

電磁気学の奥深さ（6）：ベクトルポテンシャルを知ろう

電磁気学では、ポテンシャルという言葉が二つ出てくる。スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルである。スカラーポテンシャルは、静電界の説明の中で、電位という言葉で読みかえられ、電荷 q を電位 V_1 のところから電位 V_2 のところまで運んでゆくためには $q(V_2 - V_1)$ の仕事（エネルギー）が必要と学んで、ポテンシャルという言葉が分かる。もう一方のベクトルポテンシャルは、以下のように教えられるのではないだろうか。「磁束密度 \mathbf{B} は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ だから、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ と表すことができる。なぜなら、ベクトル公式により $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ であって、 \mathbf{A} は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を自動的に満たしているからである。このベクトル場 \mathbf{A} をベクトルポテンシャルと呼ぶ。」と。これだと、数学のお遊びのような気分になる。授業では、その働きが詳しく語られることも無く終わってしまう（脚注1）。次に現われるのは、より高度なレベルの電磁気学、すなわち大学院レベルの授業において、アンテナから電波が出てゆく解析にベクトルポテンシャルが大事な仲介役となることや、マックスウェルの方程式を二つのポテンシャルで書き直すときであろうが、普通はそこまで行かない。大方の人は「磁界って、何かその元になる渦巻きのものがあるらしい」に留まってしまっていることと思う（筆者はそうだった）。本資料では、学部レベル（＝マックスウェルの方程式までは学んでいると言うレベル）で、ベクトルポテンシャルの働きが、直感的に理解できる説明をしてみたい。なお、ここでは、基本的なことの理解を目的とするため、真空中の静磁界の範囲に限定する。

1. マックスウェルの方程式

マックスウェルの方程式を、真空中における電界 \mathbf{E} と磁界 \mathbf{B} で表すと、次式である。（電磁気学では、 \mathbf{B} を磁束密度、 \mathbf{H} を磁界と教わるが、ここでは、 \mathbf{H} を出さず、 \mathbf{B} を磁界と呼ぶ）。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{電磁誘導の法則}) \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{アンペア・マックスウェルの法則}) \quad (1b)$$

注1) マックスウェルが打ち立てた電磁気理論の中には、ベクトルポテンシャルに該当する物理量（マックスウェルはそれを電磁氣的運動量と呼んでいた）も含まれていた。その理論は、たくさんの方程式で書き表された複雑極まりないものであったので、ヘビサイドとヘルツが今日我々が学んでいる4つの方程式に整理し、見通しを良くしてくれた。その際、ベクトルポテンシャルは実体不明のものとして、方程式から見えなくされてしまったようである。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{電束密度に関するガウスの法則}) \quad (1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{磁束密度に関するガウスの法則}) \quad (1d)$$

(1d)式は、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2)$$

として、新たなベクトル場 \mathbf{A} で置き換えることができる。 $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$ (ベクトル公式で恒等的に 0) であるので、数学的に矛盾が無い。この電磁場 \mathbf{A} はベクトルポテンシャルと呼ばれる。

電界 \mathbf{E} は、静電界ではスカラーポテンシャル ϕ により $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ であるが、時間依存の電磁界では(1a)式より

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3)$$

である。スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \mathbf{A} は、まとめて、電磁ポテンシャルと呼ばれる。

式(2),(3)より、電界・磁界は電磁ポテンシャルが求められれば求められる。ところが、 (\mathbf{E}, \mathbf{B}) と (ϕ, \mathbf{A}) には対応に不確定な部分があり一意に定めることができない (このことは資料[1]にまとめている)。通常、電磁気学の問題では電界や磁界を求めることが目的になり、それらが正しく求められるのであれば、 (ϕ, \mathbf{A}) に対する不確定部分は自由に決めてよいことになる。この「自由に」の部分には解が得られやすい形を見つけるということになる。このようにして解を得る方法はゲージ変換と呼ばれる。マックスウェルの方程式に関しては、ローレンツゲージを用いた変換が非常にうまく決まるため、これが採用されている。この変換後のマックスウェルの方程式は、電磁ポテンシャルを用いて以下のように表される[1]。

