

最大比合成ダイバーシチ適用時の符号間干渉誤り推定

～電波伝搬視点からのデジタル伝送特性解析 [IV]～

唐沢 好男

本レポートは、同シリーズの [YK-001](#), [YK-003](#), [YK-010](#) の姉妹編であり
日本学術会議 URSI-F 会合 622 回 (2018.03.19) の発表内容を論文形式に
まとめたものである。

1. はじめに

本稿では、電波伝搬的視点からのデジタル伝送特性解析の第四弾(*)として、最大比合成ダイバーシチ適用時の符号間干渉推定モデルを示す (*第一～三弾は文献[1]～[3])。ここで提示する推定モデルは、BER マップ利用と言う計算の段取りに手間暇かかる部分があり、必ずしも実用的ではない。しかしながら、その結果の意味を肌感覚で理解したいと言う場合、すなわち、原因である電波伝搬と結果であるデジタル伝送特性の物理的な結びつきを知りたい場合において、本稿で述べる推定法はおおいに役立つものと確信している。(また、得られた式もきわめて簡易)。

広帯域信号の伝送においては、マルチパスによる遅延量のばらつきによる符号間干渉が伝送誤りの原因になる。符号間干渉によるビット誤り率を定量的に求めることは、電波伝搬と通信方式が複雑に関連していて容易ではない[4]-[6]。筆者等は、遅延広がりとドップラー広がりが共に存在する環境において同期はずれ誤りを引き起こす再生クロックのサイクルスリップ現象の解析のために、独自の伝搬モデル：等価伝送路モデル (Equivalent Transmission-Path モデル) を編み出し[7],[8]、これを応用して、仲上・ライスフェージング環境での符号間干渉誤りの推定法を構築している[9]-[11]。このモデルについては文献[12]で、また、その基本思想を含めた詳細については文献[1]で解説している。このモデルによって、電波伝搬と通信方式の普遍的な結びつきが明らかになり、また、定量的評価の手段を得ている。

本稿では、仲上・ライスフェージングの極限に位置づけられるレイリーフェージングを対象に、最大比合成ダイバーシチ適用時の符号間干渉誤りを推定するための伝搬モデルを構築する。このモデル化では、等価伝送路モデルをベースとし、物理に裏打ちされた汎用的な取り組みを行う。

なお、筆者等は以前に、OFDM のガードインターバルを超えて遅延の広がりがある環境、すなわち、不完全サイクリックプレフィックス状態での符号間干渉誤りの解析を行い[13]、そのダイバーシチ合成についても取り組んできた[14]。しかし、最大比合成ダイバーシチのモデリングにおいては OFDM 特有の難しさ (あるいは不思議なところ) があり、理論モデルの完成には至っていなかった。そこで、原点に戻って、基本であるシングルキャリア伝送での最大比合成ダイバーシチのモデル化に取り組んでみようと思ったのが本検討の動機である。

2. レイリーフェージング環境での最大比合成ダイバーシチの2波モデル近似の妥当性

3節において、本稿の主題である最大比合成ダイバーシチ適用時の符号間干渉誤りの解析モデルを示す。本節では、この前提となる2波モデル近似の妥当性根拠を、計算機シミュレーション評価によって示す。すなわち、二段階アプローチにおける、その一段目である。

2. 1 符号間干渉存在下での最大比合成

アレーアンテナ受信による広帯域情報伝送の受信信号ベクトル $\mathbf{y}(t)$ は以下で与えられる。

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t) \otimes s(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

ここで、 $s(t)$ は送信信号、 $\mathbf{n}(t)$ は雑音ベクトル、記号 \otimes は畳み込み積分、 $\mathbf{h}(t)$ は伝搬路のインパルス応答ベクトルであり、それぞれのベクトルは、アレー素子数 N に対して以下で定義される（式中の上付き文字 T は転置を表す）。

$$\mathbf{y} \equiv (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_N)^T$$

$$\mathbf{n} \equiv (n_1 \ n_2 \ \dots \ n_N)^T$$

$$\mathbf{h} \equiv (h_1 \ h_2 \ \dots \ h_N)^T$$

インパルス応答はマルチパス伝搬での遅延波の集まりであり、時間を遅延時間 τ に置き換えて、以下で表される。

$$\mathbf{h}(\tau) = \sum_{i=1}^L \mathbf{a}_i \delta(\tau - \tau_i) \quad (2)$$

$$\mathbf{a}_i \equiv (a_i^{(1)} \ a_i^{(2)} \ \dots \ a_i^{(N)})^T$$

パスの数を L 、それぞれの素波 (i) の複素振幅（中心周波数：等価低域通過系表現では $f=0$ における）を a_i 、遅延量を τ_i としている。 δ は Dirac のデルタ関数である。周波数の関数で与えられる伝達関数ベクトル $\mathbf{T}(f)$ はインパルス応答のフーリエ変換として次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(f) \left(\equiv (T_1 \ T_2 \ \dots \ T_N)^T \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \\ &= \sum_{i=1}^L \mathbf{a}_i \exp(-j2\pi f\tau_i) \end{aligned} \quad (3)$$

本稿では、アレーアンテナ（素子数 N ）を用いた最大比合成ダイバーシチを対象とする。ブランチ間の変動は無相関のレイリーフェージングを考える。符号間干渉誤りのみを調べるため、熱雑音の影響は無視する（本稿の最後に、熱雑音を加えた総合的な BER を示している）。受信信号ベクトル \mathbf{y} に対する最大比合成ウェイトベクトル \mathbf{w} は狭帯域の場合と同じで、それぞれの伝達関数ベクトル $\mathbf{T}(0)$ に比例する次式の係数を与える。

$$\mathbf{w} \left(\equiv (w_1 \ w_2 \ \dots \ w_N)^T \right) = \mathbf{T}(0) / w_0 = \sum_{i=1}^L \mathbf{a}_i / w_0 \quad (4)$$

$$w_0 = \|\mathbf{T}(0)\| = \sqrt{\sum_{n=1}^N \left| \sum_{i=1}^L a_i^{(n)} \right|^2}$$

各素波は同じ遅延波毎に合成され、その受信信号 $z(t)$ は次式で表される。

$$z(t) = \mathbf{w}^H \{ \mathbf{h}(t) \otimes s(t) + \mathbf{n}(t) \} \quad (5)$$

実際には、シンボル周期 T_s でサンプリングされて復調・復号されるので、上式は離散化され、 k 番目のサンプリング信号は

$$\hat{z}(k) = \mathbf{w}^H \left(\sum_{i=1}^L \mathbf{a}_i \hat{s} \left\{ k + (t_{\text{sampling}} - \tau_i) / T_s \right\} + \hat{\mathbf{n}}(k) \right) \quad (6a)$$

$$\hat{s} \left\{ k + (t_{\text{sampling}} - \tau_i) / T_s \right\} = \sum_{l=-3}^3 u(lT_s + t_{\text{sampling}} - \tau_i) d(l+k) \quad (6b)$$

で表される。 t_{sampling} は、シンボル周期内のサンプルタイミング位置、 $\hat{z}, \hat{\mathbf{n}}$ は連続信号 z, \mathbf{n} の kT_s でのサンプリングされた信号、上付き文字 \mathbf{H} は複素共役転置である。 \hat{s} はサンプルタイミング時の送信信号成分で、 d は送信シンボル系列、 u はナイキストフィルタ（今回の検討ではロールオフファクタ 0.5 の 2 乗余弦形フィルタ）特性で、符号間干渉の影響が及ぶ前後 3 シンボル（＝合計 7 シンボル）分を考慮している。

ナイキストフィルタによって帯域制限された受信信号復調時のサンプルタイミング t_{sampling} （＝再生クロック信号の位相を与える）は次式である[7]。

$$t_{\text{sampling}} = \frac{T_s}{2\pi} \tan^{-1} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^L b_i^2 \sin(2\pi\tau_i / T_s) + 2 \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=i+1}^L b_i b_j \cos(\psi_i - \psi_j) \sin(\pi(\tau_i + \tau_j) / T_s)}{\sum_{i=1}^L b_i^2 \cos(2\pi\tau_i / T_s) + 2 \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=i+1}^L b_i b_j \cos(\psi_i - \psi_j) \cos(\pi(\tau_i + \tau_j) / T_s)} \right\} \quad (7)$$

$$b_i = |\mathbf{w}^H \mathbf{a}_i| \quad \psi_i = \arg(\mathbf{w}^H \mathbf{a}_i)$$

ここで、 b_i は遅延 τ_i の素波を合成した成分の振幅、 ψ_i は位相である。この計算によって、サンプルタイミング T_{sampling} は $\pm T_s/2$ の範囲に落とし込まれるので、BER 評価に際しては、サイクルスリップ（送信信号系列と受信信号系列が 1 シンボルずれる現象[7],[12]）になっている場合がある。このため、シミュレーション時には、このタイミングの前後 1 シンボル、すなわち、 $T_{\text{sampling}} \pm T_s$ を加えた 3 つのケースでの BER を求め、その最小値を選ぶ。

2. 2 第一ステップ：2波モデル近似とその妥当性

2. 2. 1 2波モデル近似

筆者等は、広帯域信号の伝送において遅延の広がり起因する符号間干渉誤りの評価モデルとして、等価伝送路モデル (Equivalent Transmission-Path (ETP) モデル) を編み出している[1],[12]。等価伝送路モデルでは、仲上・ライスフェージング環境を対象にしており、本稿で取り扱うレイリーフェージングはそれに含まれる。等価伝送路モデルの基本は、任意のインパルス応答を遅延差 $\Delta\tau$ の2波モデルで表すこと。一旦、2波モデルに表すことができれば、あらかじめ用意している BER のデータベースからその値を読み取るという仕組みである。この BER データは、2波の振幅比と位相差でテーブル化されているため、筆者等はこれを BER マップと呼んでいる。

レイリーフェージングの場合の2波モデルは、以下のように作成する。

- ① 統計的な環境表現である遅延プロファイルから、平均遅延 τ_m と遅延スプレッド σ_τ を求める。
- ② 平均遅延 τ_m を中心とする $\pm\sigma_\tau$ の位置に2波 a_{e1} (先行波) と a_{e2} (遅延波) を置く。2波の遅延間隔 $\Delta\tau_e$ は

$$\Delta\tau_e = \frac{\tau_m^2 + \sigma_\tau^2}{\tau_m} = 2\sigma_\tau \quad (\tau_m = \sigma_\tau) \quad (8)$$

である。仲上・ライスフェージングの場合は、直接波の遅延量を基準 (=0) としてモデル化するが、レイリーフェージングの場合、遅延の値そのものは意味を持たない。このため、 $\tau_m = \sigma_\tau$ となるように各素波の遅延量を定めれば、2波のうちの先行波は $\tau=0$ 、遅延波は $\tau=2\sigma_\tau = \Delta\tau_e$ に置かれる。このように置くことによって、先行波と遅延波のそれぞれの平均電力： P_{e1} と P_{e2} は等しくなる。以下では、この設定を採用する。

- ③ 先行波と遅延波の複素振幅 a_{e1} と a_{e2} は以下で定められる[12]。

$$\mathbf{a}_{e1} \left\{ \equiv \left(a_{e1}^{(1)} \quad a_{e1}^{(2)} \quad \dots \quad a_{e1}^{(N)} \right)^T \right\} = \sum_{i=1}^L \mathbf{a}_i - \frac{\sum_{i=1}^L \mathbf{a}_i \tau_i}{\Delta\tau_e} \quad (9a)$$

$$\mathbf{a}_{e2} \left\{ \equiv \left(a_{e2}^{(1)} \quad a_{e2}^{(2)} \quad \dots \quad a_{e2}^{(N)} \right)^T \right\} = \frac{\sum_{i=1}^L \mathbf{a}_i \tau_i}{\Delta\tau_e} \quad (9b)$$

