

電磁気学の奥深さ (4) : マックスウェル方程式のローレンツ変換

前レポート[1]では、電磁気学が（特殊）相対性理論への道を開いた話題を取り上げた。本レポートでは、マックスウェルの方程式がローレンツ変換に対して不変的である（=共変性を持つ）ことを示し、相対性理論誕生の半世紀前に生まれた電磁気学が、相対性理論の荒波を無傷で乗り越えることができた理由を述べる。このレポートの読後には、電磁気学の主役である電界と磁界が、それぞれ単独の物理現象ではなく、両者は一体不可分であって、見方（観測系）によって変幻自在に現れる、と言うことに気づくであろう。なお、本レポートの式展開については、文献[2]（砂川重信、理論電磁気学、11.2節）を下敷きにしており、マックスウェルの方程式を学んできた人なら誰でも容易にフォローできるように丁寧にまとめている。この問題については、電磁気学を究めた多くの識者が取り上げていて、本レポートでも、教科書では、[3]（太田浩一、電磁気学の基礎 II、15.5, 15.6節）、ネット上コンテンツでは [4],[5]の考え方を大いに参考にしている。

1. マックスウェルの方程式

マックスウェルの方程式は、以下の4つである（ \mathbf{E} ：電界、 \mathbf{D} ：電束密度、 \mathbf{H} ：磁界、 \mathbf{B} ：磁束密度、 \mathbf{i}_e ：電流密度、 ρ_e ：電荷密度）。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{電磁誘導の法則}) \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{アンペア・マックスウェルの法則}) \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (\text{電束密度に関するガウスの法則}) \quad (1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{磁束密度に関するガウスの法則}) \quad (1d)$$

この資料では、これらの方程式がローレンツ変換に対しても不変であることを解説する。ベクトルの関係が基底変換に対して、同じ形が維持される性質は共変性と呼ばれる。マックスウェルの方程式はローレンツ変換に対して共変性を持つ、すなわち、相対性理論の根本原理を満たしていることである。これから説明で分かるように、変換過程において、(1a)式と(1d)式がペアとなって現われてくる。同様に、(1b)式と(1c)式がペアになる。上記4つの方程式は雑多に並んでいる感を受けるが、実は、お互い深く関連していて、電磁気学の深みに気づくことができると思う。

この資料では、主に、ペアとなる(1a)と(1d)について、ローレンツ変換に対する共変性を示す。(1b)と(1c)のペアについては、同じことであるので結果のみを示す（必要なら[2]を）。本資料が主に扱う物理量は \mathbf{E} と \mathbf{B} である。 \mathbf{B} の呼び名は磁束密度であるが、以降において、特に大きな混乱は無いと思うとき、磁気的性質を持つ場と言う意味で「磁界」と呼んでいる。

2. 準備

この説明のためには、若干の数学的な準備が必要になる。この節ではこれをまとめる。

(1) ローレンツ変換

図1に示すように、静止している系の座標 (K系) を x, y, z, t で、一定速度 v で動いている系の座標 (K' 系) を x', y', z', t' で表す。ここでは、移動方向を x 軸方向にしている。ニュートン力学が原理とする座標変換 (ガリレイ変換と呼ばれる) は、我々の常識に合っていて

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad (1)$$

である。ニュートン力学はガリレイ変換に対して共変性がある、ということになる。

ところが、電磁気学の柱となるマックスウェルの方程式は、ガリレイ変換に対して共変性がなく、19世紀の科学者には、電磁気学は近似の理論と捕らえられていた。この価値観を一変させたのはアインシュタインであり、物理現象には、その根底に以下の二つの原理があるとして、それを公理とした力学理論を作り上げた。これが（特殊）相対性理論である。

1) 相対性原理（全ての慣性系は同等である）

2) 光速度不変の原理（光の速度は光源や観測者の運動とは無関係に決まる）

1) の原理を満たすためには、2) の原理を受け入れることが必要になる、と読み替えても良い。この場合の座標変換は、二つの条件

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (c: \text{光速})$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad (2)$$

