Technical Report YK-023
July 01, 2019
Y. Karasawa

電磁気学の奥深さ（１）：電気と磁気の対応は *E*-*H* か、*E*-*B* か

電気の場（フィールド）を表す物理量に電界 ***E*** と電束密度 ***D*** があり、磁気の場では磁界 ***H*** と磁束密度 ***B*** がある。電気と磁気にはかなりの部分で対称性があり、それらを表す物理量には対応関係がある。用語名を見れば、電界（***E***）と磁界（***H***）、電束密度（***D***）と磁束密度（***B***）であるのだから ***E*** と ***H***、***D*** と ***B*** が対応していると考えるのが当たり前そう。しかしことはそれほど単純ではない。理由は以下の点にある。

１）電気は単極電荷があるのに対して、磁気には単極磁荷がなく、この部分が非対称である
２）電気の研究は摩擦電気から、磁気の研究は永久磁石から始まり、後者の方が歴史が古く、現在の電磁気学が更地に構築されたわけではない（歴史上の事情がある）
３）電磁気学の教科書（あるいは授業）では、電気的な力を電荷と電荷が作用するクーロン力で、磁気的な力を電流と電流が作用する力（アンペアの力）とする説明から入るのが主流で、電荷が作る場を電界、電流が作る場を磁束密度と呼び、***E-B*** 対応で説明されることが多い。

上記の視点から、対応関係を慎重に見てみたい。なお、文献[1]では、広い視点でこの議論が行われており、深いことはそこで学んでほしい。

電界 ***E*** と電束密度 ***D*** は誘電率εによって、磁界 ***H*** と磁束密度 ***B*** は透磁率μによって、次式の関係を持つ。

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E},\ \ \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{1}$$

D と ***E***、***B*** と ***H*** はベクトルが同じ方向を向き、大きさも比例関係にあるので、関連は深いが、単位が異なっており、まったく違う物理量である。（電磁気に関係する物理量の単位をまとめた表 1 を最後のページにつけている）。式(1)の形だけ見れば、電気と磁気では、

$$\boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{H},\ \boldsymbol{D} \leftrightarrow \boldsymbol{B},\ \varepsilon \leftrightarrow \mu$$

の対応でよさそう。本当にそうであろうか。

先ずはそれぞれの定義を見てみよう。以下の説明において、物理量がベクトル量であっても、ベクトルで表す必要が無い議論においてはスカラーで表している。

<u>電界 ***E***</u>

電荷 Q によって、真空中の距離 r 離れた電荷 q に働くクーロン力は

$$F = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = qE \tag{2a}$$

$$E \equiv \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{2b}$$

で表され、電界 E（向きがあるのでベクトル $\boldsymbol{E}$）は、電荷 Q によって生み出され q に作用する電気的歪を持つ場（近接作用による）と定義される。電界の単位は[N/C]あるいは[V/m]であり、MKSA 単位系では[mkg/(s^3A)]である。（以降、本資料では、表 1 で説明している組立単位を用い、電界は[1,1,-3,-1]である）。

電束密度 $\boldsymbol{D}$

電荷からは電気力線が出ており（←ファラデーが与えてくれたイメージ）、それを電荷 Q と等しいものとしたものが電束である。これを単位面積あたりの密度にしたものが電束密度、その単位は[C/m^2], [-2,0,1,1]である。点電荷の場合は、$D=Q/(4\pi r^2)$であり、(2b)式との比較により、$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ になる。

磁界 $\boldsymbol{H}$

電磁気学は単極磁荷の存在を認めていない。しかし、永久磁石の一方だけを見て、実効的な意味での単極磁荷とみなすようなことはイメージできる。電磁気学が今の形になる以前、磁荷を用いた力学ができていて、単極磁荷 Q_m と別の単極磁荷 q_m（単位[Wb]）の間には電荷に対するクーロンの法則と同じように力が働き、磁荷 q_m に対し

$$F = \frac{Q_m q_m}{4\pi\mu_0 r^2} = q_m H \tag{3a}$$

$$H \equiv \frac{Q_m}{4\pi\mu_0 r^2} \tag{3b}$$

の関係を定め H（向きがあるのでベクトル $\boldsymbol{H}$）を磁界と呼んだ。単位は[N/Wb]であり、[Wb]=[Nm/A]なので[A/m] (=[-1,0,0,1])である。