図1は、上述のモデル化をまとめている。

次に、2波モデルでの最大比合成を、図2により説明する。

- ④ 上記①～③によって定められた瞬時環境表現の2波モデルのそれぞれに、(4)式で与えられるウェイトベクトル \mathbf{w} を掛けて合成し、遅延差 $\Delta\tau_e$ の2波モデルを作る。このとき、ウェイトベクトル \mathbf{w} は、2波モデルの複素振幅を用いて以下のようにも表される ($\|\cdot\|$ はノルム)。

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^L \mathbf{a}_i / w_0 = \frac{\mathbf{a}_{e1} + \mathbf{a}_{e2}}{\|\mathbf{a}_{e1} + \mathbf{a}_{e2}\|} \quad (10)$$

最大比合成された2波モデルのインパルス応答 h_e は以下である。

$$h_e(\tau) = c_1\delta(\tau) + c_2\delta(\tau - \Delta\tau_e) \quad (11)$$

$$c_1 = \mathbf{w}^H \mathbf{a}_{e1} \quad c_2 = \mathbf{w}^H \mathbf{a}_{e2}$$

⑤ 2波の振幅と位相関係を表す諸量を以下で定義する。

$$(\text{振幅} \cdot \text{位相}) \quad r_{1,2} \equiv |c_{1,2}|, \quad \phi_{1,2} \equiv \arg(c_{1,2}),$$

$$(\text{振幅比}) \quad r \equiv |c_2 / c_1| = r_2 / r_1, \quad x \equiv 20 \log_{10} r,$$

$$(\text{位相差}) \quad \phi \equiv \arg(c_2 / c_1) = \phi_2 - \phi_1 \quad (12)$$

正規化遅延差 $\Delta\tau/T_s$ を固定して、振幅比 r の dB 値 x と位相差 ϕ に対して、変復調方式毎に予めデータベース化されている BER フロア値: $P_0(x, \phi, \Delta\tau)$ のテーブル (BER マップ) を参照し、その環境での BER フロア値を読み取る。図3は同期検波 QPSK (CQPSK) で、 $\Delta\tau/T_s=0.2$ のときの BER マップである (横軸分解能 0.1dB、縦軸分解能 1° として計算機シミュレーションにより求めた BER 値: P_0 の等高線表示)。【BER マップの特徴とその作り方は3.4節①、および、付録1にまとめている】

⑥ ①で定めた遅延プロファイルの下での瞬時環境を乱数により繰り返し生成し、その都度、BER マップから P_0 を読み出す。それを平均して BER: $P_e(\sigma_\tau; N)$ を求める。

⑦ 2.1節で述べた方法によるシミュレーションを行って比較し、2波モデル近似の妥当性を確認する。

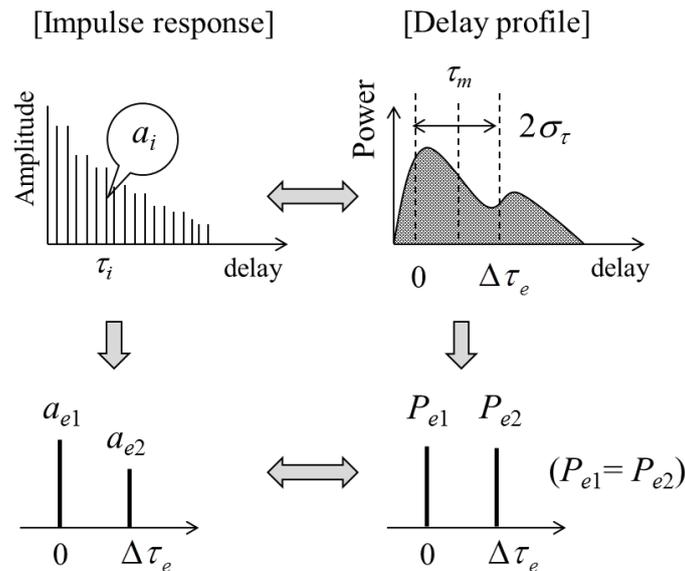


図1 マルチパス環境の瞬時環境表現 (インパルス応答) と統計的環境表現 (遅延プロファイル)、およびそれらの2波モデル表現

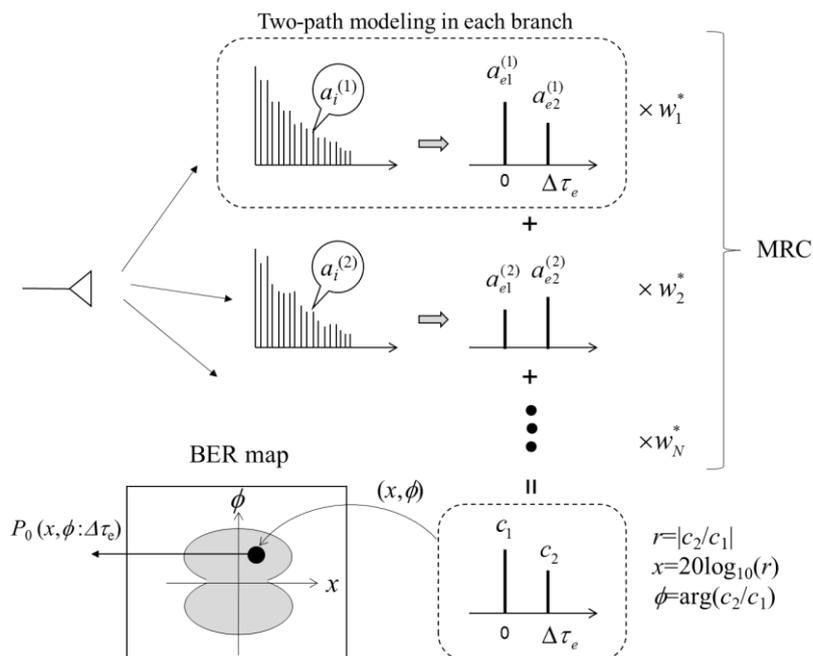


図2 マルチパス信号の最大比合成とそのモデル化

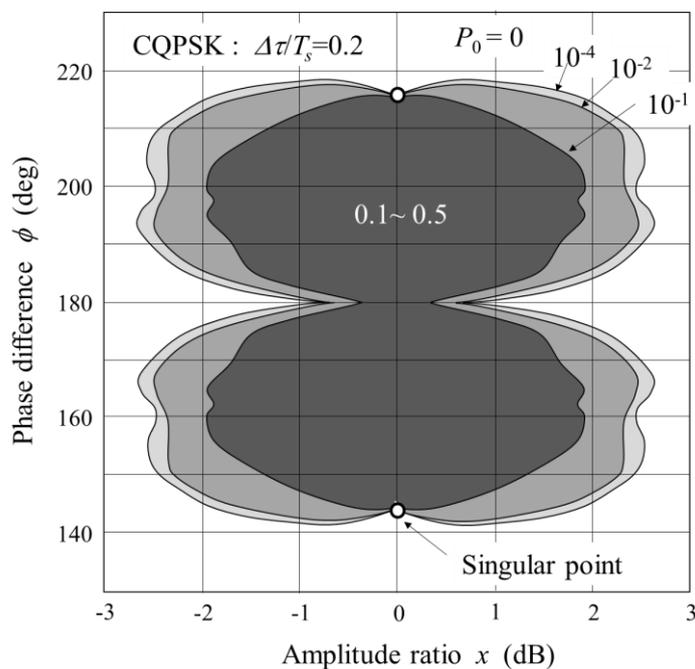


図3 BER マップの一例 : CQPSK, $\Delta\tau/T_s=0.2$ (計算機シミュレーションにより作成)
 (図中の○は今回の解析には何も関係しないが、サイクルスリップの現象に現れる特異点 (singular point) [7])

2. 2. 2 2波モデル近似の妥当性

ナイキストフィルタにより波形整形された送信信号 (QPSK 信号等) をパス毎に遅延させ、合成された受信信号を復調する計算機シミュレーションによる方法 (2. 1 節で述べた方法) と、マルチパス環境のみをシミュレーションと共通しにして、(9)式で2波モデルを作り、この振幅比と位相差から、事前に作成されてテーブル化されている BER マップの値を読みに行く方法 (前項で述べた方法) の結果を比較して、2波モデル近似の妥当性を調べる。単一アンテナ対向 (Single-Input Single-Output: SISO) の場合については、既に文献[9]~[11]により、2波近似の妥当性が調べられているので、本稿での評価は、それが、最大比合成ダイバーシチについてもそのまま適用できるかどうかである。

この評価のためのマルチパス環境は、次式で与えられる打ち切り形の指数関数遅延プロファイルを用いている。

$$p(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^L \exp(-(i-1)d\tau / \tilde{\sigma}_\tau) \delta(\tau - \tau_i)}{\sum_{i=1}^L \exp(-(i-1)d\tau / \tilde{\sigma}_\tau)} \quad (13)$$

式中のパラメータ： $\tilde{\sigma}_\tau$ は、遅延スプレッド σ_τ の環境を実現したいとき、打ち切り形であることによつてずれてしまう遅延スプレッドの値を設定値に戻す補正を行った仮の遅延スプレッドである。遅延プロファイルは、インパルス間隔 $d\tau$ を $0.01T_s$ にし、遅延波数 L を100としている。すなわち、遅延波生成範囲を $0 \sim 0.99T_s$ に設定している。この場合、 $\sigma_\tau = 0.1, 0.15, 0.2, 0.25T_s$ に対して、 $\tilde{\sigma}_\tau = 0.1, 0.155, 0.234, 0.41T_s$ になる ($\sigma_\tau = 0.3T_s$ は、この遅延波生成範囲では設定できない)。平均電力がこのプロファイルに従うよう乱数でインパルス応答 (複素正規分布) を決め、1インパルス応答当たり 200 ビット伝送し、これを乱数を変えて多数回繰り返す。(BER 測定では、1,000,000 回 ; ビット数では 2×10^8 個)。

2波モデル近似では、シミュレーションと同じインパルス応答を使い、2波モデルに変換して振幅比と位相差を求めた後、それに対応する BER マップから BER の値 P_0 を読み取っている (設定インパルスの数分の平均)。

図4は、CQPSK で $\sigma_\tau/T_s = 0.1$ と 0.2 について、シミュレーション結果と2波モデル変換後の結果を比較している。両図より、きわめてよい一致が見られ、最大比合成においても、図2で示した変換方法の妥当性が確認できた。これにより、次章でのモデル化では、遅延スプレッドが与えられた環境下での、最大比合成後の2波モデルにおける振幅比・位相差の結合確率分布 $f_{r,\phi}(r,\phi)$ が求められれば良い、ということになる。