を満たすように、図1の観測系について座標変換 ($K \rightarrow K'$) すると

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y, \quad z' = z$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad (3)$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \geq 1$$

が得られる。この変換はローレンツ変換、 γ はローレンツ因子と呼ばれる。動いているものに対しては、長さが縮み、時間がゆっくり進んでいるように見えるということになる。

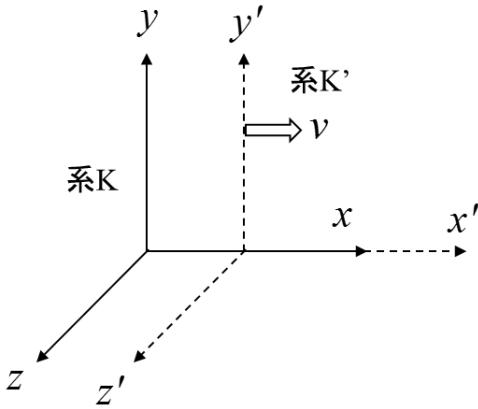


図1 座標系（系 K: 静止系 ; 系 K': 移動系（観測系））

図1の系 K と K' のローレンツ変換 (3式) とその逆変換を行列で表すと以下である。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v / c^2 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad (\text{ローレンツ変換}) \quad (4a)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma v / c^2 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \quad (\text{ローレンツ逆変換}) \quad (4b)$$

逆変換については、静止系 (K) から見れば動いている系 (K') であっても、動いている系 (K') から見れば、自分が静止していて、相手が v の速度で反対方向に動いていると見えるわけで、そのことが納得できる結果になっている。

K 系の偏微分を K' 系の偏微分に置き換える演算が必要になる。

2 変数変換 $(x, t) \leftrightarrow (x', t')$ の偏微分の関係は下記の公式より

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} \quad (5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x} \quad (5b)$$

であるので、変化の無い方向 (y', z' 軸方向) を含めて、これらを(5)式に適用すると以下になる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \\ \frac{\partial}{\partial t'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma v / c^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma v & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (6)$$

(2) ローレンツ変換における電界と磁界の関係性

冒頭(1節の末尾)でも述べたことを繰り返すが、本資料では、 \mathbf{B} のことを(広い意味で)磁界と呼ぶ。我々の感覚では、電界と磁界はそれぞれ別の物理量であり、座標変換によって、同じ物理量同士、すなわち、 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}'$ 、 $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}'$ となると思うであろう。ところが実際には、以下に示すように、 \mathbf{E}' も \mathbf{B}' も、共に \mathbf{E} と \mathbf{B} の関数になる。すなわち、電界と磁界は一体不可分の物理量であって、見方によって、姿を変えて現われてくると理解して欲しい。

ローレンツ変換における電界と磁界の関連性について、[2]では、「次のように変換するものとする」として、変換式が天下りに与えられている。相対論的立場からは、このように天下り的に与えても、結果として求めたい形が得られるのであれば、そういうものだと受け入れればよいとも言える。丁度、物理の法則を例外が見つかるまでは、理屈抜きで受け入れると同じ態度で。しかしそれでは不親切と感じる。このことに関しては、[3] (の 15.5, 15.6 節節) や[5]で、関係式の定量的な導出が示されている。本資料ではこの部分の一部を付録にまとめている。本文では、その変換結果のみを示す。

図 1 に示した系 \mathbf{K} と \mathbf{K}' の関係において、電界と磁界のローレンツ変換は次式である。

$$\begin{pmatrix} E_x' \\ E_y' \\ E_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & \gamma v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \quad (7a)$$

$$\begin{pmatrix} B_x' \\ B_y' \\ B_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma v / c^2 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma v / c^2 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \quad (7b)$$

さらに、電流密度 ρ_e と電荷密度 \mathbf{i}_e (\mathbf{i}_e の e を省略) のローレンツ変換は次式である。

$$\begin{pmatrix} \rho_e' \\ i_x' \\ i_y' \\ i_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v / c^2 & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_e \\ i_x \\ i_y \\ i_z \end{pmatrix} \quad (7c)$$

