Technical Report YK-027
July 12, 2019
Y. Karasawa

電磁気学の奥深さ（５）: 電線に流れる電流は光の速さで進む？

電線に電圧をかけて電流を流し、相手にエネルギーを送る仕組みは電気回路の授業で学ぶ。しかし、電気回路で扱うスケールは地球規模に比べて十分小さいので、エネルギーが届く時間についてはあまり気に留めることはなかったと思う。一方、電磁気学の授業において、空間を伝搬する電波の速さは光の速さになること、すなわち、電波も光も同じ電磁波であることを学ぶ。では、電線を流れる電流の速さはどのくらいなのであろう。電流も光の速度に近いという話がある一方で、それを運ぶ電子の移動速度はカタツムリの歩み程度しかない、と言うことも言われている。何か不思議である。電流の速度と言う言葉自体が正しくないという話も聞く。本資料では、電磁気学的視点からこの疑問に答えてみたい。マックスウェルの方程式までは学んでいる読者を対象に、丁寧に噛み砕いた形でまとめている。種本は、[1]（太田浩一、電磁気学の基礎 II、13.12 節）である。

１．電気エネルギーの伝送

距離の離れた２点間で、電気的エネルギーを伝送するには、主なものとして、アンテナを用いて空間を電波の形で伝送する（空間伝送）か、中空の金属パイプの中に電波を閉じ込めて伝送する（導波管伝送）か、導線に電流を流して伝送する（有線伝送）かの三つの方法が有る。空間伝送と導波管伝送は学部レベルの電磁気学や電磁波工学（あるいは、電波工学、マイクロ波工学）の授業でしっかり学ぶはずである。

本資料では、電線を伝わる電気エネルギーの伝送速度に着目する。空間伝送では電波の速度は光の速度であること、導波管伝送では、管内に存在できる種々のモードによって伝送速度は異なるが、いずれの場合でも光速よりは遅くなることを学んでいる。では、有線伝送では、どうであろうか？と言う問題である。

有線伝送の場合、何の速度を見ればよいのであろうか？エネルギーは、電荷を電流の形で相手に運ぶわけだから電流の流れる速さを調べればよいと言うことになりそう。18 世紀の中ごろ、ホイートストンは、導線を伝わる電流の速度が光の速度に近いことを調べ、フィゾーは電話線を用いた測定で光速度の 2/3 を得ていたと言う[1]。一方、導体内において、電流（電荷）を運ぶ担い手となる電子の動きは、カタツムリの歩みより遅いらしい[2]。足の遅いランナーに荷物を預けたら、超スピードで届けてくれたという有り得ないことが起こっている。どうなっているのだろう？本資料はこのメカニズムを分かりやすく解説することを旨とする。

有線伝送では、２本の導線を用意し、一方を電流の送り出し、もう一方を受け止めに使う。電流の向きが反対になり、一方が I のとき、もう一方は $-I$ である。この特性を理論的に調べたい場合には、幾何学的に対称な構造が望ましく、典型的なものとして、２本の平行導線（間隔は信号の波長に比べて十分狭い）と、同軸円筒ケーブルの二つがある。前者（平行導線）はレッヘル線と呼ばれ、アナログテレビ時代のフィーダ線や商用電源の送電線でお馴染み

である。電磁界解析を容易に行うには、円筒同軸ケーブルの方が向いており、この資料では、これを用いて解析する。円筒同軸ケーブルは、導波管の一種ともみなせるが、伝送モードが異なっており、本目的のメカニズム説明に好都合である。

２．準備

３節では円筒同軸ケーブルでの説明を行うので、ベクトル表示及びマックスウェルの方程式を円筒座標で表しておく。

円筒座標系

$$x = r\cos\phi,\ \ y = r\sin\phi,\ \ z = z$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2,\ \ dv = r dr d\phi dz$$

$$\boldsymbol{A} = A_r\hat{\boldsymbol{r}} + A_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}}$$

$\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ は、$r,\ \phi, z$ 方向の単位ベクトル