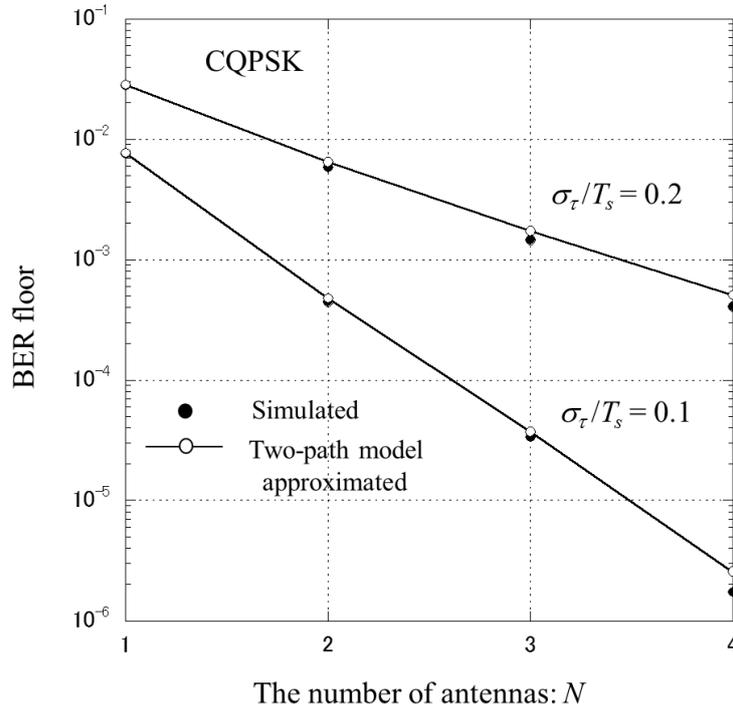


図4 ダイバーシチ効果の2波モデル近似とシミュレーション結果の比較（最大比合成ダイバーシチ解析に2波モデル近似を用いることの妥当性の根拠を示す図）

3. 最大比合成ダイバーシチのモデリング

3.1 基本的な考え方

前節の評価結果により、ダイバーシチのモデリングにおいては、単一アンテナ対向の通信モデルで確立した BER フロア値推定の基本式（文献[12]の式(10.32)）をそのまま拡張して、符号間干渉による BER の平均値 P_e は以下の式で与えられることの根拠を得た。

$$P_e(\sigma_\tau, N) (\equiv \langle P_0 \rangle) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f_{r\phi}(r, \phi; N) P_0(r, \phi; \Delta\tau_e / T_s) d\phi dr \quad (14)$$

ここで、 $f_{r\phi}$ は伝搬環境を2波モデルで表すときの振幅比 r と位相差 ϕ の結合確率分布である。

文献[10]で示したように、あるいは本稿の付録1で詳しく述べるように、振幅比 r の dB 値 x と位相差 ϕ で表された BER の分布図には、点 $(x=0, \phi=\pi)$ を中心として、その形状が $\Delta\tau$ の大きさに比例する近似（相似性）が成立する（目安として $\Delta\tau < 0.6T_s$ で）。この性質を利用すると、異なる $\Delta\tau$ に対する BER マップは、基準とする BER マップ ($\Delta\tau_{ref}$) からスケーリング操作によって得ることができ、一つの変復調方式に対して一つだけ準備すればよいことになる。（筆者等は $\Delta\tau_{ref} = 0.2T_s$ のマップを基準に用いている）。変数 x に対する BER マップの正負の対称性と誤り発生分布の相似性により、式(14)の変数 r を x に変換して、以下のように書き換えるのが実用的である。

$$P_e(\sigma_\tau, N) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f_{x\phi}(x, \phi; N) P_{0_ref}(x/\eta, (\phi - \pi)/\eta + \pi) d\phi dx \quad (15a)$$

ここで

$$\eta \equiv \Delta\tau_e / \Delta\tau_{ref} \quad (15b)$$

$$P_{0_ref}(x, \phi) = P_0(x, \phi; \Delta\tau_{ref} / T_s) \quad (15c)$$

$$f_{x\phi}(x, \phi) = \frac{1}{b} \exp\left(\frac{x}{b}\right) f_{r\phi}\left(\exp\frac{x}{b}, \phi\right), \quad (b \equiv 20 \log_{10} e = 8.686) \quad (15d)$$

良いモデル（推定法）が得られるかどうかは、電波伝搬環境の特徴を表す結合確率分布 $f_{r\phi}$ （あるいは $f_{x\phi}$ ）の定式化の成否にかかっている。モデル化の全てを厳密な理論で構成するのは、きわめて困難なことと予想される。そのような際には、シミュレーション実験を行って法則性を探り、その法則を取り入れた定式化を試みることにする。結合確率分布 $f_{r\phi}$ の導出に際しては、先に振幅比の分布 f_r を求め、次に、振幅 r に対する条件付確率分布 $f_\phi(f|r)$ を求めてゆく手順を採る。

$$f_{r\phi}(r, \phi) = f_r(r) f_\phi(\phi|r) \quad (16)$$

BER マップからわかるように誤りの発生は非常に限られた領域に集中しており、振幅比分布については、 $r=1$ （すなわち $x=0$ ）を中心とした中央値付近が正確に、位相差分布については $\phi=\pi$ を中心とした分布の端部分が正確であればよいと理解できる。

3. 2 振幅比の確率分布: f_r

等価伝送路モデルで表されるそれぞれの2波 ($\mathbf{a}_{e1}, \mathbf{a}_{e2}$ の各要素) の振幅 $r_i (i=1, 2)$ の確率分布は次式で与えられるレイリー分布になる。

$$f_R(r_i; \sigma^2) = \frac{r_i}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}\right) \quad (17)$$

ここで、 $2\sigma^2$ は平均電力である (σ^2 を平均電力と呼ぶ定義もある)。

2波モデルでの先行波の振幅分布は $f_1 \equiv f_R(r_1; P_{e1}/2)$ 、遅延波は $f_2 \equiv f_R(r_2; P_{e2}/2)$ となる。それぞれの波は独立に変動する。

2波の平均電力の比 γ を以下で定義する。

$$\gamma \equiv P_{e2} / P_{e1} \quad (18)$$

$\gamma=0$ の場合は、通常最大比合成であり、合成後の振幅 r_0 の確率分布は次式の仲上 m 分布 $f_{Nm}(r_0; m, \Omega)$ になる。

$$f_{Nm}(r_0; m, \Omega) = \frac{2m^m}{\Omega^m \Gamma(m)} r_0^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} r_0^2\right) \quad (19a)$$

$$\Omega = \langle r_0^2 \rangle, \quad m = \frac{\langle r_0^2 \rangle^2}{\langle r_0^4 \rangle - \langle r_0^2 \rangle^2} \geq \frac{1}{2} \quad (19b, c)$$

ここで、 Γ はガンマ関数である。

パラメータ m はダイバーシチオーダに対応し、独立なレイリー分布の合成の場合は、ブランチ数 (=アンテナの本数) N になる。

式(10), (11)から明らかのように、 $\gamma \neq 0$ の場合には、不完全なダイバーシチ合成になって、厳密な取り扱い是非常に複雑になる。同様な問題は、文献[15]での解析があり、中央値付近の確率分布に対しては仲上 m 分布への近似で十分な精度を得ている。この場合、合成信号の確率分布は、

$$\text{先行波 } f_1 = f_{Nm}(r_1; m_1, \Omega_1) \quad (20a)$$

$$\text{遅延波 } f_2 = f_{Nm}(r_2; m_2, \Omega_2) \quad (20b)$$

となる。

それぞれのパラメータ値は、以下のように定められる。(この導出は文献[15]の本文中や文献[12]の付録5の(1)に示されているが、本稿パラメータ γ との対応が陽に現れた書き方になっていないので、本稿付録2にまとめている)。

$$\Omega_1 = \frac{N + \gamma}{1 + \gamma} P_{e1} \quad (21a)$$

$$m_1 = \frac{(N + \gamma)^2}{N + 2\gamma N + \gamma^2} \quad (21b)$$

$$\Omega_2 = \frac{1 + \gamma N}{1 + \gamma} P_{e2} \quad (21c)$$

$$m_2 = \frac{(\gamma N + 1)^2}{\gamma^2 N + 2\gamma N + 1} \quad (21d)$$

それぞれの合成された振幅 r_1 と r_2 の変動が独立であるとする【脚注】、振幅比 $r (=r_2/r_1)$ の分布は以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned} f_r(r) &= \int_0^\infty f_1(t) f_2(rt) dt \\ &= A r^{2m_2-1} \int_0^\infty t^{p-1} \exp(-qt^2) dt \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、

$$A \equiv \frac{4m_1^{m_1} m_2^{m_2}}{\Gamma(m_1) \Gamma(m_2) \Omega_1^{m_1} \Omega_2^{m_2}}, \quad p \equiv 2(m_1 + m_2), \quad q \equiv \frac{m_1}{\Omega_1} + \frac{m_2}{\Omega_2} r^2$$

である。積分公式

$$\int_0^{\infty} t^{p-1} \exp(-qt^2) dt = \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) / (2q^{p/2}) \quad (23)$$

を用いて整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} f_r(r) &= \frac{2m_1^{m_1} m_2^{m_2} \Gamma(m_1 + m_2) \Omega_1^{m_2} \Omega_2^{m_1} r^{2m_2-1}}{\Gamma(m_1) \Gamma(m_2) (m_1 \Omega_2 + m_2 \Omega_1 r^2)^{m_1+m_2}} \\ &= \frac{2\Gamma(m_1 + m_2) \lambda^{m_1} r^{2m_2-1}}{\Gamma(m_1) \Gamma(m_2) (\lambda + r^2)^{m_1+m_2}} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\lambda \equiv \frac{\Omega_2 m_1}{\Omega_1 m_2}$$

今回のモデル化では、 $P_{e1}=P_{e2}$ に設定しており、すなわち $\gamma=1$ であるので、式(21)は

$$m_1 = m_2 = \frac{(N+1)^2}{3N+1} \equiv m \quad (25a)$$

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \frac{N+1}{2} P_{e1} \equiv \Omega \quad (25b)$$

となって、 $\lambda=1$ であるので、式(24)の f_r や式(15)での変換で得られる f_x はさらに簡単化されて、次式になる。

$$f_r(r) = \frac{2\Gamma(2m)r^{2m-1}}{\{\Gamma(m)\}^2 (1+r^2)^{2m}} \quad (26a)$$

$$f_x(x) = \frac{1}{b} \exp\left(\frac{x}{b}\right) f_r\left(\exp\frac{x}{b}\right) \quad (b \equiv 8.686) \quad (26b)$$

図5は、上式の計算結果を示している。 $x=0$ を中心に釣鐘型であること、主な存在領域は ± 5 dB程度の範囲にあること、アンテナブランチ数の増加に対して、存在領域の幅が徐々に狭まってゆくことがわかる。この傾向は、計算機シミュレーションでも確認している。

【脚注】 計算機シミュレーションによって r_1 と r_2 の相関係数を求めると、 $N=1$ では-0.0021（理論上0）、 $N=4$ では、-0.274であった。

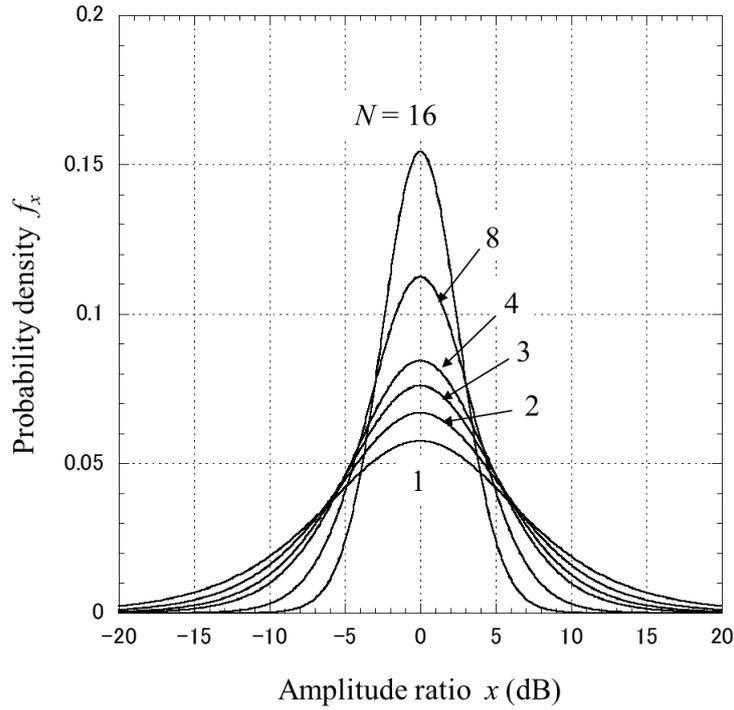


図5 振幅比分布のブランチ数依存性

3. 3 条件付位相差の確率分布 : $f_\phi(\phi|r)$

求めたい分布の元になる量は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{c_2}{c_1} &= \frac{(\mathbf{a}_{e1} + \mathbf{a}_{e2})^H \mathbf{a}_{e2}}{(\mathbf{a}_{e1} + \mathbf{a}_{e2})^H \mathbf{a}_{e1}} \\ &= \frac{\|\mathbf{a}_{e2}\|^2 + \mathbf{a}_{e1}^H \mathbf{a}_{e2}}{\|\mathbf{a}_{e1}\|^2 + \mathbf{a}_{e2}^H \mathbf{a}_{e1}} \end{aligned} \quad (27)$$