\mathbf{E} と \mathbf{D} については、誘電率 ϵ_0 を介して $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ 、また、 \mathbf{B} と \mathbf{H} については、透磁率 μ_0 を介して $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ で結ばれる。この ϵ_0 及び μ_0 は、光速 c と同様、座標系に依存しない絶対定数であり、次式で与えられる。

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8.854 \times 10^{-12} \quad [\text{F/m}] \quad (8a)$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} = 1.257 \times 10^{-6} \quad [\text{H/m}] \quad (8b)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 299792458 \quad [\text{m/s}] \quad (8c)$$

これにより、 \mathbf{D} と \mathbf{H} についてのローレンツ変換も(7),(8)式から換算できる。

以上により、準備完了である。

3. ローレンツ変換に対する共変性

マックスウェルの方程式を K 系において $f(\mathbf{E}, \mathbf{B})=0$ の形で表したとき、 K' 系において $f(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ が 0 になることを示して、共変性を確かめる。

先ず、4つのマックスウェルの方程式のうち、電磁誘導の法則の式(1a)の共変性を調べる。

$$\begin{aligned}
& \nabla' \times \mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} \\
&= \left(\frac{\partial E_z'}{\partial y'} - \frac{\partial E_y'}{\partial z'} + \frac{\partial B_x'}{\partial t'} \right) \mathbf{i}' + \left(\frac{\partial E_x'}{\partial z'} - \frac{\partial E_z'}{\partial x'} + \frac{\partial B_y'}{\partial t'} \right) \mathbf{j}' + \left(\frac{\partial E_y'}{\partial x'} - \frac{\partial E_x'}{\partial y'} + \frac{\partial B_z'}{\partial t'} \right) \mathbf{k}' \\
\end{aligned} \tag{9}$$

上式の右辺第一項の x' 成分 (\mathbf{i}') に着目すると、(6), (7) 式により、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial E_z'}{\partial y'} - \frac{\partial E_y'}{\partial z'} + \frac{\partial B_x'}{\partial t'} \\
&= \frac{\partial E_z'}{\partial y} - \frac{\partial E_y'}{\partial z} + \gamma v \frac{\partial B_x'}{\partial x} + \gamma \frac{\partial B_x'}{\partial t} \\
&= \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma v \frac{\partial B_y}{\partial y} - \gamma \frac{\partial E_y}{\partial z} + \gamma v \frac{\partial B_z}{\partial z} + \gamma v \frac{\partial B_x}{\partial x} + \gamma \frac{\partial B_x}{\partial t} \\
&= \gamma \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) + \gamma v \left(\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \\
&= \gamma \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{i} + \gamma v \nabla \cdot \mathbf{B} = 0
\end{aligned} \tag{10a}$$

y' 成分 (\mathbf{j}') は、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial E_x'}{\partial z'} - \frac{\partial E_z'}{\partial x'} + \frac{\partial B_y'}{\partial t'} \\
&= \frac{\partial E_x'}{\partial z} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\gamma v}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \gamma v \frac{\partial B_y}{\partial x} + \gamma \frac{\partial B_y}{\partial t} \\
&= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t} \\
&= \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{j} = 0
\end{aligned} \tag{10b}$$

z' 成分 (\mathbf{k}') も同様に、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial E_y'}{\partial x'} - \frac{\partial E_x'}{\partial y'} + \frac{\partial B_z'}{\partial t'} \\
&= \gamma \frac{\partial E_y'}{\partial x} + \frac{\gamma v}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \gamma v \frac{\partial B_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial B_z}{\partial t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t} \\
 &= \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{k} = 0
 \end{aligned} \tag{10c}$$

これらをまとめると、各成分が全て 0 であるので

$$\nabla' \times \mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} = \mathbf{0} \tag{11}$$

