Technical Report YK-024
July 01, 2019
Y. Karasawa

電磁気学の奥深さ（２）：マックスウェル方程式の美しい形

大学の学部レベルの電磁気学では、電界や磁界に関する物理量とそれらを関係付ける４つの法則によって組み立てられたマックスウェルの方程式を学ぶ。さらに、一部の教科書では、その後に、マックスウェルの方程式を、二つの電磁ポテンシャル（スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル）を用いて、より美しい形で表すことができることを教えてくれる。むしろ、この形の方が本質だと言う気持ちも込められている。しかし、この部分の式の導出には、ゲージ変換と言う数学的テクニックが用いられるため、その理解は、学部学生には少し敷居が高いと感じる。難しいと言う意味ではなく、丁寧な説明が必要だと言う意味である。本資料は、マックスウェルの方程式までは学んでいる読者を対象に、この美しい方程式が出来上がるまでを、丁寧に噛み砕いた形でまとめている。ストーリー立ては、文献[1]（砂川重信、理論電磁気学、２章３節）に習い、[2]のネット上コンテンツ（EMAN の物理学：電磁気学）も大いに参考にしている。

１．マックスウェルの方程式

マックスウェルの方程式は、以下の 4 つである。(式の物理量の説明は省略。本シリーズの[3]など参照)。

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \text{（電磁誘導の法則）} \tag{1a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad \text{（アンペア・マックスウェルの法則）} \tag{1b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \qquad \text{（電束密度に関するガウスの法則）} \tag{1c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \text{（磁束密度に関すガウスの法則）} \tag{1d}$$

この 4 つの連立方程式には、全ての電磁気現象のからくりが込められている。もともとは、複雑に組み立てられたマックスウェルの電磁気学の理論を、ヘルツやヘビサイド等がエッセンスを抽出して、この４つの式に整理したと言われている。電界・磁界と言った求めたい物理量で表されていて、その意味も汲み取りやすく、優れた表現であることに間違いは無い。しかし、雑多な感は拭えず、より、物理の本質に近づけるような表現の追及も行われている。その一つに、電界や磁界ではなく、電磁ポテンシャル（スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル）を用いた表現形式がある。本資料では、この形が得られるまでを丁寧に掘り起こしてみたい。

２．解法のための数学的テクニック：ゲージ変換

式の導出には、ゲージ変換と言う数学的テクニックが用いられる。先ずは、そのゲージ変換の意味を説明する。

求めたい量 A,B があり、以下のような x,y の関数で与えられるものとする。

$$A = f(x,y),\quad B = g(x,y) \tag{2}$$

この x, y は次の連立方程式を解いて求められるものであるとする。

$$u(x,y) = 0,\quad v(x,y) = 0 \tag{3}$$

ところがこの連立方程式が複雑で、解くのが困難であるときどうしよう。もし、

$$u'(x',y') = 0,\quad v'(x',y') = 0 \tag{4}$$

ならば解けて、かつ、

$$A = f(x',y'),\quad B = g(x',y') \tag{5}$$

で、A, B の値が変わらないのであれば、その値を求めることが目的なのだから、x, y の代わりに x',y'であってもまったく問題が無い。x, y は荷物の配達役だと思えばよい。欲しい荷物を届けてくれるのなら x, y に限ることは無い。

(2)式と(5)式が同値となるための条件式

$$w'(x',y') = 0 \tag{6}$$

が存在すれば、(4)式と(6)式の連立方程式で解を求めることができる。このように、x と y のセットを A, B の値が変わらないように x'と y'のセットに変換することをゲージ変換と呼ぶ。A, B が x や y の時間・空間領域の偏微分を含むような場合に、積分定数に自由が利き、そういうような置き換えが可能になる。要は、A, B と x, y が一対一対応でなく、不確定性が有る場合である。

ゲージ変換は、目的に適う解を求めることを容易にするための数学的テクニックであって、加えた条件式に物理的意味を求めることは無意味である。また、様々なゲージ変換が可能な中で、最も解法に見通しの良い変換式を見つけられるかどうかはセンスである。

