $T_{e,opt}=53\mu\text{s}$ 、 $W_{e,opt}=19\text{kHz}$ となる。マルチキャリア伝送 (OFDM) であれば、約 500 サブキャリア ($\approx W_s/W_{e,opt}$) で構成されることになる。

6. シャノン限界に迫る信号設計

前節では、SN比を定めてそれに対する通信路容量を議論してきた。通信路容量の基本式(11b)の形からもわかるように、SN比が十分高いところ ($P_S/P_N \gg 1$) では、SN比の増加に対して通信路容量は対数的にしか増加しない。SN比に比例するように通信路容量を増やすことはできないのだろうか。

まずは帯域幅 W_s と信号電力 P_S と通信路容量の関係を見るために、熱雑音のみの式(11b)に着目する。この式のうち、雑音電力 P_N は受信機の性能 (雑音指数など) によって決まり、信号帯域幅 W_s (この場合は受信フィルタの帯域幅) と 1Hz 当たりの雑音電力 P_{N0} により、雑音電力 P_N は $W_s P_{N0}$ である。故に、(11b)式は次式で表される。

$$C_{AWGN} = W_s \log_2 \left(1 + \frac{P_S}{W_s P_{N0}} \right) \quad (39)$$

P_S を一定に保ったまま帯域幅 W_s だけを拡げてゆくと通信路容量は徐々に増加して行き、その極限において、

$$C_{AWGN,max} \equiv \lim_{W_s \rightarrow \infty} C_{AWGN} = \frac{1}{\log_e 2} \frac{P_S}{P_{N0}} \quad (40)$$

となり、信号電力に比例する通信路容量が得られる。

図 8 は、(39)式で与えられる通信路容量 C_{AWGN} と帯域幅の関係を、 P_S/P_{N0} をパラメータに表している。(図には点線で $C_{AWGN+fading}$ の線も入っているがこの説明は後で)。図で、 $W_s = P_S/P_{N0}$ の位置を示す赤丸に対して、左側エリア ($W_s \ll P_S/P_{N0}$) は通信路容量が主に帯域幅に支配されている領域 (帯域幅制限領域)、右側エリア ($W_s \gg P_S/P_{N0}$) は信号電力に支配されている領域 (信号電力制限領域) になる。図より、帯域幅 W_s に対する飽和領域は、 P_S/P_{N0} の 10 倍程度の値になればよく、図で薄く影をつけた右下部分が電力制限領域である。

同じことを、二重選択性フェージング環境での通信路容量を表す(36)式について見てみよう。この場合、(39)式に対応する通路容量は次式になる。

$$C_{AWGN+fading} \approx W_s \log_2 \left(1 + \frac{1}{\frac{W_s P_{N0}}{\langle P_S \rangle} + 8\pi^2 \alpha} \right) \quad (41)$$

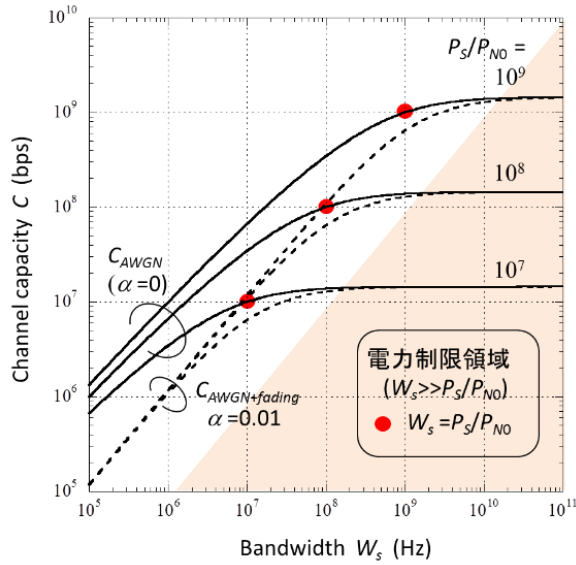


図8 熱雑音に対する通信路容量 (C_{AWGN} : 実線) と二重選択性フェージングの通信路容量 ($C_{AWGN+fading}$ ($\alpha=0.01$): 点線) の信号帯域幅 W_s に対する特性

この場合も、帯域幅を十分大きくすると、二重選択性フェージングによる干渉雑音電力が熱雑音電力より小さくなるので、その極限においては。

$$\begin{aligned}
 C_{AWGN+fading, \max} &\equiv \lim_{W_s \rightarrow \infty} C_{AWGN+fading} \\
 &= \frac{1}{\log_e 2} \frac{P_S}{P_{N0}} = C_{AWGN, \max}
 \end{aligned} \tag{42}$$

となって、電波伝搬による劣化は消えたことになる。

これを満たすための拡大帯域幅を W_{spread} と置くと、先の熱雑音条件と、上記のフェージング干渉波条件 (熱雑音電力 > 干渉成分電力) により、以下に整理される。

$$W_{spread} \geq \begin{cases} 10P_S / P_{N0} & (\text{熱雑音条件}) \\ 8\pi^2 \alpha P_S / P_{N0} & (\text{フェージング条件}) \end{cases} \tag{43}$$

前述のように、(36)式は $\alpha \leq 0.01$ に適用できる近似式であるので、(43)式の右辺の上下を比べると、熱雑音条件がフェージング条件を含んでいることが分かる。このことは、図8に点線で加えた $\alpha=0.01$ に対する通信路容量の特性からも見て取ることができる。

信号電力一定の下、通信容量を大きくするには、帯域幅を W_{spread} まで広げなさい、すなわち低電力密度にして、信号電力制限エリアで働かせなさいと言うことである。この通信形態は少ない情報量を広帯域信号にして送るスペクトル拡散通信をイメージすると良いであろう (ただし、シャノンの通信路容量の式では、最適に符号化したらと言う条件であり具体的な通信方式は問わない)。信号電力に応じて、故意に帯域幅を広げるわけであるから、周波数有効利用の観点では、