同様な手順で、磁束密度のガウスの法則 ((1d)式) を調べる。

$$\begin{aligned}
 \nabla' \cdot \mathbf{B}' &= \frac{\partial B_x'}{\partial x'} + \frac{\partial B_y'}{\partial y'} + \frac{\partial B_z'}{\partial z'} \\
 &= \gamma \frac{\partial B_x'}{\partial x} + \frac{\gamma v}{c^2} \frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial B_y'}{\partial y} + \frac{\partial B_z'}{\partial z} \\
 &= \frac{\gamma v}{c^2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \frac{\gamma v}{c^2} \frac{\partial B_x}{\partial t} + \gamma \frac{\partial B_x}{\partial x} + \gamma \frac{\partial B_y}{\partial y} + \gamma \frac{\partial B_z}{\partial z} \\
 &= \frac{\gamma v}{c^2} \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{i} + \gamma \nabla \cdot \mathbf{B} = 0
 \end{aligned} \tag{12}$$

これにより、マックスウェルの方程式(1a)と(1d)のローレンツ変換に対する共変性が示されたことになる。この 2 式がまったく別のものではなく、お互いの変換の中に、助け合って現れているのが非常に興味深い。

マックスウェルの方程式の残りの二つ : (1b) と (1c) についても、同様の手順で共変性が示される（確認は読者にお任せ）。

【注 : (10)～(12)式について、初版のレポートの不備を差し替えている（2022.01）。それに伴い、式(13), (14)は欠番になっている。】

4. 雜感

(1) 電界と磁界 : それは一体不可分にして変幻自在

筆者には、電界と磁界は、それぞれ独立な物理量というイメージが有った。もちろん、磁界は電流から生まれると言う意味において電気由來の現象と言うことまでは理解しているとはいえる。しかし、その後、式(7)でも明らかなように、見ている系（慣性系）が違うというだけによって、同じ物理現象が、あるときは電界として、また、あるときは磁界とし

て働くと言う様は、まさに電気・磁気の一体不可分・変幻自在な現象であるとの認識を持つようになった。この認識は、式(13)や(14)を見たことによって、一層、深まることになった。マックスウェルの方程式は、四つの独立な電磁気現象を法則として並べただけの雑多感を抱いていたが、ローレンツ変換の過程において、二つずつがペアで現われることを知ったとき、一種の驚きを感じた。電磁気学は奥が深いと。

マックスウェルの方程式の究極の形は、二つの電磁ポテンシャル（スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \mathbf{A} ）で表すことによって示されることを[6]にまとめている。以下の式である。

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{i}_e \quad (15a)$$

$$\square \phi = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (15b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (15c)$$

$$\square \equiv \Delta - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (\text{ダランベール演算子 (ダランベルシアン)})$$

式(15a)と(15b)がローレンツゲージを適用して得られたメインの方程式。これによって求められる \mathbf{A}, ϕ には不確定性があり、それを(15c)の条件式（ローレンツ条件）で定める（あるいは確認する）と言う仕組みである。これらの式は、マックスウェルの方程式から得られたものであるので、この式がローレンツ変換に対して共変的であることは確かめるまでも無い。式(7c)から分かるように、静止系では止まっている電荷も、動いている系で見れば動いていて、それによって電流が流れているように見えるわけであるから、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルも電界と磁界がそうであったように、観測系によって変幻自在に移り変わるものと理解できる。（たぶん、 $\square \mathbf{A}' + \mu_0 \mathbf{i}'_e$ のローレンツ変換の途中に、 $\square \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{i}_e$ と $\square \phi + \rho_e / \epsilon_0$ が現われてくるのだと思うが、筆者自身ではその確かめを行っていない。）

いかなる慣性系においても、エネルギーや電荷の総量のように保存されている物理量、あるいは力の釣り合いなどに対しては、異なって現われてはいけないが、電界や磁界、あるいはスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルと言った物理量の現われ方は見掛けの問題であって、変幻自在ということのようである。