なお、この $\boldsymbol{H}$ を「磁界の強さ」と呼ぶ教科書もあるが、$|\boldsymbol{H}|$が「磁界の強さの強さ」になってしまい、落ち着きが悪い。

磁束密度 $\boldsymbol{B}$

電流の磁気作用については、アンペアによって定量的に調べられ、距離 r 離れた無限に平行な直線状に流れる電流 I_0, I に対して、I の長さ l 当たりに働く力を F とすると、

$$F = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi r} l = BIl \tag{4a}$$

$$B \equiv \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \tag{4b}$$

で表される。この B（ベクトル $\boldsymbol{B}$）は磁針に反応する場でもあるので、電流 I_0 によって生み出された磁気的歪による場と定義される。そして、これを磁束密度と呼ぶ、と教えられる。

磁束密度の単位は[N/(Am)]であり、テスラと呼ばれる。組立単位は[0,1,-2,-1]である。この経緯で名づけられた物理量であるならば、電流の周りに磁界が発生する、すなわちこの磁気的歪を、あえて磁束密度と呼ばずに、素直に磁界と呼びたい気持ちになる。筆者が電磁気学を学生に教えるとき、いつもそう思う。しかし、残念ながら、使いたい用語である「磁界」が上述のように既に別の定義で使われているため、違う名前「磁束密度」にしたわけで、電磁気学発展の過程における歴史的都合と言わざるを得ない。

磁束密度に対して、このような入り方をすると、磁気的な場を表す $\boldsymbol{B}$ の用語としての磁束密度（=単位面積当たりの磁束）のイメージが湧いてこないと思う。しかし $\boldsymbol{B}$ の単位を見ると[N/(Am)]= [0,1,-2,-1]であるが、磁荷（磁束）の単位[Wb]=[Nm/A]=[2,1,-2,-1]を使うと[Wb/m^2]=[0,1,-2,-1]となって、なるほど、磁束密度と呼ぶことに納得できる。ずいぶん不親切な入り方であったが、これを知って納得でき、磁界とつけなくて良かったという気分になってくる（電磁気学は先人の知恵によってうまく組み立てられている）。

ビオ・サバールの法則

ビオ・サバールの法則は、***E-B*** 対応を示す根拠としてよく使われる。図 1 (a)で、z 軸上の微小区間 dz に電荷が電荷密度λ [C/m]で分布している。このとき、図の P 点における電界の z 軸と直交する方向成分 dE_x は、クーロンの法則より、

$$dE_x = \frac{\lambda dz \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{5}$$

である。同様に、図 1 (b)に示す微小区間 dz を流れる電流素片 I により、P 点に発生する磁束密度 dB は、ビオ・サバールの法則より、

$$dB = \frac{\mu_0 I dz \sin\theta}{4\pi r^2} \tag{6}$$

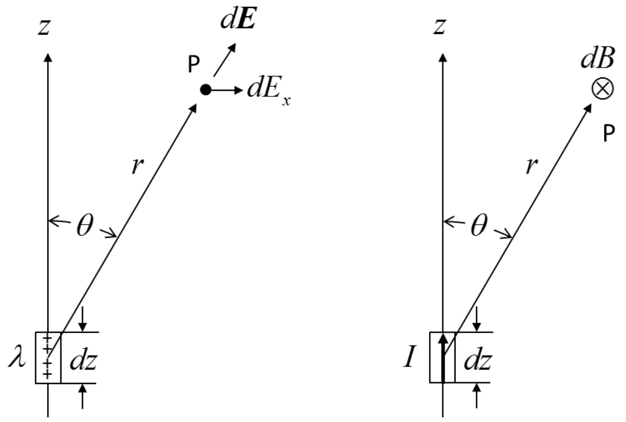
である。この二つの式より、電気と磁気の間には $\boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{B},\ \lambda \leftrightarrow I,\ 1/\varepsilon_0 \leftrightarrow \mu_0$ の対応関係が有り、この場合は ***E-B*** 対応が良さそうに見える。