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

円筒座標でのマックスウェルの方程式

本資料に出てくるマックスウェルの方程式は、以下の二つである。

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \text{（電磁誘導の法則）} \tag{1a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad \text{（アンペア・マックスウェルの法則）} \tag{1b}$$

円筒同軸ケーブルでは次節で説明するように、電界（$\boldsymbol{E}$）・磁界（$\boldsymbol{B}$：正確には磁束密度であるが、ここでは磁界と呼ぶ）は、円筒座標の３成分に対して、E_r と B_ϕのみであり、かつϕ方向に依存しないため、式(1a)と(1b)を、円筒座標を用いて、この条件で書き表すと、(1a)のϕ方向成分、および、(1b)の r 方向成分は、それぞれ次式になる。

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} = -\frac{\partial B_\phi}{\partial t} \tag{2a}$$

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial z} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_r}{\partial t} \tag{2b}$$

<u>波動方程式の一般解（ダランベールの解）</u>

波動方程式が、空間の 1 変数（例えば z）にしか依存しない場合

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(z,t) = 0 \tag{3}$$

の形になる。変数 z, t を下記の関数 u, v で置きなおす。

$$u = z - ct,\ v = z + ct$$

この変数 u, v に対して任意の関数を $F(u), G(v)$とすると、1 次元の波動方程式の一般解は次式で与えられる。

$$\psi(z,t) = F(z-ct) + G(z+ct) \tag{4}$$

これは、ダランベールの解と呼ばれる（導出の詳細は、微分方程式の教科書を見て欲しい）。これは、任意の波形（F, G）が、z 方向の正の方向と負の方向に、速度 c で伝達されることを意味している。定常状態においては、F と G は、次式の形であり、

$$F(z,t) \propto \exp\left\{-j\left(z-ct\right)\right\},\quad G(z,t) \propto \exp\left\{-j\left(z+ct\right)\right\}$$

そのときの F や G の偏微分は次式である。

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -jF,\ \frac{\partial F}{\partial t} = jcF \tag{5a}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = -jF,\ \frac{\partial G}{\partial t} = -jcF \tag{5b}$$

これで、以下の説明に対する準備完了である。

３．電圧・電流・エネルギーの伝送速度

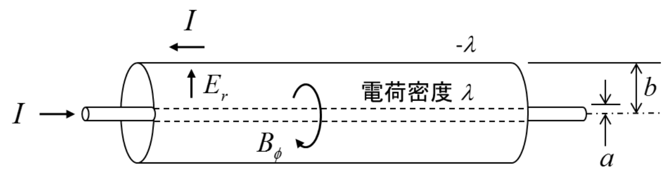

図１　円筒同軸ケーブル

図１に示す中空の円筒導体（半径 b）の中心に一本の円筒導線（半径 a）がある無限に長い同軸ケーブルを考える。内側の導線に電荷密度λの、外側の円筒に電荷密度-λの電荷があり、中心の導線に電流 I、外側円筒に反対方向の電流 I が流れているとする。中空部分の電界と磁界は次式となる。

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{6a}$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{6b}$$

同軸ケーブルの単位長さ当たりの静電容量を C、導体間の電位差を V とすると、

$$V = \int_a^b E_r dr = \frac{\lambda \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi\varepsilon_0} \tag{7}$$

$$C = \frac{\lambda}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{8}$$

ファラデーの電磁誘導の法則(2a)より、

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} = -\frac{\partial B_\phi}{\partial t} \;\rightarrow\; \frac{C}{\varepsilon_0}\frac{\partial V}{\partial z} + \mu_0 \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \;\rightarrow\; c^2 C\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \tag{9a}$$

アンペア・マックスウェルの法則(2b)より、

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial z} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_r}{\partial t} \;\rightarrow\; \mu_0\frac{\partial I}{\partial z} + \frac{C}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial I}{\partial z} + C\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{9b}$$

両式より

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}=0 \rightarrow I=F_I(z-ct)+G_I(z+ct) \tag{10a}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0 \rightarrow V=F_V(z-ct)+G_V(z+ct) \tag{10b}$$