３．電磁ポテンシャルで表したマックスウェルの方程式

(1)式のマックスウェルの方程式の 4 つの物理量 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}$ のうちの $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{H}$ を $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}/\mu$を使って、電界 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ だけの方程式に変える。

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{7a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{i} + \varepsilon\mu \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{7b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{7c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{7d}$$

次に、これらの式の $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ を、電磁ポテンシャルϕ（スカラーポテンシャル）と $\boldsymbol{A}$（ベクトルポテンシャル）に置き換えてゆく。

(7d)式は

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{8}$$

である。(8)を(7d)に代入すればベクトルの公式より恒等的に 0 になるためである。(7a)式の $\boldsymbol{B}$ も $\boldsymbol{A}$ に置き換えて整理すると次式になる。

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{9}$$

これより、

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{10}$$

となる。(10)式右辺第 1 項は、静電界のときの $\boldsymbol{E}$ とϕの関係であり、これを加えても、(9)式が満たされるからである。

最終的に求めたい物理量は $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ であるが、式(8)と(10)により、二つの電磁ポテンシャルϕと $\boldsymbol{A}$ が求められればよいことになる。では、そのϕと $\boldsymbol{A}$ が満たすマックスウェルの方程式を求めて行く。(7b)式と(7c)式の $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ を、ϕと $\boldsymbol{A}$ により書き換えると次式が得られる。

$$-\left(\Delta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \boldsymbol{A} + \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mu \boldsymbol{i} \tag{11a}$$

$$\Delta\phi + \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{11b}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta \boldsymbol{A} \qquad \text{（ベクトル公式）}$$

$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{（ラプラシアン）}$$

一応、これで、ϕと $\boldsymbol{A}$ で表されるマックスウェルの方程式を得たが、式の形もアンバランスで美しくなく、かつ、解法も難しそうである。ここで、２節で述べたゲージ変換の出番になる。

４．ローレンツゲージを用いたマックスウェル方程式の美しい形

次の展開のスタートラインの意味で、(8)式と(10)式を再掲する。

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{12a}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{12b}$$

$(\phi, \boldsymbol{A})$のゲージ変換、すなわち、$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ が不変な$(\phi', \boldsymbol{A}')$への変換法を探る。

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi \tag{13}$$

と表される関数χの勾配を加えても、(12b)式は変わらない。一方、(12a)式は影響を受ける。この影響を、

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{14}$$

とすることにより、打ち消すことができる。これが$(\phi, \boldsymbol{A})$から$(\phi', \boldsymbol{A}')$へのゲージ変換である。

この変換を、式(11)を見ながら、具体的に行う。

もし、(11a)式の左辺第 2 項の中の勾配を求めるスカラー関数が 0 であれば、式が極めて簡潔になることに気がつく。すなわち、

$$\text{If} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{15a}$$

$$\rightarrow \left(\Delta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{i} \tag{15b}$$

さらに、(15a)式の条件を(11b)式に加えると、以下のようになる。

$$\left(\Delta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{16}$$

式(15a)の条件式は、ローレンツ条件と呼ばれる。またこの変換のゲージは、ローレンツゲージと呼ばれる。いよいよ、最後の詰めに。

式(15b), (16)で示した$\phi, \boldsymbol{A}$ は、元の式(11)の$\phi, \boldsymbol{A}$ とは違うもの（＝ローレンツゲージで変換されたもの）になっているので、これを$\phi', \boldsymbol{A}'$と置き直し、二つの方程式とその条件式を整理すると次式になる。

$$\Box \boldsymbol{A}' = -\mu \boldsymbol{i} \tag{17a}$$

$$\Box \phi' = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{17b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}'+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi'}{\partial t}=0 \tag{17c}$$

$$\Box\equiv\Delta-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$ （ダランベール演算子（ダランベルシアン））