それが弱点になる。多重化方式であるCDMあるいは多元接続のCDMAのように、直交多重化すれば、周波数有効利用がはかれるはずである。あるいは、いっそのこと、思いっきり帯域を広げ、微弱電力密度になるようにすれば、干渉問題が免れるかもしれない（例えば、[19]）。そうしたい場合、超高速信号処理、微弱電波検出、超広帯域アンテナなど検討課題が多いことは確かである。図9は周波数拡散による低電力密度伝送の仕組みをまとめている。

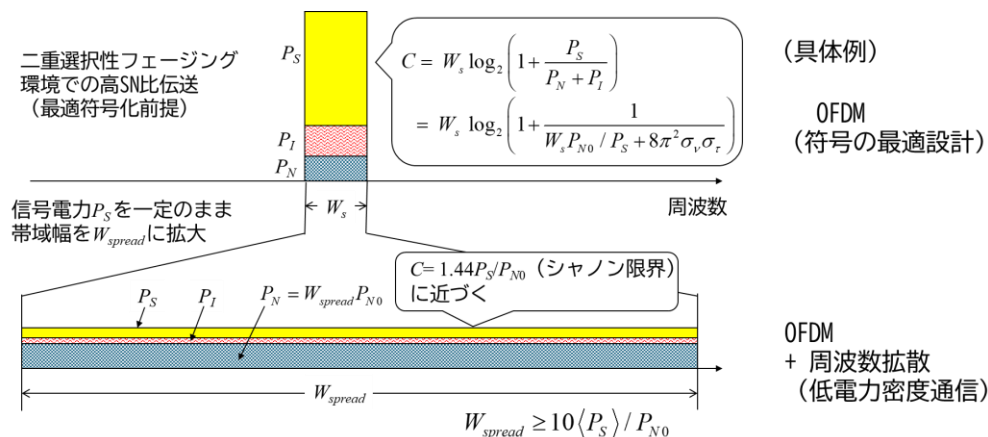


図9 二重選択性フェージング下での高SN比伝送（上部）と帯域拡散後の低電力密度伝送（下部）及びそれらが実現する通信路容量

参考文献

[1] 唐沢好男, 改訂: デジタル移動通信の電波伝搬基礎, コロナ社, 2016.03.

[2] Y. Karasawa, "A simple formula for noncoherent capacity in highly underspread WSSUS channels," *IEICE Trans. Commun.*, vol. E101-B, no. 5, pp. 1262-1269, 2018.

[3] 唐沢好男, 無線通信物理理想技術へのアプローチ, コロナ社, 2021.08.

[4] 唐沢好男, "ワイヤレス情報伝送の物理限界を探る," 信学技報, AP2025-227. 2026.03.
 (発表スライド: http://www.radio3.ee.ucc.ac.jp/ronbun/2026-03_AP-ken_Karasawa.pdf)

[5] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication," *Bell System Technical Journal*, 27, 379-423 & 623-656, July & October, 1948.

[6] E. Biglieri, J. Proakis, and S. Shamai (Shitz), "Fading channels: Information theoretic and communications aspects," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 44, no. 6, pp. 2619-2692, October 1998.

[7] G. Durisi, U. G. Schuster, H. Bölcskei, and S. Shamai (Shitz), "Noncoherent capacity of underspread fading channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 56, no. 1, pp. 367-395, 2010.

[8] G. C. Ferrante, T. Q. S. Quek, and M. Z. Win, "Revisiting the capacity of noncoherent fading channels in mmWave system," *IEEE Trans. Commun.*, May 2016. (DOI 10.1109/TCOMM.2016.2565586).

[9] P. A. Bello, "Characterization of randomly time-variant linear channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 11, no. 4, pp. 360-393, 1963.

[10] P. A. Bello, "Measurement of random time-varying linear channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-15, no. 4, pp. 469-475, 1969.

[11] J. G. Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill, New York, NY, U.S.A., fourth edition, 2001.

[12] R. S. Kennedy, *Fading Dispersive Communication Channels*, Wiley, New York, NY, U.S.A., 1969.

[13] R.H. Clarke, "A statistical theory of mobile-radio reception," *Bell Sys. Tech. Jour.*, July-August, pp. 957-1000, 1968.

[14] I. E. Telatar and D. N. C. Tse, "Capacity and mutual information of wideband multipath fading channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 46, no.4, pp. 1384-1400, July 2000.

[15] A. Lapidoth, "On the asymptotic capacity of stationary Gaussian fading channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 51, no. 2, pp. 437-446, February 2005.

[16] M. Médard and R. G. Gallager, "Bandwidth scaling for fading multipath channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 48, no. 4, pp. 840-852, April 2002.

- [17] G. Durisi, V. I. Morgenshtern, H. Bolcskei, U. G. Schuster, and S. Shamai (Shitz), *Information Theory of Underspread WSSUS Channels*, 2011, pp. 65–116. [Online]. Available: http://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/local_139143.pdf.
- [18] S. Herbert, I. Wassell, and T. H. Loh, "A simple recursively computable lower bound on the noncoherent capacity of highly underspread fading channels," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 15, no. 6, pp. 3964-2978, June 2016.
- [19] J. Nakazato, D. Okuyama, Y. Morimoto, and Y. karasawa, "Frequency-domain differential coding schemes under frequency-selective fading environment in adaptive baseband radio," *IEICE Trans., Commun.* vol. E99-B, no. 2, pp. 488-498, 2016.