この量の位相の条件付確率分布 $f_\phi(\phi|r)$ を理論的に求めるのは、きわめて難しいように感じる（筆者には）。そこで、全体の分布を感覚的につかむため、乱数を用いて、上式の量を x - ϕ 座標上に 10 万点プロットしたのが図 6 である。

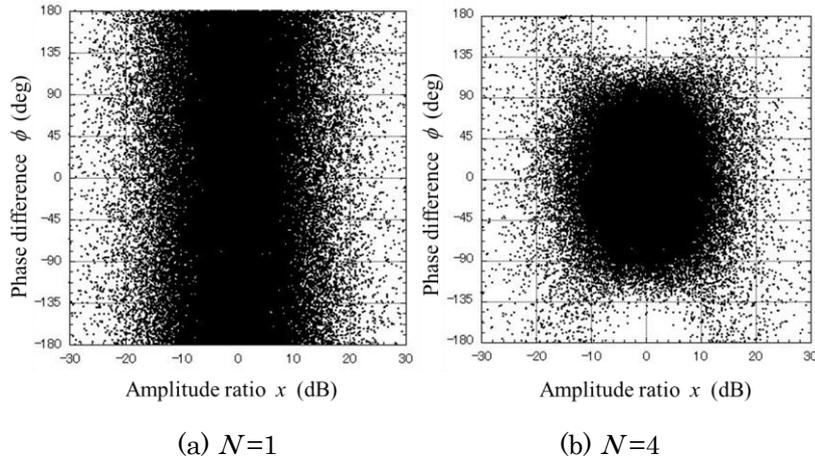


図6 c_2/c_1 の x - ϕ 座標での散布図 (点数 100,000)

単一ブランチの $N=1$ では、位相差の確率分布は、理論からの帰結どおり一様分布になっているが、問題は $N \geq 2$ である。しかし、 $N=4$ の分布図を良く見ると、誤りが発生する領域になる $x=0$ (すなわち $r=1$) 付近は分布が安定しているように見え、求めたい条件付確率を $r=1$ の線上の確率分布で代表できそうな期待が持てる。(27)式において、 $\|\mathbf{a}_{e1}\|=\|\mathbf{a}_{e2}\|$ であれば、分子と分母は同じ大きさの共役複素量なので、 $r=1$ となる。そのときの位相差は

$$\phi = 2 \arg \left(\|\mathbf{a}_{e2}\|^2 + \mathbf{a}_{e1}^H \mathbf{a}_{e2} \right) \quad (\text{when } \|\mathbf{a}_{e1}\| = \|\mathbf{a}_{e2}\|) \quad (28)$$

となる。コーシー・シュワルツの不等式より、

$$\|\mathbf{a}_{e2}\|^2 \geq \|\mathbf{a}_{e1}^H \mathbf{a}_{e2}\| \quad (\text{等号は } \mathbf{a}_{e1} = \mathbf{a}_{e2}) \quad (29)$$

であるため、位相差 ϕ は $0 \sim 2\pi$ を超えて分布すること、すなわち、この範囲に外から折り返されることはない。(28)式で $\|\mathbf{a}_{e2}\|^2$ がガンマ分布することはわかるが位相差の分布の理論式は求められるのであろうか？依然として難しいように思う。

正攻法での攻め方が見えないので、搦め手から攻めることにする。乱数を用いたシミュレーション実験を行い、分布の法則性を探るのである。その場合に、分布の全体を求めるのではなく、誤りの発生領域である分布の端に位置する $\phi = \pi$ 付近を表す式が見えれば了とする。

シミュレーションにおいては、 $\langle \|\mathbf{a}_{e1}\|^2 \rangle = \langle \|\mathbf{a}_{e2}\|^2 \rangle = N$ となるように乱数を発生させ、毎回 $\|\mathbf{a}_{e1}\| = k_0 \|\mathbf{a}_{e2}\|$ となるように k_0 を定め、 \mathbf{a}_{e1} 、 $k_0 \mathbf{a}_{e2}$ を改めて \mathbf{a}_{e1} 、 \mathbf{a}_{e2} と置き直せば、 $r=1$ の環境が試行回数分だけ生成できる (=効率的なシミュレーション実験ができる)。

このようにして、 $N=1 \sim 4$ について、累積分布を求めたのが図7の実線である。この結果は点線で示す以下の式にかなり良く一致する (ただし、角度をラジアンに変換している)。

$$F_\phi(\hat{\phi}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^N \hat{\phi}^{2N-1} \left(\hat{\phi} \equiv |\phi - \pi| < \frac{100}{180} \pi \right) \quad (30)$$

求める条件付確率分布の確率密度関数は次式となる。

$$f_{\phi}(\phi|r=1) = \frac{2N-1}{(2\pi)^N} |\phi-\pi|^{2(N-1)} \quad \left(\left| \phi-\pi \right| < \frac{100}{180} \pi, 0 \leq \phi < 2\pi \right) \quad (31)$$

式(31)は、位相差 ϕ の全範囲(0~ 2π)で積分しても1にはならず、確率密度関数としての必要条件を満たしていない。しかしながら、誤りが発生する領域内では、良い近似となっており、そのまま適用して問題ない。(N=1では $f_{\phi}(\phi)=1/(2\pi)$ の一樣分布となり、全範囲に適用できる厳密式である)

以上により、求めようとしてきた結合確率分布 $f_{r\phi}$ は式(26a)と(31)により次式となる。

$$f_{r\phi}(r, \phi; N) \approx f_r(r; N) f_{\phi}(\phi|r=1; N) \quad (32)$$

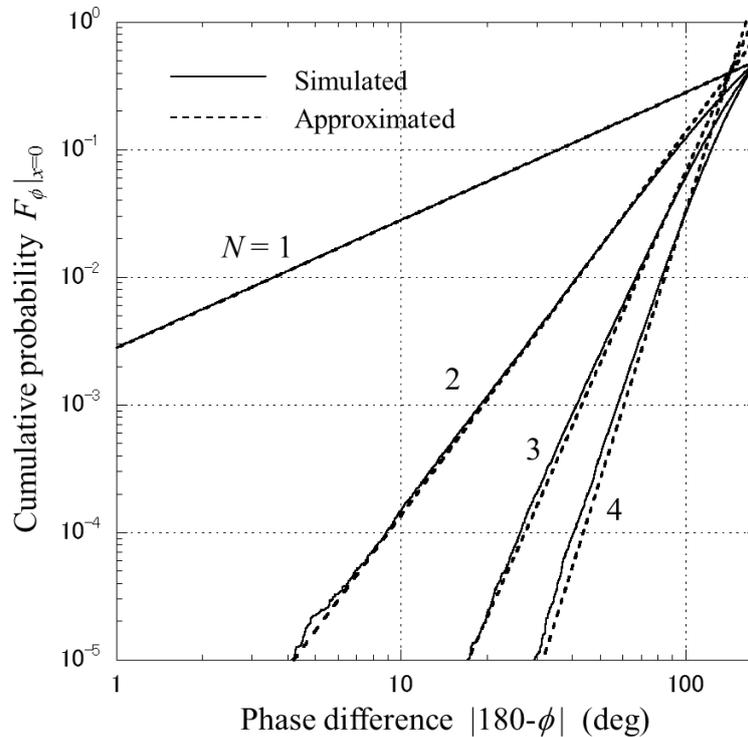


図7 位相差累積分布のシミュレーション実験結果とその近似

3. 4 計算手順のまとめ

BERマップと確率分布を用いた具体的な計算手順を簡単にまとめる。

- ① 目的の変復調方式に対するBERマップを作る。作り方を以下に示す(BERマップの相似性の確認と作成プログラム(Matlab m ファイル)は付録1に示す)。 $\Delta\tau T_s=0.2$ の設定を推奨する。この基準BERマップの $\Delta\tau$ を $\Delta\tau_{ref}$ 、振幅比dB値 x の分解能 Δx を Δx_{ref} 、位相差の分解能 $\Delta\phi$ を $\Delta\phi_{ref}$ と置く。QPSK, QAMでは、振幅比dB値 x の分解能 Δx は0.1dB、位相差の分解能 $\Delta\phi$ は 1° ($\Delta\phi$

はラジアンが単位なので $\pi/180$)で十分である。CQPSKの例を図3に示したように、誤りの発生は、 $|\Delta x| \leq 3$ [dB], $|\phi - \pi| \leq 50\pi/180$ [rad]に収まるので、計算点は x の点数 $I_x=61$, ϕ の点数 $I_\phi=101$ になる (DQPSKでは $I_x=81$, $I_\phi=121$ 、16QAMでは、 $I_x=151$, $I_\phi=141$)。このBERマップを $I_\phi \times I_x$ のテーブルとし、それぞれの値を $P_{0_ref}(i_x, i_\phi)$ ($i_x=1, 2, \dots, I_x$; $i_\phi=1, 2, \dots, I_\phi$)とする。

② 結合確率分布 $f_{x\phi}$ の変数変換を行う。遅延スプレッド σ_τ に対するBERマップは $\Delta\tau=2\sigma_\tau$ である。BERマップの相似形が成立する範囲 (QPSK系では $\Delta\tau/T_s \leq 0.6$ 、すなわち遅延スプレッド $\sigma_\tau/T_s \leq 0.3$ が目安) ではこの性質を使う。 $\eta=\Delta\tau/\Delta\tau_{ref}=\sigma_\tau/\sigma_{\tau_ref}$ として、結合確率分布の変数 x, ϕ を以下のように定める。

$$x(i_x) = \eta \left(\frac{1-I_x}{2} + i_x - 1 \right) \Delta x_{ref} \quad (33a)$$

$$\phi(i_\phi) = \pi + \eta \left(\frac{1-I_\phi}{2} + i_\phi - 1 \right) \Delta \phi_{ref} \quad (33b)$$

③ BERの平均フロア値 P_e を以下の計算式で計算する ((15a)式とBERマップへの引数が異なるが同じ結果になることを確認してほしい)。

$$P_e = \eta^2 \Delta x_{ref} \Delta \phi_{ref} \sum_{i_x=1}^{I_x} \sum_{i_\phi=1}^{I_\phi} f_{x\phi} \{x(i_x), \phi(i_\phi)\} P_{0_ref}(i_x, i_\phi) \quad (34)$$

この計算式の適用範囲は前述のとおりBERマップの形状相似性が保たれる範囲 (CQPSK, DQPSKでの $\sigma_\tau/T_s \leq 0.3$ 、16QAMでは $\sigma_\tau/T_s \leq 0.2$ が目安) である (適用範囲を超えるとBER推定は過大評価 (=安全サイド) の方向にずれてゆく)。

