Technical Report YK-025
July 01, 2019
Y. Karasawa

電磁気学の奥深さ（３）：相対性理論への道

以下、電磁気学と相対性理論を結ぶ話題を二つ取り上げる。このうち２節の話題は、その分野に専門的知識の乏しい筆者が思いつきの話をしていると受け止めてもらったほうが無難かもしれない。

１．パラドックス？

アインシュタインの書いた相対性理論（特殊相対性理論、1905 年）の論文の題名は「運動している物体の電気力学（Zur Elektrodynamik bewegter Körper）」である。なぜ電気と相対論が関係しているのだろうか？実は、相対性理論は電磁気学（マックスウェルの方程式）が醸し出す不思議な性質を突き詰める中から生れたと言われている。

アインシュタインは電気と磁気の力に関するある思考実験を行った。そのことは、「ファインマン物理学 III（§13-6, 7）」[1]で紹介されている。そこでは、電流が流れている銅線と、銅線の中の電子と同じ速度で、銅線と平行して走る電子に対する力に関する思考実験である。この思考実験を筆者なりに整理した形の問題を考えてみたい。ファインマンの本の設定とは異なるが、言いたいことは同じのつもりである。ファインマンの本にある設定は、少し複雑であるが、そこでなされている説明は正しいはず。本資料での思考実験はそれに比べて単純化している。そのため、筆者の思い違いが有るかも知れず、真偽も含めて一緒に考えてほしい。（と言うような怪しい話は聞きたくない。権威あるファインマン本にある思考実験を知りたい、と言う人もいるかもしれない。そういう人のために、本資料にも、付録２として載せている）。

図１のように、距離 r 離れた２本の無限直線上に、それぞれ、電荷密度λ_0,λで電荷が密に並んでいて、かつこれが光速 c で z 方向に動いているとする。このとき、それぞれの線の電流 I_0, I は $c\lambda_0, c\lambda$である。右側の電流に加わる長さ dl 当たりの力を調べる。ここに存在する力は、同一電荷同士が反発するクーロン力 dF_e と、同一方向の電流同士が引き合う dF_m の二つであり、以下となる。

$$dF_e = \frac{\lambda_0 \lambda dl}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{1a}$$

$$dF_m = \frac{\mu_0 I_0 I dl}{2\pi r} = \frac{\mu_0 c^2 \lambda_0 \lambda dl}{2\pi r} = \varepsilon_0\mu_0 c^2 dF_e = dF_e \quad \left(\because\ c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\right) \tag{1b}$$

この設定では、反対方向の力が打ち消しあって、合成力は 0 になる。

次に、観測者が速度 v で z 方向に動き、この観測者の視点で力関係を見てみる。クーロン力 dF_e'は動いても動かなくても変化無く

$$dF_e' = dF_e \tag{2}$$

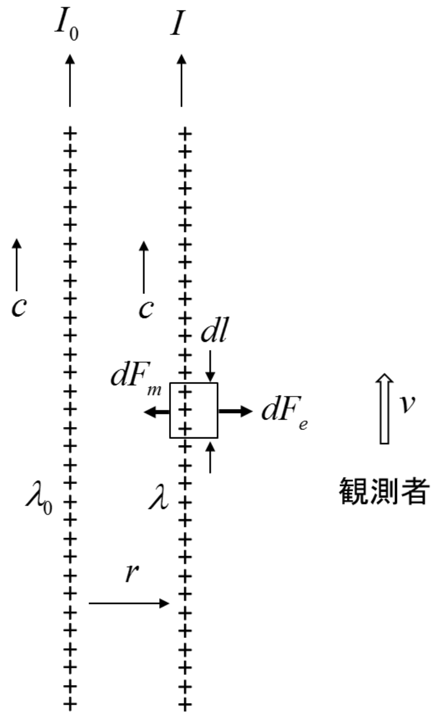


図１　思考実験の図（電流が流れる方向を z 軸）

である。一方、電流に働く力 dF_m'は、電流の速度が c-v に見え、単位時間に通過する電荷の数が$(c$-$v)/c$ の比率で少なくなるので、

$$dF_m' = \frac{\mu_0 I_0' I' dl}{2\pi r} = \frac{\mu_0 (c-v)^2 \lambda_0 \lambda dl}{2\pi r} = \varepsilon_0 \mu_0 (c-v)^2 dF_e' \le dF_e' \tag{3}$$