さらに、誘電体内の静電界、及び磁性体内の静磁界を想定し、$\varepsilon_0 \to \varepsilon$、$\mu_0 \to \mu$とし、かつ、$D=\varepsilon E, B=\mu H$ を使って $dE \to dD$、$dB \to dH$ とすると、(5), (6)式は、それぞれ次式になる。

$$dD_x = \frac{\lambda dz \sin\theta}{4\pi r^2} \tag{7a}$$

$$dH = \frac{I dz \sin\theta}{4\pi r^2} \tag{7b}$$

この式では、媒質の特性であるεやμが消え、$\boldsymbol{D} \leftrightarrow \boldsymbol{H},\ \lambda \leftrightarrow I$ の対称性が顕在化し、***E-B***（***D-H***）対応を後押ししている。



(a) クーロンの法則　　(b) ビオ・サバールの法則

図１　電界と磁束密度の発生の類似性

単位で見ると

電磁気学に現われる物理量のうち、$E, D, H, B, Q, Q_m, \varepsilon, \mu, R$（抵抗、インピーダンス）の組立単位は表１よりそれぞれ

$E \rightarrow$ [1,1,-3,-1]
$D \rightarrow$ [-2,0,1,1]
$H \rightarrow$ [-1,0,0, 1]
$B \rightarrow$ [0,1,-2,-1]
$Q \rightarrow$ [0,0,1,1]
$Q_m \rightarrow$ [2,1,-2,-1]
$\varepsilon \rightarrow$ [-3,-1,4,2]
$\mu \rightarrow$ [0,1,-2,-1]
$R \rightarrow$ [2,1,-3,-2]

であり、単位[ ]でみると、次の関係が成立する。

$$\left[\frac{E}{H}\right]=\left[\frac{B}{D}\right]=\left[\frac{Q_m}{Q}\right]=\left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\right]=[R]=[2,1,-3,-2] \tag{8}$$

上式の最初の２辺の等式を分子・分母の対応関係で見るか、分子同士・分母同士の関係で見るかにより、*E-H, B-D* 対応ともいえるし、*E-B, H-D* 対応ともいえ、ここからは、目的の答えは見えてこない。

媒質内での ***E*, *D*, *H*, *B***

真空中の電磁気現象については、***E*** か ***D***、***H*** か ***B*** のどちらかだけで議論ができる（もう一方は、ε_0, μ_0 で結び付けられる）。二つの量の違いを意識しなくてはいけなくなるのは、誘電体や磁性体での電磁気現象を扱うときになる。媒質として、***E*, *D*** に対しては誘電体を、***H*, *B*** に対しては磁性体を考え、図 2 のような 2 層媒質での境界条件を調べる。

マックスウェル方程式の $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$（誘電体内では$\rho$=0），$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ より、***D*** も ***B*** も面と垂直方向（単位法線ベクトル ***n*** 方向）の成分は等しい（電束も磁束も特性が異なる媒質（誘電体、磁性体）の境界の法線方向を連続的に貫いて行くイメージ）。同様に、$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$（静電界）、$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{0}$（静磁界で、かつ、磁性体内での伝導電流無し）より、面の接線成分方向（単位接線ベクトル ***t*** 方向）の成分は等しい。この結果、角度θ_1とθ_2の関係も自動的に定まる。これらは、以下の電気・磁気間対応になる。

$$\boldsymbol{D}_1\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{D}_2\cdot\boldsymbol{n}\leftrightarrow\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{B}_2\cdot\boldsymbol{n} \tag{9a}$$

$$\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{t}=\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{t}\leftrightarrow\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{t}=\boldsymbol{H}_2\cdot\boldsymbol{t} \tag{9b}$$