4. 推定モデルの精度評価とダイバーシチ合成特性

図8は、CQPSKについて、ブランチ数 $N=1 \sim 8$ 、遅延スプレッド $\sigma_\tau/T_s=0.05 \sim 0.3$ についての計算結果と2.1節で述べたシミュレーション (式(13)の打ち切り形指数関数プロファイル) による結果 ($\sigma_\tau/T_s=0.05$ (■), 0.1 (◆), 0.15 (▲), 0.2 (▼), 0.25 (●)) との比較を示している。同図より両者に良い一致が見られ、提案する計算式が実用的な意味で十分な精度を有していることがわかる。

図9は、計算値のみについて、遅延スプレッドを変数として示している (実線)。この結果は下記の近似式が非常によく合う (点線)。

$$P_e(\sigma_\tau, N) = \alpha \beta^{N-1} (\sigma_\tau/T_s)^{2N} \quad (\alpha=0.78, \beta=6.3) \quad (35)$$

適用範囲の目安は、 $\sigma_\tau/T_s \leq 0.3$ かつ $P_e \leq 0.01$ である。上式より、符号間干渉誤りは、 $N=1$ の場合には、遅延スプレッドの2乗に比例すること、最大比合成ダイバーシチ適用時には遅延スプレッドの $2N$ 乗に比例することがわかる。

本稿で提案した推定法は、電波伝搬の性質を表す結合確率分布 $f_{r\phi}$ (あるいは $f_{x\phi}$) とシステム

依存の BER マップとが切り離されており、結合確率分布 $f_{r,\phi}$ は変復調方式に依存しない汎用的なものである。CQPSK と同様な方法で差動符号化遅延検波 QPSK (DQPSK) と 16QAM の BER マップを作り、これによって、図 9 と同じ計算を行ったものが図 10 である (実線)。近似式(35)の形はこの場合も十分な精度で成立し、それを点線で示している。変復調方式による違いは(35)式の係数 α, β の部分で、これをまとめると以下である。

| 変復調方式 | α | β |
|-------|----------|---------|
| CQPSK | 0.78 | 6.3 |
| DQPSK | 0.80 | 7.5 |
| 16QAM | 2.0 | 12 |

本稿では、符号間干渉誤りのみに着目して解析しているが、他の要因での誤りが存在する場合には、それぞれの BER の値があまり大きくない場合 (目安値として 0.1 以下) では両者の和での近似が期待できる。熱雑音 ($\text{CNR}:\Gamma_0$) と符号間干渉が共に存在する環境での総合 BER は次式で表される。

$$BER(\Gamma_0, \sigma_\tau, N) \approx BER_{TN}(\Gamma_0, N) + BER_{ISI}(\sigma_\tau, N) \quad (36)$$

熱雑音でのダイバーシチ適用時の BER 特性を求める式は確立されている (例えば、CQPSK の場合は文献[12]の(10.31)式)。符号間干渉誤り BER_{ISI} は(35)式で求められる。図 11 は、CQPSK, $\sigma_\tau/T_s=0.15$ の場合について、(36)式による計算結果 (実線) とシミュレーション結果 (●) を比較して示している。 $N=4$ の熱雑音と符号間干渉が同程度の部分に若干のずれは見えるが、全体として、(36)式での評価の妥当性が示されている。

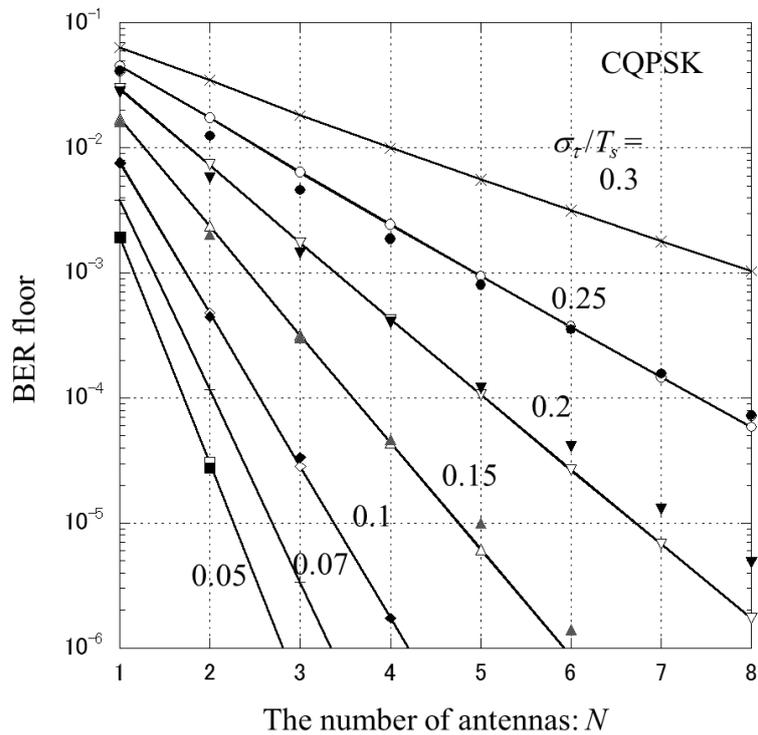


図8 BERフロア特性のダイバーシチ効果（計算値とシミュレーション値（ $\blacksquare, \blacktriangle, \blacklozenge, \bullet$ ）の比較）

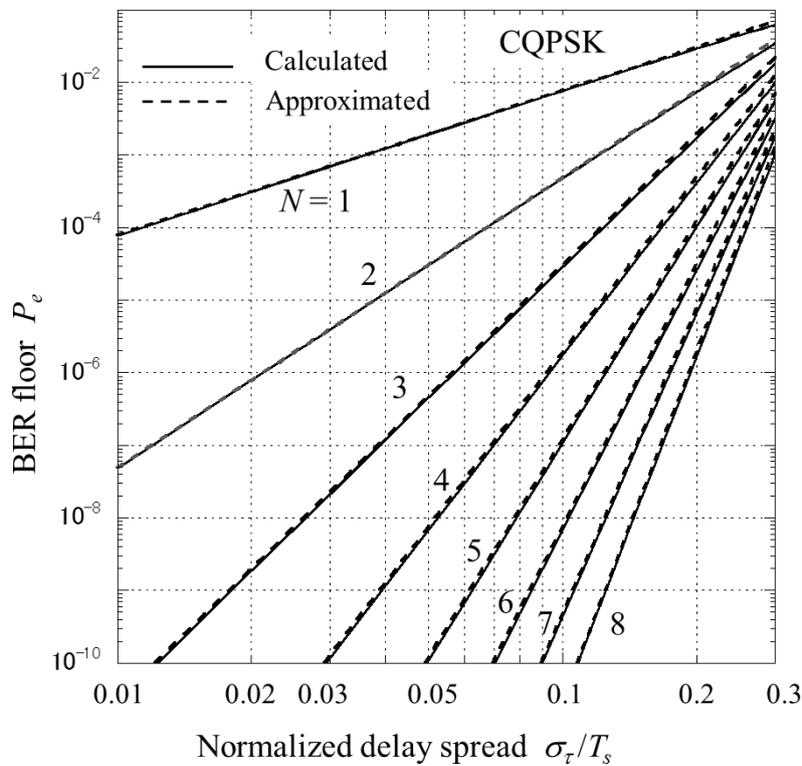
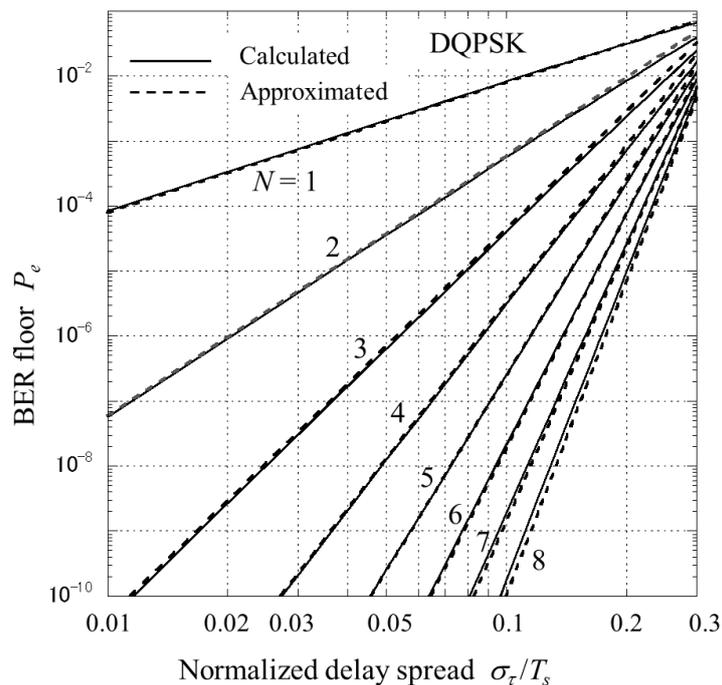
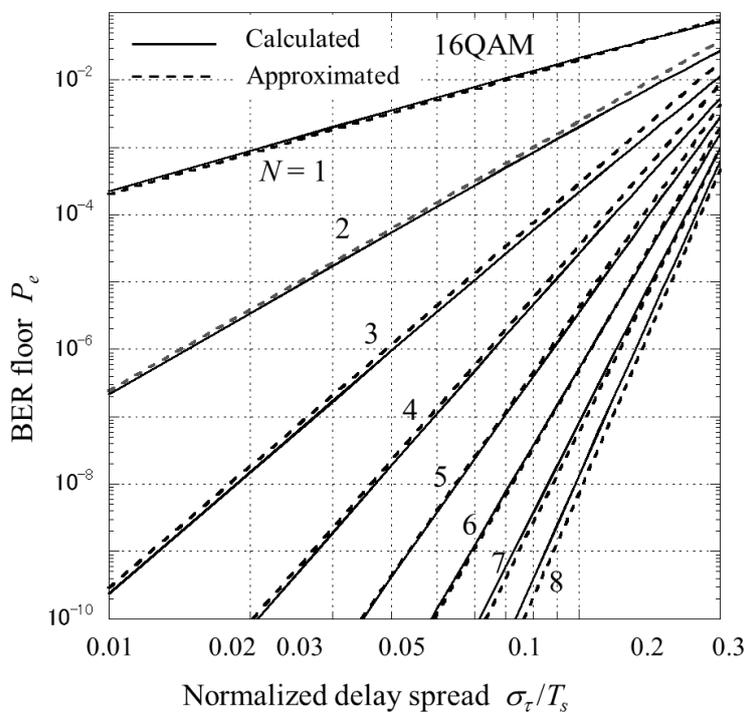


図9 CQPSKでのBERフロア値と遅延スプレッドとの関係



(a) DQPSK



(b) 16QAM

図 10 DQPSK, 16QAM での BER フロア値と遅延スプレッドとの関係

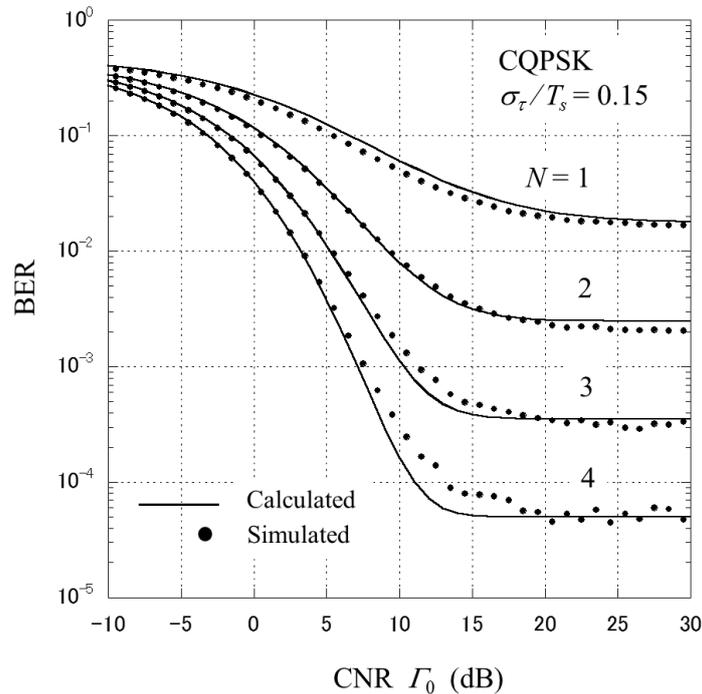


図 1.1 熱雑音と符号間干渉が共に存在する環境での総合 BER 特性 (CQPSK, $\sigma_\tau/T_s=0.15$)