であるので、式(9), (10)と(5)より、

$$F_V=\frac{1}{cC}F_I,\ G_V=-\frac{1}{cC}G_I$$

となり、

$$V=Z\left\{F_I(z-ct)-G_I(z+ct)\right\} \tag{11}$$

で表される。ここで、

$$Z=\frac{1}{cC}=\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi\varepsilon_0 c}=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)Z_0 \quad Z_0\equiv\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=376.73\ [\Omega] \tag{12}$$

単位時間に伝送するエネルギー（＝電力）を、電流と電圧が運ぶとすると

$$P_{VI}=VI=Z\left\{F_I^2(z-ct)-G_I^2(t+zt)\right\} \tag{13}$$

空間の電磁波が運ぶとすると、ポインティングベクトル

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\frac{\lambda I}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{z}}$$

の絶対値を同軸ケーブルの中空部分の断面で積分することにより、次式となる。

$$P_{EB}=\int_0^{2\pi}\int_a^b Srdrd\phi=2\pi\frac{\lambda I}{4\pi^2\varepsilon_0}\int_a^b\frac{1}{r}dr=\frac{\lambda I}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)=VI=P_{VI} \tag{14}$$

この結果から、単位時間に運ぶエネルギー（＝電力）は、電線の電圧 V と電流 I が運んでいると考えてもよいし、電線の周りの空間の電磁波（$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$）が運んでいると考えても良い、と言うことになる。

式(10a), (11), (13)の形から、導線による伝送においては、電流も電圧もエネルギーも光の速度で進むということが示されたわけである。z 軸の正の方向に進む電圧の成分に着目して

みれば、$V=ZI$ であり、$V=\lambda/C$, $Z=1/cC$ より、

$$I = c\lambda \tag{15}$$

となって、電荷が光速で動いて電流を作っているように見える。

しかし、電荷そのものの移動速度は、量子力学的考察から極めて緩慢であることが知られている[2]。では、この結果をどう解釈すればよいのであろうか？この問題に関しては、現在の電磁気学では、以下のように解釈されている（と筆者は理解している）。

1) 電磁エネルギーは導線の周りの電磁波（電界と磁界）が運ぶ（式(14)）。電磁波は自由空間を伝搬するので、速さは光速である。
2) この電磁波に触発されて、電線に電荷が誘起される。誘起された電荷は、電磁波の進行に伴って光速で動いているように見えるが（式(15)）、実際にそのスピードで進行方向に動いているわけではない。それぞれの位置で出たり消えたりしているだけである。海の波が伝搬するとき、海水がその速度で動いているわけではないのと同じである。しかし、同じ電荷ではないにしても、式(15)で示されているように、一つ一つの電荷が光速で動いたと同じことが起きていることは確かである。

2)をもう少し分かりやすく言うと、手旗信号による情報伝達に例えられる。旗の上下運動によって、情報は高速で進むが、手旗を動かしている人は、その位置に留まっており、速く走る能力は求められていない（手を動かすスピードの速さは求められるが）。

これで、説明は終わるが、新たな疑問。同軸ケーブルの空間の一部に、電波吸収材を埋め込むと、電線はつながっていても、電流は流れなくなると言うことになるのであろうか？

ここでの説明では、往復の導線が完全に対称構造で、かつ、伝送損失やインダクタンスの影響がないものとしている。実際はそうではなく、故に波形も歪んだり弱くなったりするが、そのような例については、ヘビサイドの「電信技手の方程式」以来、様々な検討が進められて今日の伝送線路の学問大系に至っている[1]。

本資料の執筆動機は、本シリーズの[3]の（１）の話題に関連する。そこでは、光速で移動する電荷を仮定した磁界と電界に関するパラドックス（的なもの）を議論しているが、その最後に、電荷が光速で移動することの仮定の妥当性についての気懸かりを述べている。本資料では、その疑問への答え（＝仮定としては妥当であったと言うこと）を与えたかったためである。

参考文献

[1] 太田浩一, *電磁気学の基礎 II*, 東京大学出版会, 2012.

[2] http://azusa.shinshu-u.ac.jp/~coterra/enjoyphys/current2.html

[3]唐沢好男, “電磁気学の奥深さ（３）：相対性理論への道,” 技術レポート（私報）,
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-025_EM-3.pdf