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\leftrightarrow\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1}=\frac{\mu_2}{\mu_1} \tag{9c}$$

均一媒質内の ***E*** と ***D***、***H*** と ***B*** の対応については、電気の分極ベクトル ***P***、磁気の分極ベクトル（磁化ベクトル）$\boldsymbol{P}_m$ を用いて、以下のように表せる。

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}=\varepsilon\boldsymbol{E}\leftrightarrow\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}+\boldsymbol{P}_m=\mu\boldsymbol{H} \tag{10}$$

(9)式、(10)式より、媒質内の電界・磁界の振る舞いでは、$\boldsymbol{E}\leftrightarrow\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}\leftrightarrow\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{P}\leftrightarrow\boldsymbol{P}_m$, $\varepsilon\leftrightarrow\mu$ となり、電気と磁気の対称性がはっきりしている。

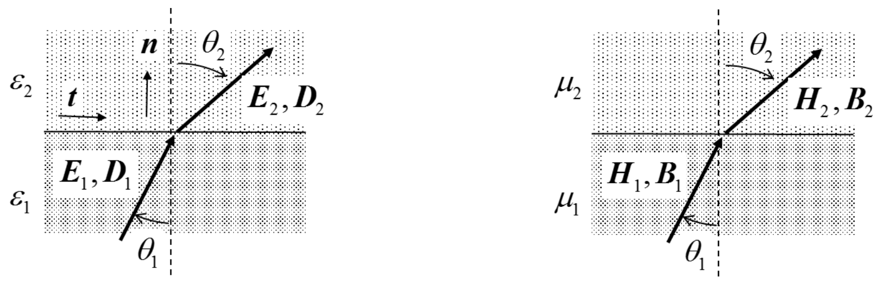


図２　２層媒質中の電磁界

教科書では

では、大学の授業（あるいは教科書）では電磁気学はどう教えられているのであろうか。図３は一般的な教科書の進み方を図にしたもので、この形（①から順番での）での授業が主流であろう。（図３は、電磁気学授業のうちの静電界と静磁界の部分で、かつ、本資料では ***E*,*D*,*H*,*B*** に絞って議論しており、その他の大事な法則（ガウスの法則、電荷保存則、アンペアの周回積分の法則）や物理量（スカラーポテンシャル、ベクトルポテンシャルなど）は省いている）。

結局は、仮想的なものとは言え、磁荷を丁寧に説明して磁界（***H***）の説明の出発点とするか、磁荷は実態が無いものとしてほとんど素通りにするかで、***E*,*D*,*H*,*B*** の関係の説明のしかたが分かれる（前者が ***E-H*** 対応、後者が ***E-B*** 対応）。電磁気学の授業において、どちらの立場を取るか、凡そ、半々と言われているが、どうであろうか。