5. むすび

単一アンテナ対向のシステムにおける符号間干渉誤り (BER フロア) 推定法である等価伝送路モデルを拡張して、最大比合成ダイバーシチ適用時の計算モデルを構築した。このモデリングでは、二段階の手順を採った。

第一段階では、最大比合成ダイバーシチ適用時においても、任意のマルチパス環境を 2 波モデルに置き換えるモデルが成立することを計算機シミュレーションで調べた。このことによって 2 波モデル置き換えの妥当性の根拠を得た。モデリングの鍵は、2 波モデルにおける 2 波の振幅比 r と位相差 ϕ の結合確率 $f_{r\phi}(r, \phi)$ を求めることであることを示した。

第二段階では、この結合確率 $f_{r\phi}(r, \phi)$ の導出を行った。その導出に際しては、振幅比の確率分布 $f_r(r)$ と位相差の条件付確率分布 $f_\phi(\phi|r)$ の積 $f_{r\phi}(r, \phi) = f_r(r)f_\phi(\phi|r)$ の形に整理し、 $f_r(r)$ 、 $f_\phi(\phi|r)$ の順に求めていった。振幅比分布 f_r は近似的考えながらも妥当な理論的展開ができ、使いやすい式を得た。一方、位相差の条件付確率分布については理論的解析が困難なため (筆者の力不足にもより)、正攻法をあきらめ、搦め手からの攻めを行った。具体的には振幅比・位相差分布上の比較的狭い範囲に集中する誤りの発生エリアのみに着目し、分布形に見られる法則を計算機シミュレーション実験で見出す方法を採用した。幸い、非常に簡易な関係を見つけることができ、モデル化にはこれを法則として取り入れた。

このようにして、変復調方式に依存しない伝搬環境のモデル化を行うことができた。文献[9]

で確立した単一アンテナ対向のシステム ($N=1$) は今回モデルに包含され、かつ、その場合の結合確率分布 $f_{r\phi}$ は近似の影響を受けない厳密な理論式である。得られた計算式を用いて、同期検波 QPSK (CQPSK) を例に、計算機シミュレーション結果と比較して、ブランチ数 $N=1\sim 8$ 、遅延スプレッド $\sigma_r/T_s \leq 0.25$ について、実用的に十分な精度で推定できていることを明らかにした。

また、差動符号化・遅延検波 QPSK (DQPSK) および 16QAM でのダイバーシチ特性も調べ、BER のフロア値は $\alpha\beta^{N-1}(\sigma_r/T_s)^{2N}$ の形に表すことができ、変復調方式によって係数 α , β の値が定まることを示した。

参考文献

- [1] 唐沢好男, “等価伝送路モデル: その思想と実践,” Tech. Rep. YK-001 (私報), pp. 1-35, Aug. 2017.
<http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/ETP%20model.pdf>
- [2] 唐沢好男, “ワイヤレス情報伝送の物理限界,” Tech. Rep. YK-003 (私報), pp. 1-18, Nov. 2017.
<http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-003-Physical%20limit.pdf>
- [3] 唐沢好男, “二重選択性フェージングにおけるBERフロア特性とシンボル長の最適設計法,” Tech. Rep. YK-010 (私報), pp. 1-17, Feb. 2018. http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-010_BER_floor_Analysis.pdf
- [4] P. A. Bello, B. D. Nelin, “The effect of frequency selective fading on the binary error probabilities of incoherent and differentially coherent matched filter receivers,” IEEE Trans. Commun. Syst., vol. CS-11, pp. 170-186, 1963.
- [5] O. Shimbo and M. Celeviler, “The probability of error due to intersymbol interference and Gaussian noise in digital communication systems,” IEEE Trans. Commun. Technol., vol. COM-19, pp. 113-119, 1971.
- [6] J. C.-I. Chuang, “The effects of time delay spread on portable radio communications channels with digital modulation,” IEEE Jour. Select. Areas Commun., vol. SAC-5, pp. 879-889, 1987.
- [7] Y. Karasawa, T. Kuroda and H. Iwai, “Cycle slip in clock recovery on frequency-selective fading channels,” IEEE Trans. Commun., vol. 45, 3, pp. 376-383, 1997.
- [8] Y. Karasawa, T. Kuroda and H. Iwai, “Analysis of cycle slip in clock recovery on frequency-selective Nakagami-Rice fading channels based on the equivalent transmission-path model,” IEICE Trans. Commun., vol. E79-B, 12, pp. 1900-1910, 1996.
- [9] Y. Karasawa, T. Kuroda and H. Iwai, “The equivalent transmission-path model,” IEEE Trans. Vehicul. Tech., vol. 47, no. 1, pp. 194-202, 1997.
- [10] Y. Karasawa and H. Iwai, “Enhancement of the ETP model: How to calculate BER due to ISI for wideband digital transmission in Nakagami-Rice fading environments,” IEEE Trans. Vehicul. Tech., vol. 49, no. 6, pp. 2113-2120, 2000.
- [11] H. Iwai and Y. Karasawa, “The theoretical foundation and applications of equivalent transmission-path model for assessing wideband digital transmission characteristics in Nakagami-Rice fading environments,” IEICE Trans. on Commun., vol. E79-B, no. 9, pp. 1205-1214, 1996.
- [12] 唐沢好男, 改訂 デジタル移動通信の電波伝搬基礎, コロナ社, 2016.03.
- [13] Y. Karasawa, N. Gejoh, and T. Izumi, “Modeling and analysis of OFDM transmission characteristics in Rayleigh fading environment in which the delay profile exceeds the guard interval,” IEICE, Trans. Commun., vol. E88-B, no. 7, pp. 3020-3027, 2005.
- [14] 鄭 鶯仙, 唐沢好男, “遅延の広がり超える OFDM のガードインターバルを超えるマルチパス環境における最大比合成ダイバーシチ特性の等価伝送路モデルによる解析,” 信学技報, A・P2012-112, pp. 109-114, 2012.
- [15] 唐沢好男, “不完全 MRC における合成信号強度の厳密確率分布,” 信学論(B), vol. 99-B, no. 6, pp. 408-414, 2016.06.
- [16] 唐沢好男, 黒田知紀, 岩井誠人, “周波数選択性フェージングとサイクルスリップ [II],” 信学技報, AP92-57/RCS92-45, 1992.

付録1 BER マップの性質と作り方

(1) BER マップの形状相似性

本稿で提案する推定法では、変復調方式毎に用意する一枚の BER マップを用いている。実際には2波の遅延差 $\Delta\tau$ ごとに BER マップは異なるが、BER マップにはかなり正確な形状相似性があるので、一枚の BER マップがあれば、その性質を利用して任意の $\Delta\tau$ に対してスケージングができる。ここではその根拠を示す。

伝達関数はインパルス応答のフーリエ変換で与えられ、通信路の周波数特性を表す。通信信号帯域内で伝達関数と同じであれば、同じ伝送特性になるはずである。その第一次近似として、以下の二つの値がお互いに一致するとき、伝達関数が同じとみなす。

① 周波数 f_0 での伝達関数の値： $T(f_0)$

② 周波数 f_0 での伝達関数の傾き： $T'(f_0)$ ($T' \equiv \partial T / \partial f$)

上記二つの特性を組み入れることができる最も簡易なモデルは、複素振幅、 a_{e1}, a_{e2} と遅延差 $\Delta\tau$ によって表される2波モデル(図1)である。この伝達関数を等価低域通過系(ベースバンド系： $f=0$ を中心周波数)で表すと次式である。

$$T(f) = a_{e1} + a_{e2} e^{-j2\pi f \Delta\tau} \quad (A1)$$

遅延差が異なる2種類の2波モデル($\Delta\tau_{ref}$ と $\Delta\tau$)があり、これらが、①、②の意味で同じと言えるためには、 $\eta \equiv \Delta\tau / \Delta\tau_{ref}$ を用いて、両者の複素振幅($a_{e1}^{(ref)}, a_{e2}^{(ref)}$ と a_{e1}, a_{e2})は次式で関係付けられる。

$$\begin{pmatrix} a_{e1} \\ a_{e2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-1/\eta \\ 0 & 1/\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{e1}^{(ref)} \\ a_{e2}^{(ref)} \end{pmatrix} \quad (\eta \equiv \Delta\tau / \Delta\tau_{ref}) \quad (A2)$$

さらに、符号間干渉誤りの評価では振幅レベルの大きさには依存しないため、本質的なパラメータとして、 $T(0)$ で正規化した傾度：正規化伝達関数傾度(NTFG: Normalized Transfer Function Gradient) γ を次式により定める。

$$\gamma \equiv T'(0) / T(0) \quad (A3)$$

2波モデルでの NTFG は次式となる。

$$\gamma = \frac{-j2\pi a_{e2} \Delta\tau}{a_{e1} + a_{e2}} = \frac{-j2\pi \Delta\tau \alpha}{1 + \alpha} \quad \left(\alpha \equiv \frac{a_{e2}}{a_{e1}} \right) \quad (A4)$$

これより、 a_{e2} と a_{e1} の比 α は γ と $\Delta\tau$ の関数となり、次式で結ばれる(本付録内で用いる文字 α, β は本文では別の意味で使用している)。

$$\alpha(\gamma; \Delta\tau) = \frac{-\gamma}{\gamma + j2\pi \Delta\tau} \quad (A5)$$

図3の BER マップの例に見られるように $x=0$ ($r=1$), $\phi=180^\circ$ を中心とするエリアに、誤りの発

生は集中している。 $\Delta\tau$ の値を変えると、このマップはどのように変化するだろうか？基準遅延差を $\Delta\tau_{ref}$ とし、これを $\Delta\tau$ に変えた場合を調べてみたい。それぞれの2波（遅延波と先行波）の比がBERマップの位置を決めるため、複素振幅の比 α を以下のように置く。

$$\alpha (\equiv a_{e2} / a_{e1}) \equiv r e^{j\phi} \equiv -e^{\beta} \quad (\text{A6a})$$

$$\beta \equiv \ln r + j\hat{\phi} \quad (\text{A6b})$$

$$\hat{\phi} \equiv \phi - \pi \quad (0 \leq \phi < 2\pi) \quad (\text{A6c})$$

BERマップ上で、誤りは $x=0$ ($r=1$), $\phi=\pi$ を中心とした比較的狭い範囲に集中するが、この座標変換においては、 $|\beta| \ll 1$ の領域に対応する。以下、 $\Delta\tau_{ref}$ のモデルに対する α, β は $\alpha^{(ref)}, \beta^{(ref)}$ で表記する。