（2）電磁気現象は E - B 対応？ E - H 対応？

大学等での電磁気学授業において、電気の場の性質を表す物理量として電界 \mathbf{E} が用いられるが、では、それに対応する磁気の場の性質を表す物理量は、磁束密度 \mathbf{B} か磁界 \mathbf{H} かという議論が昔からある。（要は、電気の場を表す主役は \mathbf{E} であるが、磁界の主役は \mathbf{B} か \mathbf{H} かと言う議論である）。これに対しては筆者も[7]でその整理を行っているが、結論として

は、どちらにもその根拠があり、どちらを選ぶかは流儀のようなもの、としている。しかし、本資料をまとめていて思うことは、 \mathbf{E} と \mathbf{B} は、一つの現象の裏と表みたいな関わり（同様に \mathbf{H} と \mathbf{D} も）であり、 \mathbf{E} - \mathbf{B} 対応に物理の本質があるように感じられるが、どうであろうか？

\mathbf{E} と \mathbf{B} が同類、同じような世界が \mathbf{H} と \mathbf{D} にもある、としたとき、これを、 \mathbf{E} - \mathbf{B} 対応と言うべきか \mathbf{E} - \mathbf{H} 対応と言うべきかは、切り口の違い（=横に切るか縦に切るかの違い）であって、こういう議論に生産的な意味がない、と言うことになるのかもしれない。

（3）電磁気学の先進性：そのパイオニアは？

ニュートン力学は、我々が直感的に受け入れられるガリレイ変換に対する共変性を原理としている。マックスウェルの方程式にはガリレイ変換に対して共変性が無いので、電磁気学の理論が完成した19世紀には近似理論とみなされていた。しかし、AINSHUTAINは、理論の厳密性の意味において、ローレンツ変換に共変性を有する電磁気学に軍配を上げ、ニュートン力学を近似理論とみなした。その後に生まれた相対性理論の荒波を、電磁気学が無傷で乗り越えられたことは、我々の良く知るところである。

では、電磁気学にローレンツ変換に対する共変性を組み入れたのは誰なのだろうか？マックスウェルが完成させた理論が、結果的にそうなっていたと言うことなのであろうか？場の概念（=近接作用）を提唱したファラデーにあるのであろうか？あるいは、ファラデーの直感を数学モデルに組み立てたマックスウェルにあるのであろうか？

自然界に起きる物理現象は二つの原理（相対性原理、光速一定の原理）に従って動いているのであるから、それを正しく表せば、ローレンツ変換に対して不変になることは当然であると、言い切れるようになれば、たいしたものである・・・。