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (4a)$$

$$\square \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{ローレンツ条件}) \quad (4c)$$

$$\square \equiv \nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (\text{ダランベール演算子 (ダランベルシアン)})$$

この解法は、(4a)式から \mathbf{A} を、(4b)式から ϕ を独立に解き、それぞれの中に不確定性を持つ組の中で、(4c)式を満たす解を定める手順になる。このようにして求めた ϕ, \mathbf{A} により、目的の物理量 \mathbf{E} と \mathbf{B} を得ることができる。

この資料では、時間変動の無い場、すなわち静電界と静磁界を扱う。(4)式の時間微分項を0とすると、(4a), (4b)式は次式となる。

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{i} \quad (5b)$$

もちろん、ローレンツ条件も満たしている。式(5)は、スカラーポテンシャル・ベクトルポテンシャルに関するポアソンの方程式と呼ばれ、それぞれの解は

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (6a)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (6b)$$

となる。真空中の原点に点電荷 Q がある場合には、(6a)式は、デルタ関数を用いて $\rho(\mathbf{r}') = Q\delta(\mathbf{r}')$ と置き換えられ、 $\phi = Q/(4\pi\epsilon_0 r)$ となって、電磁気学の授業の始めの頃に習うお馴染みの電位（スカラーポテンシャル）の式になる。同様に、原点に電流素片を置けば、(4b)式はビオ・サバールの法則に行き着く。電流とベクトルポテンシャルが同じ向きになることを、意識に留めておいて欲しい。

2. 最もイメージしやすいケース

直線状に流れる電流に対する磁界とベクトルポテンシャル

図1に、 z 方向に電流 I が流れている環境での電磁界の様子を示す。ベクトルポテンシャルの理解にはこのケースが一番適していると思う。式(6b)より、ベクトルポテンシャルの向きは電流と同じ z 軸方向、 r が大きくなるほど、値が小さくなることは定性的に分かる。磁界は ϕ 成分方向に現われ、以下のとおりである。

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (7)$$

ベクトルポテンシャルは図の点線の矩形経路 (z 軸方向の長さ: 1) で積分すると、

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \{= A_z(a) - A_z(r)\} &= \int_S B_\phi dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a} \\ \rightarrow A_z(r) &= A_z(a) - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a} \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)のように基準点 ($r=a$) からの差で表しているのは、式(6b)で積分が発散する要素を含み、かつ、その値の意味も無いためである。図1のように、 z 方向に向き、かつ、 r に対して徐々に弱くなるベクトル場では、 ϕ 方向を軸とする捩れが生じ、これがベクトルポテンシャルの渦になっている。(図では、 z 方向一直線で渦に見えないが、左右の強度差によって回転成分が発生していることを感じ取って欲しい)。

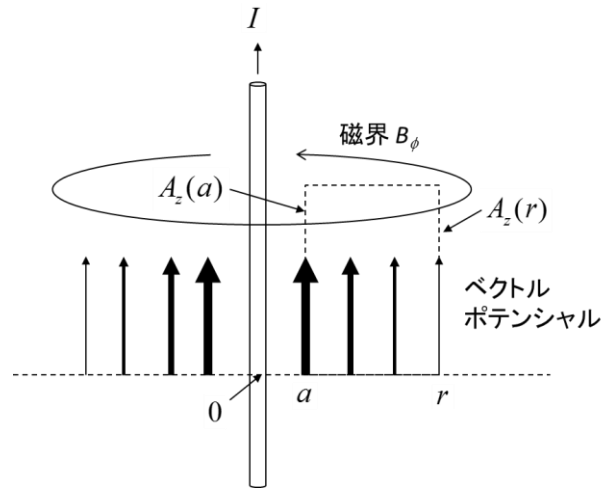


図1 直線状電流に対する磁界とベクトルポテンシャル

3. ベクトルポテンシャルの不思議

磁界がないところにも、ベクトルポテンシャルはある

静電界における電界の相棒はスカラーポテンシャルである。(3)式から明らかなように、スカラーポテンシャルがあるところには必ず電界がある。その逆もまた然りである。もちろん、スカラーポテンシャルが至るところ定数であれば、電界は0であるが、スカラーポテンシャルはその差(電位差)が物理的働きをもつのであるから、そのような場は物理的に意味がない。