(A2)式で与えられる二つの環境は同じNTFG値を与えるので、それぞれが指し示す位置におけるBER: P_0 は同じになるであろう。その位置 α は次式となる。

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a_2^{(ref)} / \eta}{a_1^{(ref)} + a_2^{(ref)} - a_2^{(ref)} / \eta} \\ &= \frac{\alpha^{(ref)}}{(1 + \alpha^{(ref)})\eta - \alpha^{(ref)}} \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

図2より、 $|\beta| \ll 1$ の範囲で誤りが集中することを考えると、 $\alpha \approx -1 - \beta$ と近似できる。この近似により、 β は次式で表される。

$$\beta \approx \frac{\eta\beta^{(ref)}}{1 + \beta^{(ref)} - \eta\beta^{(ref)}} \approx \eta\beta^{(ref)} \quad (\text{A8})$$

このことにより、遅延差が異なる二つのモデルにおいては、同一NTFG値となるBERマップ上の点が、 $\Delta\tau_{ref}$ における $\beta^{(ref)}$ から $\Delta\tau$ のマップでの $\eta\beta^{(ref)}$ の位置に変換されたとことになる。 β は $\ln r + j(\phi - \pi)$ なので、横軸:振幅比の対数 (dB値もそれに含まれる) に対しても、縦軸: $\phi = \pi$ を中心とした位相差に対しても、基準値に対して η 倍引き伸ばされた場所に同じBERが現れることになる。これは、まさに、BERマップの η 倍のスケールアップである。付図1はこの性質を示している。筆者等は、これまでBERマップにはこのスケールアップの性質 (=遅延差に対する形状相似性) が見られることを、シミュレーションや実測データを用いて示してきたが[10]、理論的根拠を示していなかった。(A8)式がその答えである。

付図2には、CQPSKでの $\Delta\tau/T_s = 0.1$ と 0.2 のBERマップ (計算機シミュレーションによる) を示している。二つとも同じ形に見えるが、座標の縦軸・横軸スケールが倍の違いであることに気づいてほしい。付図3はCQPSKで64kbpsのモデムを用いての実測結果である[10] (この測定系は文献[16]の図2)。測定系の誤差要因を含むため、誤りの発生エリアはシミュレーションの結果と比べて大きくなっているが、誤り発生エリアの形や相似形の性質ははっきり確認するこ

とができる。

CQPSK で、マップ上の BER の積算値 $\sum_x \sum_\phi P_0 \Delta \phi \Delta x$ を $\Delta \tau / T_s = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6$ について求めると、0.2167, 0.8533, 3.215, 6.554 となった。 $\Delta \tau / T_s = 0.1$ のときの値を基準にすると、 $\Delta \tau / T_s = 0.2, 0.4, 0.6$ は、それぞれ、3.94 (完全相似形では 4; 比率 0.99) , 14.8 (16; 0.93) , 30.2 (36; 0.84) 倍となった。 $\Delta \tau / T_s = 0.6$ 、すなわち $\sigma_\tau / T_s = 0.3$ への適用では、相似形の性質を利用すると BER の値が若干過大評価方向にずれると予想されるが、このあたりまでは許容範囲と見てよいであろう。

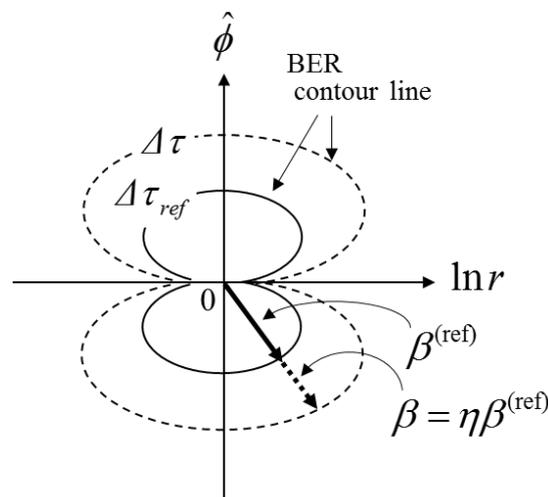
BER マップの値は変復調方式毎に異なる。付図 4 は DQPSK ($\Delta \tau / T_s = 0.2$) の BER マップである。CQPSK とはだいぶ見た目が変わるが、誤りが大きいコアの部分 (色を濃くした中心部) は CQPSK とほぼ同じ形・大きさであり、それゆえに、BER の推定値そのものはあまり変わらない結果になっている (図 9 (CQPSK) と図 10 (a) (DQPSK))。 $\pi/4$ シフト DQPSK の BER マップは文献[12]の図 10.9(b)に載せている。

同じ変調方式でも、受信方式によって下記 1) ~ 3) の扱い (筆者等が採用) が異なる場合もある。その場合には、その方式に置き換えたもので BER マップを作成してほしい。当然ながら、シミュレーション結果と計算結果を比較する際には、実際のシミュレーションと使用する BER マップが、1) ~ 3) の点において同じ方式でないと、そのことに起因する差異が生じるので留意してほしい。

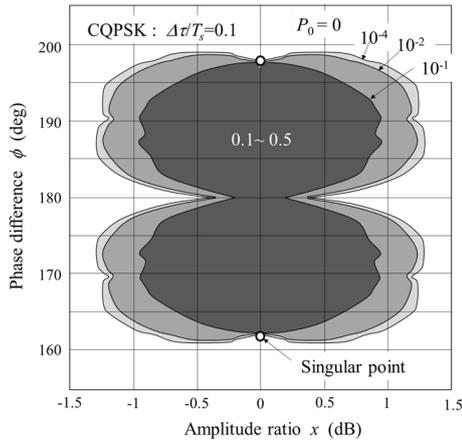
- 1) 波形整形フィルタに自乗余弦特性を持つナイキストフィルタ (ロールオフファクタを 0.5 に設定) を採用し、符号間の干渉は中心シンボルの前後 3 シンボル分を考慮している
- 2) サンプルタイミングは、式(7)を 2 波モデルに適用した次式を採用している

$$t_{\text{sampling}} = \frac{\Delta \tau}{2} + \frac{T_s}{2\pi} \tan^{-1} \left\{ \frac{(r^2 - 1) \sin(2\pi \Delta \tau / T_s)}{(r^2 + 1) \cos(2\pi \Delta \tau / T_s) + 2r \cos \phi} \right\} \quad (\text{A9})$$

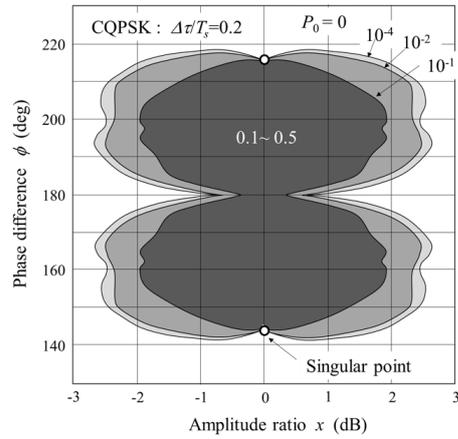
- 3) 同期検波方式においては、受信信号の位相基準として $\arg(1+r \exp \phi)$ を用いている



付図 1 BER マップの $\Delta \tau$ に対する形状相似性

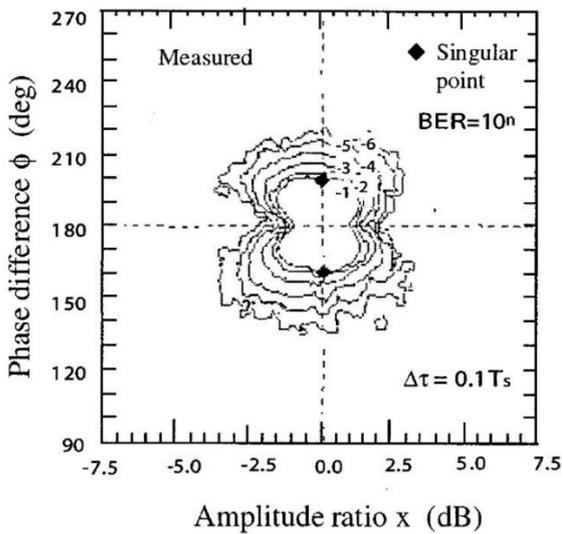


(a) $\Delta\tau/T_s = 0.1$

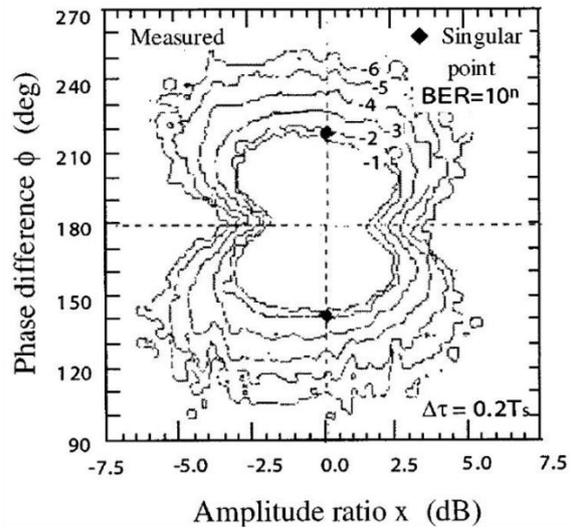


(b) $\Delta\tau/T_s = 0.2$

付図2 CQPSK での BER マップ形状相似性 (シミュレーションによる作成: 両図の縦軸・横軸スケールの違いに注意)

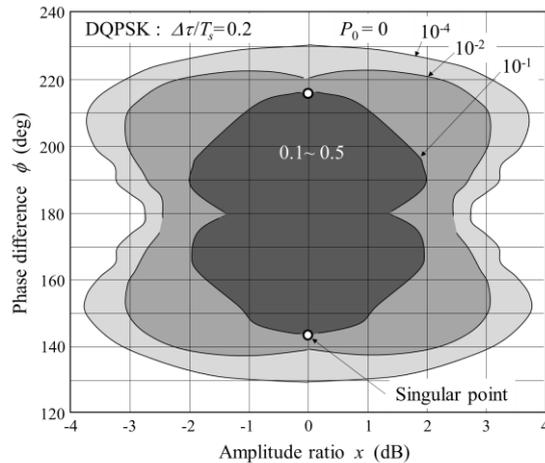


(a) $\Delta\tau/T_s = 0.1$



(b) $\Delta\tau/T_s = 0.2$

付図3 CQPSK での BER マップ形状相似性 (64kbps モデムを用いた実測; 測定系は文献[16]の図2)

付図4 DQPSK $\Delta\tau/T_s=0.2$ の BER マップ

(2) BER マップ作成法

BER マップを作成する方法には2つの方法がある。i) 理論的に求める方法と ii) 計算機シミュレーションにより求める方法である。理論的には、Bello の論文[4]にあるように、前後数シンボルの全てのビットの組み合わせに対して誤り発生の有無を計算し、そこから誤り率を求めることをする。文献[10] (Fig. 3(a), 4(a)) では同様の方法により求めた BER マップを示している。この方法によって、簡易な計算式が得られていけば良いが、そのような式を筆者は知らない。そこで、ここでは、ii)の計算機シミュレーションによって作成する方法を推奨する。具体的な作り方は3. 4節の①に述べている。このシミュレーションは、予測できない動作を調べるといふ計算機シミュレーション本来の目的ではなく、後ろ側に眠っている理論 BER マップを浮き上がらせる (=手に入れる) ための実験と位置づけられる。

参考までに、CQPSK の場合について、筆者が用いている BER マップ作成プログラム (Matlab m ファイル) を添付する (プログラミングとしての良い見本にはなっておらず、計算時間短縮には Matlab の特徴を活かした更なる工夫ができると思う)。