式(17a), (17b)は対称性に優れた非常に美しい形である。複雑な 2 つの連立方程式が、きれいな形の 3 つの連立方程式（＝解ける形になっている）に変わったわけである。この解法は、 (17a)式から $\boldsymbol{A}'$を、 (17b)式からϕ'を独立に解き、それぞれの中に不確定性を持つ組の中で、(17c)式を満たす解を定める手順になる。このようにして求めた$\phi', \boldsymbol{A}'$を(12)式の$\phi, \boldsymbol{A}$ に代入することによって、目的の物理量 $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ を得ることができる。

式の導出に関してはここで終わり、以下は蛇足である。式(13), (14)で示したゲージ変換量χについて触れることは無かった。なぜなら、それを含んだ$\phi', \boldsymbol{A}'$が求められたのだから、χを求める必要が無いからである。でも、それが具体的にどのようなものか具体的に知りたいということもあろう。それを求めてみる。ゲージ変換の条件式(17c)の左辺をϕと $\boldsymbol{A}$ で置き換え、0 と置くと

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A}'+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi'}{\partial t}&=\nabla\cdot\left(\boldsymbol{A}+\nabla\chi\right)+\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)\\&=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}+\Delta\chi-\varepsilon\mu\frac{\partial\chi}{\partial t}=0\end{aligned} \tag{18}$$

となるので、これを整理すると、次式が得られる。

$$\Box\chi=-\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{19}$$

右辺の$\phi, \boldsymbol{A}$ が与えられれば、χが求められる形である。実際には、$\phi, \boldsymbol{A}$ が求められないからゲージ変換して$\phi', \boldsymbol{A}'$を求めてきたのであるから、この式を解いてχを求めることは無い。解が存在することが言えればよく、$\phi', \boldsymbol{A}'$が既に求められたのであるから、解の存在は言えているということになる。

本資料の目的は、美しいマックスウェルの方程式を自分たちで作ってみる、と言うことであったので、そのことは、ここまでで終わっている。以下は、求めた方程式(17)の解について、若干触れたい。

整理された式(17)を見ると、電荷がスカラーポテンシャルを、電流がベクトルポテンシャルを作ると読み取れる。しかも、一方がスカラー場を、もう一方がベクトル場を作ると言う違いを除いて、場の構造が同じであることがわかる。この美しさを見ると、電磁場の本質的な物理量は、電界と磁界は二次的なもので、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルがそれであると言って良さそうに見えるがどうであろうか？

式(17)から$\phi', \boldsymbol{A}'$を求める方法も確立されている。具体的な解は、電荷や電流の置かれてい

る環境に依存して多様なものになる。一般には、グリーン関数を用いて表されるが、それはまた、別の機会に述べたい。

最後に、時間変動の無い場、すなわち静電界と静磁界についてみてみたい。(17)式の時間微分項を 0 として、(17a), (17b)式は次式となる。

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{20a}$$

$$\Delta\boldsymbol{A} = -\mu\boldsymbol{i} \tag{20b}$$

もちろん、ローレンツ条件も満たしている。式(20)は、スカラーポテンシャル・ベクトルポテンシャルに関するポアソンの方程式と呼ばれ、それぞれの解は

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dv' \tag{21a}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dv' \tag{21b}$$

となる。真空中の原点に点電荷 Q がある場合には、(21a)式は、デルタ関数を用いて $\rho(\boldsymbol{r}')=Q\delta(\boldsymbol{r}')$と置き換えられ、$\phi=Q/(4\pi\varepsilon_0 r)$となって、電磁気学の授業の始めの頃に習うお馴染みの電位の式になる。同様に、原点に電流素片を置けば、(21b)式はビオ・サバールの法則に行き着く。

本シリーズの[3]で述べたように、電磁気学には、電気と磁気に対して ***E-H*** 対応と ***E-B*** 対応の二つの流儀があるが、本稿の切り口においては、***E-B*** 対応が優れていると感じる。

参考文献

[1] 砂川重信, *理論電磁気学*, 紀伊国屋書店、1999.

[2] 「*EMAN の物理学*」の内の「*電磁気学*」、電磁ポテンシャル〜遅延ポテンシャル、
https://eman-physics.net/

[3] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ（１）: 電気と磁気の対応は ***E-H*** か、***E-B*** か,” 私報, 技術レポート YK-23,
URL: http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-023_EM-1.pdf