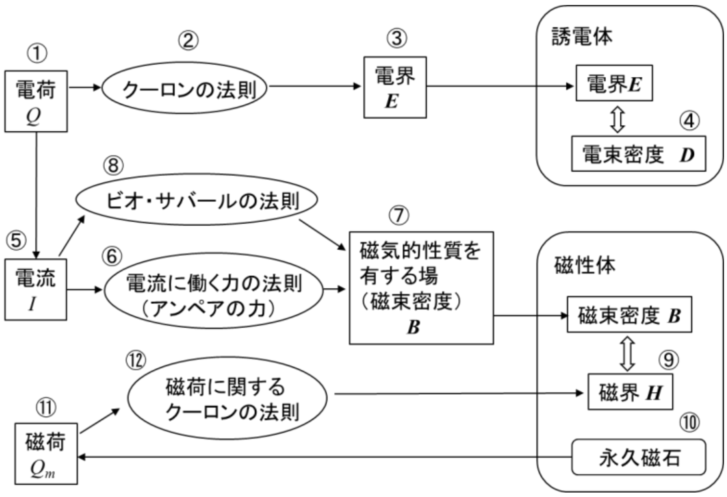


図３　一般的な教科書に見る電界・磁界諸量の位置づけ（数値は現われる順番）

対応関係の整理

電気と磁気の対応について、電荷と磁荷を出発点にすれば、***E*** と ***H***、***D*** と ***B*** の対応が、実在する物理量である電荷と電流を出発点にすれば、***E*** と ***B***、***D*** と ***H*** の対応が自然である。前者では、電荷と磁荷のそれぞれのクーロンの法則が、後者では、電荷のクーロンの法則と電流素片のビオ・サバールの法則が対になる。単独磁荷の存在を認めない今日の電磁気学では、磁荷を磁気現象の出発点にすえにくい事情があり、対応関係を複雑にしている。しかし、媒質内での ***E*,*D***、***H*,*B*** の関係を見れば、***E-H***、***D-B*** 対応にきれいな対称性があり、本資料では、この物理的特徴の一致を理由に ***E-H***、***D-B*** 対応を押したい。

なお、本シリーズの[2]では、マックスウェルの方程式を電磁ポテンシャル（スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル）で表し、電荷と電流に対して対称性の良い美しい形を示し、その解説を行っている。そこでは、***E-B*** 対応での定式化になっており、この問題は簡単

には結論が出ないのかもしれない。どちらとも言える一種の流儀（あるいは宗教論争）に似ている。

冒頭で述べたように、用語名を見て、電界（***E***）と磁界（***H***）、電束密度（***D***）と磁束密度（***B***）が対応していると考えるのが当たり前、と言うのは、必ずしもそうではない、と言うことが理解できたと思う。

参考文献

[1] 広瀬立成, *E* と *H*, *D* と *B*, 物理学 One Point シリーズ 10, 共立出版, 1981.

[2] 唐沢好男, "電磁気学の奥深さ(2)：マックスウェル方程式の美しい形,"私報, 技術レポート YK-24, URL: http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-024_EM-2.pdf

表 1　電磁気関連物理量の MKSA 単位系での次元

（表の右欄の 4 つの数値は MKSA 単位系において、$m^a kg^b s^c A^d$ の指数部分。本文では、このセットを組立単位と呼び、[*a*,*b*,*c*,*d*]で表す。物理量の積は指数の和、商は差で求められ、単位の変化を追うのに便利である。この 4 つの基本単位の並び順にはいくつかの流儀があるが、本資料では MKSA [m, kg, s, A]の順で並べている。）

名称（物理量）	代表的表記	単位名称	物理単位	組立単位 M (m)	K (kg)	S (s)	A(A)
力	F	N（ニュートン）	J/m, kgm/s^2	1	1	-2	
エネルギー(仕事)	U	J（ジュール）	Nm	2	1	-2	
電力	P	W（ワット）	J/s, VA	2	1	-3	
電圧	V, ϕ	V（ボルト）	W/A	2	1	-3	-1
電流	I	A（アンペア）	W/V				1
電流密度	i		A/m^2	-2			1
抵抗(インピーダンス)	R	Ω（オーム）	V/A	2	1	-3	-2
導電率			1/Ωm	-3	-1	3	2
静電容量	C	F（ファラド）	C/V	-2	-1	4	2
インダクタンス	L	H（ヘンリー）	J/A^2	2	1	-2	-2
誘電率	ε		F/m	-3	-1	4	2
透磁率	μ		H/m	1	1	-2	-2
電荷・電束	Q, q	C（クーロン）	As			1	1
磁荷・磁束	Q_m, q_m	Wb（ウェーバ）	Nm/A, Tm^2, Vs	2	1	-2	-1
電束密度	D		C/m^2	-2		1	1
磁束密度	B	T（テスラ）	N/Am, Wb/m^2		1	-2	-1
電界	E		V/m	1	1	-3	-1
磁界	H		A/m	-1			1
ベクトルポテンシャル	A		Tm	1	1	-2	-1
周波数	f	Hz（ヘルツ）	1/s			-1	