本体プログラム

```
% BERマップ: CQPSK 遅延差Dt/Ts=0.2の作成
%
% 振幅比: -3dB~3dB, 幅: 0.1dB, データ数(Adata): 61
% 位相差: 130° ~230°、幅: 1°, データ数(Pdata): 101
Dt=0.2 % 遅延差
Adata=61;
Pdata=101;
Nbit=10^6; % 送信ビット数 (10^5でも十分だが、数値のより安定を求めて。ただし計算時間大)
%
BERmap0=zeros(Adata, Pdata);
BERmap_int=zeros(Adata, Pdata);
%
% 位相差毎に、BERフロア値をxに対して求める
%
```

```

delta_phi=1/180*pi; % 位相差間隔 : 1°
delta_x_dB=0.1; % 振幅比間隔 : 0.1dB
for ip=1:Pdata % 位相差に対して
    ip % 計算の進捗状況を知るための出力
    dphi=(-1*(Pdata-1)/2+ip-1)*delta_phi+pi;
    for ia=1:Adata % 振幅比に対して
        a_ratio=sqrt(10^((-1*(Adata-1)/2+ia-1)/10/10));
        %
        % サンプルタイミング (再生クロック位相) とサンプリング値
        %
        b1=(a_ratio^2-1)*sin(pi*Dt);
        b2=(1+a_ratio^2)*cos(pi*Dt)+2*a_ratio*cos(dphi);
        t1=Dt/2+(1/2/pi)*atan2(b1, b2);
        amp1=MYnyquist(t1); % 先行波 (7シンボル分) のナイキストサンプリング : 自作関数の引用
        amp2=MYnyquist(t1-Dt); % 遅延波 (7シンボル分) のナイキストサンプリング
        %
        % 送信ビット列 (Nbit+12) を作る
        %
        TXbit=randn(1, Nbit+12);
        for nbitTX=1:Nbit+12
            if TXbit(nbitTX)>0
                TXbit(nbitTX)=1;
            else
                TXbit(nbitTX)=-1;
            end
        end
        TXbit_eva=TXbit(7:Nbit+6);
        %
        % 送信シンボル列 (Nbit+12)/2を作る
        %
        TXsymbol=zeros(1, (Nbit+12)/2);
        for m1=1:(Nbit+12)/2
            if TXbit(2*m1-1)>0
                if TXbit(2*m1)>0
                    TXsymbol(m1)=(1+j)/sqrt(2);
                else
                    TXsymbol(m1)=(1-j)/sqrt(2);
                end
            end
            if TXbit(2*m1-1)<0
                if TXbit(2*m1)>0
                    TXsymbol(m1)=(-1+j)/sqrt(2);
                else
                    TXsymbol(m1)=(-1-j)/sqrt(2);
                end
            end
        end
        end
        %
        % 受信データの作成
        %
        RXsymbol=zeros(1, Nbit/2);
        for i1=1:Nbit/2 % 受信シンボルをi1で詰めて行く
            sk=[TXsymbol(i1), TXsymbol(i1+1), TXsymbol(i1+2), TXsymbol(i1+3), ...
                TXsymbol(i1+4), TXsymbol(i1+5), TXsymbol(i1+6)];

```

```

    RXsymbol(i1)=(amp1+a_ratio*exp(j*dphi)*amp2)*sk.';
end
RXsymbol=RXsymbol/(1+a_ratio*exp(j*dphi)); % 位相基準=チャネル特性
%
% 受信シンボルの復調
%
RXbit=zeros(1,Nbit);
for i2=1:Nbit/2
    if real(RXsymbol(i2))>0
        RXbit(2*i2-1)=1;
    else
        RXbit(2*i2-1)=-1;
    end
    if imag(RXsymbol(i2))>0
        RXbit(2*i2)=1;
    else
        RXbit(2*i2)=-1;
    end
end
%
% BER計算
%
BERmap0(ia,ip)=(Nbit-RXbit*TXbit_eva.)/(2*Nbit);
BERmap_int(ia,ip)=fix(-log10(BERmap0(ia,ip)+0.000000001));
if BERmap_int(ia,ip)>6
    BERmap_int(ia,ip)=0;
end
end
end
%
a=BERmap_int(1:31,:)' % BERmapを-3<x<0(dB)の範囲で10^(-n)のnを一桁で出力(全体の様子を見るため)
BERmap02=BERmap0;
save('BERmap_CQPSK_02_BERmap02.dat','BERmap02','-mat'); % BERマップデータの保存

```

引用している関数: MYnyquist

```

function[amp]=MYnyquist(t)
% ナイキストフィルタ(自乗余弦フィルタ)出力値を求める:ズレを入れると±3の7つを返す
% ロールオフファクタ=0.5(t=0と1で計算不能になるので、そうなる場合には対策を)
%
amp=zeros(1,7);
for m=1:7;
    amp(m)=sin(pi*(t+m-4))*cos(0.5*pi*(t+m-4))/(pi*(t+m-4)*(1-(t+m-4)^2));
end
return

```

付録2 式(21)の導出

以下の導出については、ウェイト不完全なケースでの最大比合成解析の論文[15]で取り扱われているが、式表現を本稿にあわせて、ここにまとめておく。

2波モデルにおける先行波と遅延波の各成分の平均電力は以下で表される。

$$\langle \|\mathbf{a}_{e1}\|^2 \rangle = NP_{e1}, \quad \langle \|\mathbf{a}_{e2}\|^2 \rangle = NP_{e2} \quad (\text{A10})$$

(10)式の合成ウェイトを、ベクトル \mathbf{w}_0 を導入して次式で表す。

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 / \|\mathbf{w}_0\| \quad (\text{A11a})$$

$$\mathbf{w}_0 \equiv \mathbf{a}_{e1} + \mathbf{a}_{e2} \quad (\text{A11b})$$

$$\langle \|\mathbf{w}_0\|^2 \rangle = N(P_{e1} + P_{e2}) \quad (\text{A11c})$$

先行波の受信電力は次式で与えられる。

$$r_1^2 = |c_1|^2 = \frac{\mathbf{w}_0^H \mathbf{a}_{e1} \mathbf{a}_{e1}^H \mathbf{w}_0}{\mathbf{w}_0^H \mathbf{w}_0} \quad (\text{A12})$$

\mathbf{a}_{e1} と \mathbf{w}_0 は相関を有し、その相関係数を ρ_1 とすると

$$\rho_1 = \frac{\langle \mathbf{w}_0^H \mathbf{a}_{e1} \rangle}{\sqrt{\langle \|\mathbf{w}_0\|^2 \rangle} \sqrt{\langle \|\mathbf{a}_{e1}\|^2 \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma}} \quad (\gamma \equiv P_{e2} / P_{e1}) \quad (\text{A13})$$

となる。そこで、 \mathbf{a}_{e1} を \mathbf{w}_0 および、 \mathbf{w}_0 と独立で平均電力を同じにする新たなベクトル \mathbf{v} を用いて、以下のように線形結合で表す。

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{e1} &= \frac{1}{\sqrt{1+\gamma}} \left(\rho_1 \mathbf{w}_0 + \sqrt{1-\rho_1^2} \mathbf{v} \right) \\ &= \rho_1 \left(\rho_1 \mathbf{w}_0 + \sqrt{1-\rho_1^2} \mathbf{v} \right) \end{aligned} \quad (\text{A14})$$

これにより、(A12)式は次式となる。

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \frac{\rho_1^2 \mathbf{w}_0^H \left(\rho_1 \mathbf{w}_0 + \sqrt{1-\rho_1^2} \mathbf{v} \right) \left(\rho_1 \mathbf{w}_0 + \sqrt{1-\rho_1^2} \mathbf{v} \right)^H \mathbf{w}_0}{\mathbf{w}_0^H \mathbf{w}_0} \\ &= \rho_1^2 \left\{ \rho_1^2 \mathbf{w}_0^H \mathbf{w}_0 + \rho_1 \sqrt{1-\rho_1^2} \left(\mathbf{v}^H \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_0^H \mathbf{v} \right) + \left(1-\rho_1^2 \right) \frac{\mathbf{w}_0^H \mathbf{v} \mathbf{v}^H \mathbf{w}_0}{\mathbf{w}_0^H \mathbf{w}_0} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

その平均値は次式となる。

$$\begin{aligned}
\langle r_1^2 \rangle &= \rho_1^2 \left\{ \rho_1^2 \langle \mathbf{w}_0^H \mathbf{w}_0 \rangle + (1 - \rho_1^2) \left\langle \frac{\mathbf{w}_0^H \mathbf{v} \mathbf{v}^H \mathbf{w}_0}{\mathbf{w}_0^H \mathbf{w}_0} \right\rangle \right\} \\
&= \rho_1^2 (P_{e1} + P_{e2}) \{ \rho_1^2 N + (1 - \rho_1^2) \} \\
&= \frac{N + \gamma}{1 + \gamma} P_{e1}
\end{aligned} \tag{A16}$$

さらに、 r_1^4 は同様に

$$r_1^4 = \rho_1^4 \left\{ \rho_1^2 \mathbf{w}_0^H \mathbf{w}_0 + \rho_1 \sqrt{1 - \rho_1^2} (\mathbf{v}^H \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_0^H \mathbf{v}) + (1 - \rho_1^2) \frac{\mathbf{w}_0^H \mathbf{v} \mathbf{v}^H \mathbf{w}_0}{\mathbf{w}_0^H \mathbf{w}_0} \right\}^2 \tag{A17}$$

であり、その平均は

$$\begin{aligned}
\langle r_1^4 \rangle &= \rho_1^4 \left\{ \rho_1^4 \langle \mathbf{w}_0^H \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0^H \mathbf{w}_0 \rangle + 2\rho_1^2 (1 - \rho_1^2) \langle \mathbf{v}^H \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0^H \mathbf{v} + \mathbf{w}_0^H \mathbf{v} \mathbf{v}^H \mathbf{w}_0 \rangle \right. \\
&\quad \left. + (1 - \rho_1^2)^2 \left\langle \left(\frac{\mathbf{w}_0^H \mathbf{v} \mathbf{v}^H \mathbf{w}_0}{\mathbf{w}_0^H \mathbf{w}_0} \right)^2 \right\rangle \right\}
\end{aligned} \tag{A18}$$

となる。個々の項は次式で与えられる（証明略：詳しくは[15]）

$$\langle \mathbf{w}_0^H \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0^H \mathbf{w}_0 \rangle = N(N+1)(P_{e1} + P_{e2})^2 \tag{A19}$$

$$\langle \mathbf{v}^H \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0^H \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}_0^H \mathbf{v} \mathbf{v}^H \mathbf{w}_0 \rangle = N(P_{e1} + P_{e2})^2 \tag{A20}$$

$$\left\langle \left(\frac{\mathbf{w}_0^H \mathbf{v} \mathbf{v}^H \mathbf{w}_0}{\mathbf{w}_0^H \mathbf{w}_0} \right)^2 \right\rangle = 2(P_{e1} + P_{e2})^2 \tag{A21}$$

これらを(A18)式に代入して整理すると、

$$\langle r_1^4 \rangle = \rho_1^4 (P_{e1} + P_{e2})^2 \{ (N^2 - 3N + 2)\rho_1^4 + 4(N-1)\rho_1^2 + 2 \} \tag{A22}$$

$$= \frac{N(N+1) + 4\gamma N + 2\gamma^2}{(1+\gamma)^2} P_{e1}^2 \tag{A23}$$

$\langle r_1^2 \rangle, \langle r_1^4 \rangle$ を本文の式(19b, c)に代入し Ω_1, m_1 を求めると(21a, b)式が得られる。【導出終わり】
(21c, d)式も、 \mathbf{a}_{e2} に着目して同様に導出できる。