となり、速度 v の増加と共に、だんだん弱くなる。光の速度(v=c)で進んだ場合には、磁気力は消えてしまう。

静止している観測者（v=0）の目には力のバランスが取れていたのに、動いている観測者にはバランスが崩れて見えるのは、物理として明らかに不合理である。なぜなら、観測者は物理現象を見ているだけであって、なんら働きかけをしているわけではないからである。本来、全ての慣性系（等速移動する観測系）において、物理現象は同等ではないのであろうか？この思考実験はどこがおかしいのであろうか？ あるいは、電磁気学そのもの（特に磁界の捉え方）に問題点が潜んでいるのであろうか？ 以下、このパラドックスを考える。

静止している系の座標を、x,y,z,t で、動いている系の座標（=観測者の目で見る座標）を、x',y',z',t'で表す。上記の思考実験における座標変換は、移動方向を z 軸方向にしているので、

$$x' = x,\;\; y' = y,\;\; z' = z - vt,\;\; t' = t \tag{4}$$

であった。この変換はガリレイ変換と呼ばれ、ニュートン力学はこれに基礎を置いている（＝ニュートン力学はガリレイ変換に対して不変である）。

アインシュタインは上記矛盾を解決するため、以下の二つの原理を公理とすることを考えた。

１）相対性原理（全ての慣性系は同等である）

２）光速度不変の原理（光の速度は光源や観測者の運動とは無関係に決まる）

１）の原理を満たすためには、２）の原理を受け入れることが必要になる、と読み替えても良い。この原理に従って組み立てられた力学理論が特殊相対性理論である。この場合の座標変換は、二つの条件

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$$

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0 \tag{5}$$

を満たすように、図１の観測系について座標変換すると

$$x'=x,\ \ y'=y$$

$$z'=\gamma(z-vt)$$

$$t'=\gamma\left(t-\frac{vz}{c^2}\right)=\frac{1}{\gamma}t \quad (\because z=vt) \tag{6}$$

$$\gamma\equiv\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\geq 1$$

が得られる。

この変換はローレンツ変換、γはローレンツ因子と呼ばれる。静止系の座標から移動系の座標を見れば、静止系の座標に対して、空間軸（この場合は z'軸）がγ倍に、時間軸（t'）が $1/\gamma$倍になっている。動いているものに対しては、長さが縮み、時間がゆっくり進んでいるように見えるということになる。

ローレンツ変換の考えを踏まえ、観測者の視点から改めて図１の現象を見てみよう。相対的なことであるから、観測者にとっては自分が静止していて、観測対象が$-z$ 方向に速度 v で動いていると見える。故に、観測者が静止系であって、観測対象が動いていると言う状態になる（z と z'、t と t'の関係が逆転している）。左側線上の電荷密度は長さが縮んだ分$\gamma\lambda_0$と強められている。クーロン力は、左側の電荷列が作る電界が右側の長さ dl にある電化に働く力になるが、長さ dl にある電荷量も静止系に対してγ倍になっているので、クーロン力 dF_e' は以下で算定される。

$$dF_e' = \frac{\gamma^2 \lambda_0 \lambda dl}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{7}$$

一方、それぞれの電流 I_0',I'は電荷の動く速度 c は変わらないので、$c\gamma\lambda_0$, $c\gamma\lambda$となり、電流 I'の長さ dl 当たりの力 dF_m'は

$$dF_m' = \frac{\mu_0 I_0' I' dl}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \gamma^2 c^2 \lambda_0 \lambda dl}{2\pi r} = \varepsilon_0 \mu_0 c^2 F_e' = dF_e' \tag{8}$$