ところが、ベクトルポテンシャルに関しては、磁界がないところにもベクトルポテンシャルが存在するケースがある。図2がその例である。無限に長い中空の円筒パイプ(半径 a)があり、その円筒上を円周方向に電流密度 i (単位幅あたりの電流 I) でループ電流が流れている(螺旋形に密に導線が巻かれていて、そこに電流が流れていると考えても良い)。磁界はこの円筒内の中空部分に、円筒の軸方向(単位ベクトル: \hat{z}) に均一に発生する。その大きさは、 $B_z = \mu_0 I$ である。 xy 面上の円筒断面に対して、半径 r の面 S を考えると、

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \rightarrow \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot n dS = \Phi_m$$

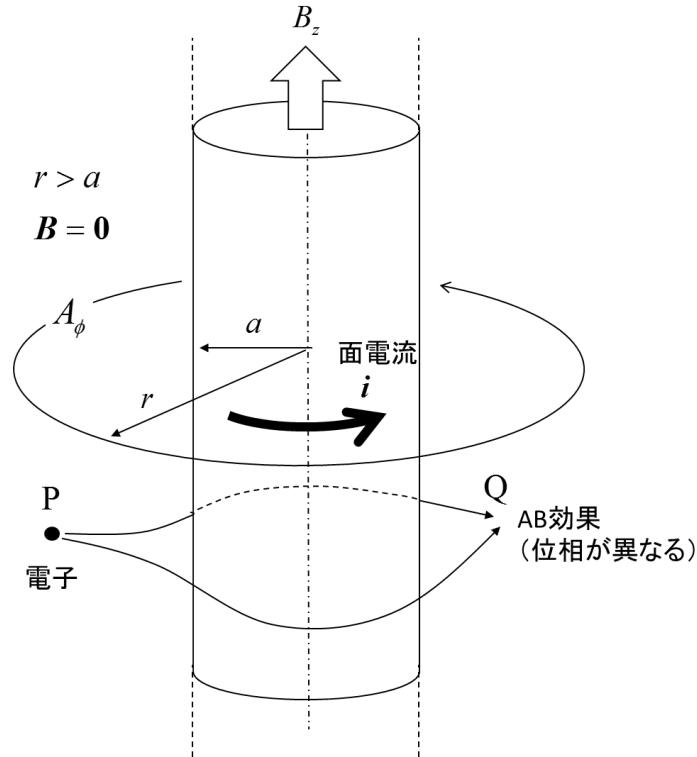


図2 ベクトルポテンシャルが有って磁界がないケース

$$\Phi_m = \begin{cases} \mu_0 \pi r^2 I & (r < a) \\ \mu_0 \pi a^2 I & (r > a) \end{cases} \quad (9)$$

より、ベクトルポテンシャルは ϕ 成分のみとなり、次式である。

$$A_\phi = \begin{cases} \frac{\mu_0 r I}{2} & (r < a) \\ \frac{\mu_0 a^2 I}{2r} & (r > a) \end{cases} \quad (10)$$

円筒の外側 ($r > a$) では、円筒座標の表記において、

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \quad (11)$$

となり、磁界 \mathbf{B} ($=\nabla \times \mathbf{A}$) がないのにベクトルポテンシャル \mathbf{A} だけはある、ということになる。もちろん、電界もないので、この場においては、電磁気学的な現象は何も起こらない

はずである。それでは、ベクトルポテンシャルは、単なる数学のお遊びであって、物理的に存在するのかどうかと言う疑問が湧いてくる。これに答え（＝存在すると言う）を与えてくれたのが量子力学である。

量子力学の世界に、Y. Aharonov と D. J. Bohm が 1959 年、その存在を指摘したアハラノフ・ボーム効果（AB 効果）というのがある。詳しくは、解説資料[2]を見て欲しいが、一言で言うと、ベクトルポテンシャルがある場では、電子を P 点から Q 点に移動させるとその位相変化（電子波の位相：量子力学的な物理量）が経路に依存する、と言うものである。これを確認する実験は大変難しくなかなかできなかったが、日立製作所の外村彰博士が、1986 年、電子線ホログラフィーの手法を用いて、その存在を実証した（漏れの無い磁場を作ることの難しさ等の苦労話が解説記事[2]に）。これによって、ベクトルポテンシャルが単なる数学上の表現ではなく、実在する物理量であることが分かったのである。