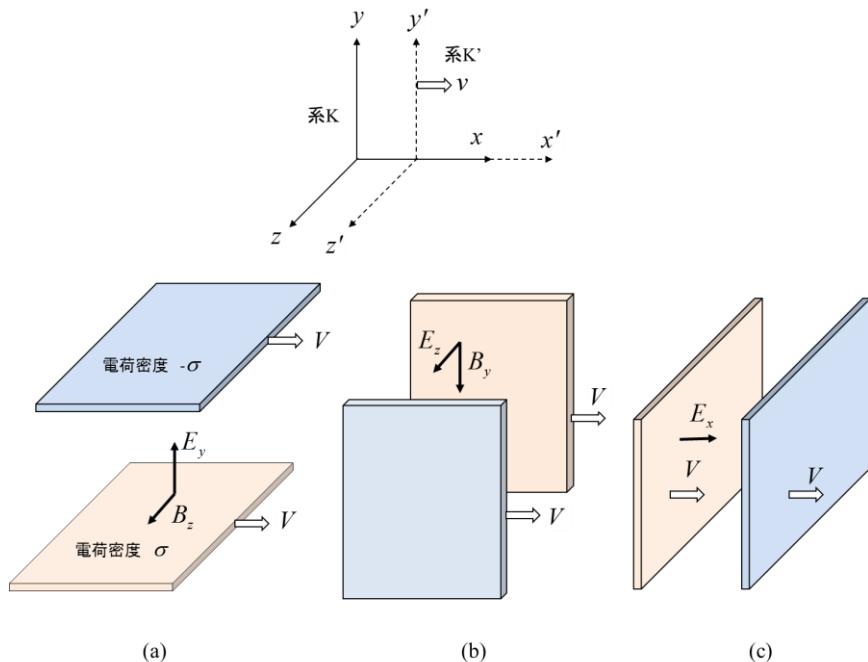
参考文献

- [1] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ（3）：相対性理論への道,” 技術レポート（私報）, http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-025_EM-3.pdf
- [2] 砂川重信, 理論電磁気学, 紀伊国屋書店, 1999.
- [3] 太田浩一, 電磁気学の基礎 II, 東京大学出版会, 2012.
- [4] EMAN の物理学, <https://eman-physics.net/relativity/lorentz2.html>
- [5] 戸田昭彦, “電磁気力と特殊相対性理論,” <https://home.hiroshima-u.ac.jp/atoda/Electromagnetism/23EM-Relative.pdf>
- [6] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ（2）：マックスウェル方程式の美しい形,” 技術レポート（私報）, http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-024_EM-2.pdf
- [7] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ（1）：電気と磁気の対応は E - H か、 E - B か,” 技術レポート（私報）, http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-023_EM-1.pdf

付録：電磁界諸量のローレンツ変換

(1) 電界と磁界 ([3] § 15.6, [5])

付図1の座標系において、速度 V で直線運動する平行板コンデンサがある（平板の大きさは、端の効果が無視できる無限大を仮定）。このコンデンサにおいて、(a) E_y , (b) E_z , (c) E_x の電界が生じる3つの向きを調べる。系は静止系（K）と、 x 軸方向に速度 v で移動する系（K'）を考える（本文図1に同じ）。K系で見たときのそれぞれの板の電荷密度を σ [C/m²] とする。



付図1 電界と磁界のローレンツ変換を求めるための図

(帯電した平行板コンデンサが x 軸方向に速度 V で移動)

同図(a)において、K系では

$$E_y = \sigma / \epsilon_0$$

$$B_z = \mu_0 \sigma V$$

となる。これをK'系で見ると、電荷密度のローレンツ変換（長さが縮んで密度が濃くなる）と速度の合成則から

$$E_y' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\gamma}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{vV}{c^2} \right) \sigma = \gamma (E_y - vB_z)$$

$$B_z' = \mu_0 \sigma' V' = \mu_0 \gamma \left(1 - \frac{vV}{c^2} \right) \frac{V - v}{1 - vV/c^2} \sigma = \mu_0 \gamma (V - v) \sigma = \gamma \left(B_z - \frac{vE_y}{c^2} \right)$$

同図(b)からは、

$$E_z' = \gamma (E_z + vB_y)$$

$$B_y' = \gamma \left(B_y + \frac{vE_z}{c^2} \right)$$

同図(c)では、平行板にローレンツ収縮が無いので、

$$E_x' = E_x$$

これで、電磁場 6 つの成分のうちの 5 つ成分の変換が求められた。残すは B_x' 。これについては、平板コンデンサを、同図(a)の向きに置き、 z 方向に一定速度で動かす。これを K' 系で見れば、 B_x の x 軸方向へのローレンツ収縮は無いので、

$$B_x' = B_x$$

以上をまとめると、電界と磁界のローレンツ変換は、本文の式(7a)と(7b)になる。

(2) 電荷密度と電流密度 ([3] § 15.5, [5])

これに対する対応では、電荷が均一に詰まった箱が x 軸方向に直線運動することを考え、これの動きと観測方向の関係から、電荷密度と電流密度のローレンツ変換を成分毎に求める。基本的なことは、(1) で述べたことと同じである。具体的な導出についてはここでは省略するので、各自で考えて欲しい (あるいは、[3], [5]を見て欲しい)。結果は、本文の(7c)式に与えている。

読者の皆さんへ

このレポートには続編 ([TR-YK-064: ローレンツ力の共変性](#)) があります。

さらに、TR-YK-026 と TR-YK-064 をまとめて整理した資料を下記で公開しています。
Open Access Book TR-YK-061 : 電磁気学のからくり : [第6章 電磁気学と相対論](#)