となる。これより、二つの力は観測者の速度の如何に関わらずバランスが取れていて、先のパラドックスが解消されたわけである。

アインシュタインは、平行して移動する電子の思考実験を通じて、「ニュートン力学は厳密理論、電磁気学は近似理論」と言う当時の定説（ガリレイ変換に対して不変であるべきという）を覆し、電磁気学に厳密理論の軍配を上げたのである。そして、力学に対して、光速度不変の原理を基盤に、特殊相対性理論を作り上げたのである。電磁気学は、相対性理論への架け橋とも言えるわけである。

以下、図１の思考実験について二つのことを補足したい。一つは、この例のように、電流間に働く力にクーロン力も加わってしまっては、純粋な磁気力 dF_m が測定できず、アンペアの実験（=電流が流れている 2 本の導線の間に働く力を測定した実験）は大丈夫だったのだろうかと言う点である。これは、上記思考実験での電流と実際に金属導線に流れる電流の違いからきている。導線はそれを構成する原子で満たされていて、電流はそこから飛び出した自由電子が運んでいる。自由電子が飛び出した原子はプラス電荷の働きを持ち、かつ、重いので移動はしない。このため、電流は流れるが電気的には中性で、クーロン力は働かない。故に、アンペアの測定に問題は無い。なお、付録２にも示したように、ファインマンの本ではこの例（プラス電荷の中を流れる電流に対して、平行に動く電子に働く力）での説明を行っている。

もう一点は電流の速さである。自由空間を伝搬する電波の速度が光の速度になることはマックスウェルの方程式が教えてくれている。導線を流れる電流の速度（＝電気の伝わる速さ）も光の速度に近い（？）と言われている。故に、図１の思考実験では電荷の移動速度を光速とする電流を仮定した。しかし、実際の電子そのものの移動速度は、カタツムリの歩み程度であるらしい。そんな電子が作る電流にどうして光の速度がでてくるのであろうか？これはこれで別のパラドックスであるが、これに答えるには、量子力学の世界に踏み込まねばならず、分かりやすく説明するのは結構難しいようである。興味ある読者は、先人たちがそれぞれの考察をしているので調べてみてほしい（例えば、[2]）。

本稿で重要な働きをしたローレンツ変換は、その名のとおり、ローレンツが導き出したものである。ローレンツはエーテル中を伝搬する光や電波の観測問題をこのような変換で考えれば説明ができると説いた。アインシュタインは、物理の根底に二つの原理（相対性原理、光速一定の原理）があるとし、それを公理とした力学を組み立てなおし相対性理論を得た。

結果として、座標変換がローレンツ変換になるが、それはあくまで付随的なことであった。相対性理論より半世紀前に生まれていた電磁気学が、相対性理論の荒波を無傷で切り抜けられたのは、マックスェルの方程式が、ローレンツ変換に対して不変であったことにある。我々（マックスウェル教の信者）はこれを喜びたい。

２．電波の重さ

相対性理論は、質量 m の物質には mc^2 のエネルギーがあることを教えてくれる。質量は移動速度 v の関数で、式(6)に示したオイラー因子γを用いて、次式で与えられる[3],[4]。

$$m(v)=\gamma(v)m_0 \tag{9}$$

ここで、m_0 は物体が静止しているときの質量（静止質量と呼ばれる）である。速度が大きくなるほど重くなり $v=c$ で無限大になる。速度 v の物体の相対論的運動エネルギーΔU は

$$\Delta U(v)=\left(m(v)-m_0\right)c^2 \tag{10}$$

で与えられ、運動エネルギーは質量の増加分に比例する。$v<<c$ のときは、

$$\Delta U(v)\approx\frac{1}{2}mv^2 \quad (v<<c) \tag{11}$$

となり、ニュートン力学でお馴染みの式になる。

これを踏まえて、電磁波のエネルギーの等価質量 m_{EM} を考えてみたい。

自由空間でのマックスウェルの方程式、

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{12a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{12b}$$