(4)式でも述べたように、マックスウェルの方程式は、電磁ポテンシャルを用いて表現できる。電磁気学でお馴染みの電界・磁界との間には、ローレンツゲージによる変換を用いて結ばれており、電界・磁界を求めるためにはこれでよかったが、量子力学の世界まで含めた電磁環境を規定する場の表現においては、ゲージ変換の意味が問われているように感じる。いずれにしても、電磁界を表す物理量としては電磁ポテンシャルが本質ということが、この話を聞くと、確かにそう思う。

4. なぜ、ポテンシャルと呼ばれるか？

ポテンシャルと呼ばれる理由は、単位からの考察をしてみると分かりやすい。物理量の単位は、SI 基本単位で表すことができる。電磁気に関する物理量は MKSA 単位系であり、 $[m^a, kg^b, s^c, A^d]$ である。これは、組立単位と呼ばれ、ここでの便宜上、 $[a,b,c,d]$ で表す。電磁気学諸量の組立単位を付録の表 1 に示す。

電界 E がある場において、電荷 q を P 点から Q 点まで運ぶエネルギー（仕事） U_e は次式である。

$$U_e = \int_P^Q \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{l} = q \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q(\phi_Q - \phi_P) \quad (12)$$

$$([0,0,1,1]+[2,1,-3,-1]=[2,1,-2,0])$$

$\phi_Q - \phi_P$ は PQ 間の電位差であり、電荷 q を動かすことに立ちはだかる壁（ポテンシャル）と理解できる。

では、ベクトルポテンシャルは何に対するポテンシャルであろうか。ベクトルポテンシャルの組立単位は $[1,1,-2,-1]$ である。エネルギーの単位は $[2,1,-2,0]$ である。これをつなぐものの単位は、 $[1,0,0,1]$ ($= [2,1,-2,0] - [1,1,-2,-1]$)、すなわち $[m][A]$ である。電流が流れている導線の一定の長さ分の量である。図 1 に示した例で考えると、磁界 B の場の中で、電流 I と平行に電流 I_0 を置き、この電流 I_0 の長さ L あたりに受ける力 F_m は

$$\mathbf{F}_m = I_0 L B_\phi \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mu_0 I_0 L}{2\pi r} \hat{\mathbf{r}} \quad (13)$$

この電流棒（電流 I_0 が流れている長さ L の棒）を、磁界 B_ϕ 中を P から Q に運ぶには、

$$U_m = \int_P^Q \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{r} = \frac{\mu_0 I_0 L}{2\pi} \int_{r_p}^{r_Q} \frac{1}{r} dr = I_0 L (A_Q - A_P) \quad (14)$$

$$([0,0,0,1]+[1,0,0,0]+[1,1,-2,-1]=[2,1,-2,0])$$

となって、電界中の電荷の運搬と同様に経路に依存しないものとなる。電界中の電荷の運搬と、磁界中の電流の運搬との違いは有るものの、ポテンシャルであることの意味は共通しており、ベクトルポテンシャルと呼ばれる理由は理解できたと思う。ただし、この設定は、磁界に対して電流が垂直であり、かつ、力を受ける方向への移動に必要なエネルギーを言っている。もし、 P 点で、電流棒を 90° 傾け、その状態で P から Q に運び、 Q 点でまた向きを元に戻すと、この行為のどこにも力が働かないので、 $U_m=0$ となってしまうそうだが、本当だろうか？

5. 直感的イメージ

先に紹介した外村博士資料[2]に、マックスウェルが思い描いたベクトルポテンシャル（マックスウェルの言葉で言う電磁氣的運動量）の説明図（図3）が載っている（同図は、外村博士が少し書き直しているとのこと）。

図の中央を電流が左から右に流れている。この電流の周りに磁界が取り巻いている。磁力線の方向は図の真ん中から上と下で反対向き。その磁力線一本一本にベクトルポテンシャルの渦ができていて、その隙間が摩擦の無いころで埋められていて、ベクトルポテンシャルの渦を感じている。丁度中央のころのラインが上下で向きがそろい、右向きに動いて電流の流れを作り出している。さらに、磁力線が膨らもうとする性質から、 S 極と N 極の引力の説明もされているが、興味のある人は、資料を見て欲しい。