の、(12a)の両辺に $\boldsymbol{H}$・、(12b)に $\boldsymbol{E}$・を作用させ、両式を引き算して整理すると、

$$-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}-\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right) \tag{13}$$

となる。さらに、$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ として、(13)を $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ のみで表すと次式の形で表される。

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0E^2+\mu_0H^2\right)=\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right) \tag{14}$$

両辺とも、基本単位[MKSA]で表す組立単位（組立単位の読み方は付録１の表参照）は[-1,1,-3,0]となり、単位体積当たりの電力（=電力密度）を表している。右辺の $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ は、ポインティングベクトルと呼ばれ、単位面積当たりの電磁波が単位時間に持ち出すエネルギー

[0,1,-3,0]を、左辺の$\varepsilon_0 E^2/2$と$\mu_0 H^2/2$は単位体積当たりの電気エネルギーと磁気エネルギーで単位は[-1,1,-2,0]である。自由空間を伝搬する電磁波は$\varepsilon_0 E^2=\mu_0 H^2$となるので、単位体積当たりの電磁エネルギー（エネルギー密度）uは以下になる。

$$u=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\mu_0 H^2\right)=\varepsilon_0 E^2 \quad [\mathrm{J/m^3}]\ (=[-1,1,-2,0]) \tag{15}$$

ところで、電磁波には質量はないことになっている。すなわち、

$$m_{EM,0}=0 \tag{16}$$

である。一方、単位体積当たりの質量を改めてmとすると、どのような物質も$u=mc^2$のエネルギー密度を持つ。質量は$m=u/c^2$であり、cは慣性系に拠らない絶対定数なので、エネルギーがあるところには必ず質量があると言うことになる。光速で伝搬する質量0の電磁波といえども、エネルギーがあるのだから、（等価的な意味での）質量があると推論できる。その質量は、

$$m_{EM}=\varepsilon_0 E^2/c^2=\varepsilon_0^2\mu_0 E^2=\mu_0 D^2\left(=\varepsilon_0 B^2\right) \tag{17}$$

と算定される。$\mu_0 D^2$の組立単位は[1,1,-2,-2]+2[-2,0,1,1]=[-3,1,0,0]=[kg/m^3]であり、次元は合っている。ではなぜ、質量0と言われる電波が実効的な質量をもてるのであろうか？それは

$$m_{EM}=\gamma(c)m_{EM,0}=\infty\times 0=\mu_0 D^2 \tag{18}$$

であったのだと言っても否定することは難しい。ちなみに、E=1 [V/m]では、1m^{3}当たりの実効質量は、およそ10^{-28} kgと算定される。

一般相対性理論によって、光が重力によって曲がることが知られているが、実効的な質量を有して光の速度で飛んでいるとすれば、電磁波も例外ではない。故に、電波も重力によって光と同じように曲がると結論付けたいが、どうであろうか。

（補足 : 光を質量がある光子としてニュートン力学で求めたものと、一般相対性理論で求めたもの（空間の曲がりと解釈されている）には曲がり方でおよそ倍の違いになるらしい[5]が、曲がることに対する感覚的な理解はこれでよいように思う。（18）式の結論は、[3],[4]を読んでいるうちに取り付かれた筆者の妄想かもしれない。あるいは、こういう初歩的な議論は、この分野の人たち（=電磁気学と相対性理論の境界領域を極める人たち）には常識なのかもしれない。そうであったとしても、こういう議論をすること自体、科学に対する好奇心が掻き立てられ、筆者には楽しい。）

参考文献

[1] R.P.ファインマン, R.B.レイトン, M.L.サンズ:（宮島龍興訳）, *ファインマン物理学 III 電磁気学*（§13-6, 7）, 岩波書店, 1969.

[2] http://azusa.shinshu-u.ac.jp/~coterra/enjoyphys/current2.html

[3] 江沢洋, 上條隆志（偏）, *相対論と電磁場*, 日本評論社, 2019.03.

[4] 山田克哉, *E=mc²のからくり*, ブルーバックス B-2048, 講談社, 2018.02.

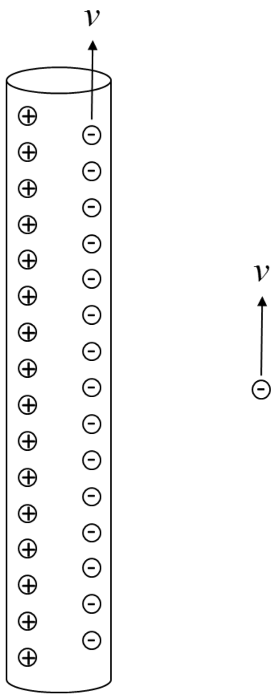
[5] https://eman-physics.net/relativity/bend.html

付録１　電磁気関連物理量の MKSA 単位系での次元

（表の右欄の 4 つの数値は MKSA 単位系において、$m^a kg^b s^c A^d$ の指数部分。本文では、このセットを組立単位と呼び、[*a*,*b*,*c*,*d*]で表す。物理量の積は指数の和、商は差で求められ、単位の変化を追うのに便利である。この 4 つの基本単位の並び順にはいくつかの流儀があるが、本資料では MKSA [m, kg, s, A]の順で並べている。）

名称（物理量）	代表的表記	単位名称	物理単位	組立単位 M (m)	K (kg)	S (s)	A(A)
力	F	N（ニュートン）	J/m, kgm/s^2	1	1	-2	
エネルギー(仕事)	U	J（ジュール）	Nm	2	1	-2	
電力	P	W（ワット）	J/s, VA	2	1	-3	
電圧	V, ϕ	V（ボルト）	W/A	2	1	-3	-1
電流	I	A（アンペア）	W/V				1
電流密度	i		A/m^2	-2			1
抵抗(インピーダンス)	R	Ω（オーム）	V/A	2	1	-3	-2
導電率			1/Ωm	-3	-1	3	2
静電容量	C	F（ファラド）	C/V	-2	-1	4	2
インダクタンス	L	H（ヘンリー）	J/A^2	2	1	-2	-2
誘電率	ε		F/m	-3	-1	4	2
透磁率	μ		H/m	1	1	-2	-2
電荷・電束	Q, q	C（クーロン）	As			1	1
磁荷・磁束	Q_m, q_m	Wb（ウェーバ）	Nm/A, Tm^2 , Vs	2	1	-2	-1
電束密度	D		C/m^2	-2		1	1
磁束密度	B	T（テスラ）	N/Am, Wb/m^2		1	-2	-1
電界	E		V/m	1	1	-3	-1
磁界	H		A/m	-1			1
ベクトルポテンシャル	A		Tm	1	1	-2	-1
周波数	f	Hz（ヘルツ）	1/s			-1	

付録２　ファインマンの本で紹介されている思考実験



【設定】（左図）

i) 導線内の電子列が z 方向に速度 v で動いている（＝電流が流れている）

ii) プラス電荷は重いので導線に固定して動かない

iii) 導線内の正負の電荷の総量は等しく、電気的に中和している

iv) 導線の外側に、導線内の電子と同じ方向に同じ速さで移動する電子がある（図の右側の電子）

【パラドックス】

a) 静止系では：導線内の電流が磁場を作り、右側の動く電子に作用し、ローレンツ力（あるいは、同じ方向の電流と電流が引き合うアンペアの力）が働く

b) 動く電子と共に移動する観測系では：双方の電子は止まって見え、磁場が無くなり、電子に働く力は消える

【動いている観測系での力関係を相対論で見ると】

1) 電子は止まっているが、プラス電荷が反対方向に動いている

2) 動いているものは縮んで見えるので、プラスの電荷密度が上がっている

3) その結果、導体内の正負のバランスが崩れてプラス性を帯び、電子はクーロン力で引力を受ける

４）さらに、時間の進み方も補正すると、電子と導線が引き合ってできる運動量はどちらの系も同じになる（＝パラドックスでなくなる）。

ファインマンの本は、これを数式を使って説明している。