筆者にも、ベクトルポテンシャルに関して一つのイメージが有る。それは、物理空間が粘性の強い液体（水飴みたいな）で埋まっているとする。その中に長い棒があり、電流の流れる方向にその棒が動いているとする。そうすると棒の周りの粘性液体は、棒に引きずられて、同じ方向に、近くのは速く、遠くのは遅く動く。これが、図1のケースにおけるベクトルポテンシャルの大きさと向きである。同様に、図2のケースについても、円環を中心軸で回転させれば、粘性液体の動きは、中も外もベクトルポテンシャルの向きになっている。相対性理論によってその存在が否定されたエーテル（光や電波の伝搬を担う空間物質）を彷彿させるような説明で、若者にお勧めできるものではないが、筆者の中でのイメージ作りには役立っている。

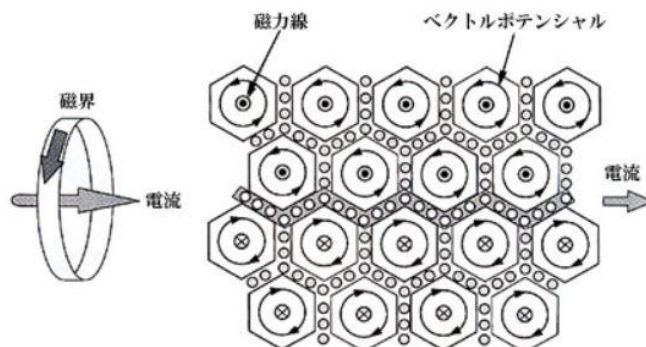


図3 マックスウェルの電磁気モデル (資料[2]中の図をそのまま使用)

参考文献

- [1] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ (2) : マックスウェル方程式の美しい形,” 技術レポート (私報), http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-024_EM-2.pdf
- [2] 外村彰, “電子波で見る電磁界分布 (ベクトルポテンシャルを感じる電子波),” <https://www.ieice.org/jpn/books/kaishikiji/200012/20001201-1.html>

付録

表 1 電磁気関連物理量の MKSA 単位系での次元

(表の右欄の 4 つの数値は MKSA 単位系において、 $m^a kg^b s^c A^d$ の指数部分。本文では、このセットを組立単位と呼び、 $[a,b,c,d]$ で表す。物理量の積は指数の和、商は差で求められ、単位の変化を追うのに便利である。この 4 つの基本単位の並び順にはいくつかの流儀があるが、本資料では MKSA [m, kg, s, A] の順で並べている。)

名称(物理量)	代表的表記	単位名称	物理単位	組立単位			
				M (m)	K (kg)	S (s)	A(A)
力	F	N(ニュートン)	J/m, kgm/s ²	1	1	-2	
エネルギー(仕事)	U	J(ジュール)	Nm	2	1	-2	
電力	P	W(ワット)	J/s, VA	2	1	-3	
電圧	V, ϕ	V(ボルト)	W/A	2	1	-3	-1
電流	I	A(アンペア)	W/V				1
電流密度	i		A/m ²	-2			1
抵抗(インピーダンス)	R	Ω (オーム)	V/A	2	1	-3	-2
導電率			1/ Ω m	-3	-1	3	2
静電容量	C	F(ファラド)	C/V	-2	-1	4	2
インダクタンス	L	H(ヘンリー)	J/A ²	2	1	-2	-2
誘電率	ϵ		F/m	-3	-1	4	2
透磁率	μ		H/m	1	1	-2	-2
電荷・電束	Q, q	C(クーロン)	As			1	1
磁荷・磁束	Q_m, q_m	Wb(ウェーバ)	Nm/A, Tm ² , Vs	2	1	-2	-1
電束密度	D		C/m ²	-2		1	1
磁束密度	B	T(テスラ)	N/Am, Wb/m ²		1	-2	-1
電界	E		V/m	1	1	-3	-1
磁界	H		A/m	-1			1
ベクトルポテンシャル	A		Tm	1	1	-2	-1
周波数	f	Hz(ヘルツ)	1/s			-1	