

電磁気学の奥深さ（7）：動いている人には電波はどう見えるか？

本シリーズのレポート[1]（そのうちの YK-023～028）では、電磁気学の奥深さについて、筆者の興味の赴くところに焦点を当ててまとめている。本レポートでは、電磁波の伝搬を表す波動方程式に着目し、ローレンツ変換に対する共変性と言う視点から眺めてみたい。簡単に言うと、相対論の下、動いている人には電波がどう見えるかということである。共変性を有する鍵は、電界と磁界が寄り添うように存在し、種々の慣性系（一定速度で動く座標系）から見たとき、電界成分が磁界成分に、磁界成分が電界成分に、移り変わってゆく機能にある。これは、音波や水波の波動現象にはない不思議な働きであり、それゆえ、電磁気学は、相対性理論によって吹き荒れた嵐を無傷で乗り切れたのである。本レポートによって、その感覚を味わって欲しい。

1. 波を表す方程式：波動方程式

一般的な波動方程式は次の形で表される。

$$\nabla^2 u - \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(\mathbf{x}, t) \quad (1a)$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{ラプラシアン}) \quad (1b)$$

式中の u は波を形成する物理量（スカラー量、あるいはベクトル量）で、空間 $\mathbf{x}(x, y, z)$ と時間 t の関数、 s は位相速度に対応する量である。また、右辺の f は波の発生源を表す関数である。ここでは、発生源から十分遠方に現われる平面波を対象にするので、その場所では $f=0$ である。波の伝搬方向を x 軸にとると、(1a)式は、以下となる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

この形は、ダランベールの偏微分方程式と呼ばれる。目的とする物理量 u に対して、それに付随する別の物理量 v があり、

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\alpha \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -\beta \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad \left(s = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \right) \quad (3)$$

のような関係が有るときに、(2)式の形になる。水面の波では u は水面の高さ（変化部分）、 v が質量流速（詳しくは水面波動の解説本で）に、電磁波では u, v は電界と磁界に、伝送線路では電圧と電流に、それぞれ対応する。

ダランベールの偏微分方程式の解は、 s が周波数に依存しないとき、以下の式で表される

(導出の説明は略)。

$$u(x,t) = F(x-st) + G(x+st) \quad (4)$$

関数 F, G は任意の関数で、右辺第 1 項は x 軸上を時間と共に速度 s で動く波、第 2 項は速度 s で逆方向に動く波になる。

2 節では、電磁波に対する波動方程式の具体的な形を求めて行く。

2. 電磁波の波動方程式

2 節と 3 節では、図 1 の座標系で説明する。 K 系が基準となる系で、静止系をイメージすると良い。これに対して、 K' 系は K 系に対して、 x 軸方向に速度 v で移動する系で、(K 系も含めて) 慣性系と呼ばれる。 K 系の座標を (x, y, z, t) で、 K' 系の座標 (K' 系にいる人が基準とする座標) を (x', y', z', t') で表す。この節では、 K 系での電磁波 (電波) の性質をまとめる。

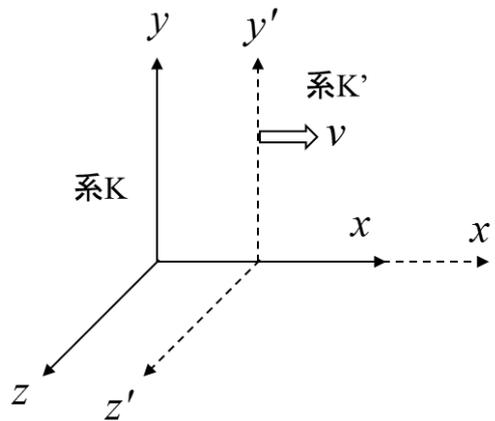


図 1 本資料での慣性系の座標

マクスウェルの方程式を、電荷や電流が無い真空中において、電界 \mathbf{E} と磁界 \mathbf{B} で表すと次式である。(電磁気学では、 \mathbf{B} を磁束密度、 \mathbf{H} を磁界と教わるが、ここでは、 \mathbf{H} を使わず、 \mathbf{B} を磁界と呼ぶ)。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{電磁誘導の法則}) \quad (5a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{アンペア・マクスウェルの法則}) \quad (5b)$$

(5a)式の両辺に“ $\nabla \times$ ”を作用させ、磁界 \mathbf{B} を消去すると、いきなり以下の波動方程式が得られる ($\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$ より)。

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

x 軸方向に伝搬する 1 次元の波動方程式では以下になる。

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

電荷が無い環境では $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ より、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

であり、 yz 面に一様な平面波であるので

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \rightarrow E_x = 0 \quad (9)$$

となり、進行方向に対する成分 (E_x 成分) を持たない。すなわち、横波である。(注: E_x 成分の固定値は存在しうるが、電荷の無い環境で考えているので、 $E_x=0$ 。また x 方向に進む波を表す E_y, E_z について、(9)式が $\partial E_y / \partial x$ や $\partial E_z / \partial x$ について言っているわけではなく、当然、両成分は存在する)。以後では、電界の向きを図 1 の y 方向に取り、 E_y 成分のみで考える。

角周波数 ω に対する定常状態を考えると、

$$E_y(x, t) = E_{y0}(x) e^{j\omega t} \rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial t} = j\omega E_y \quad (10)$$

より、(7)式は

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + k^2 E_y = 0 \quad (k^2 \equiv \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0) \quad (k \text{ は波数と呼ばれる}) \quad (11)$$

となり、その具体的な解は次式になる。

$$E_y = A_1 e^{j(\omega t - kx)} + A_2 e^{j(\omega t + kx)} \quad (12)$$

この波の位相速度 V_{EM} は、(7)から直接に、あるいは、(12)式の “ $\omega t - kx = \text{一定}$ ” の条件である $dx/dt = \omega/k$ より

$$V_{EM} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c \quad (13)$$

となり、光の速度である。この速度は周波数に依存しないので、全ての周波数成分の位相速度が同じ、すなわち非分散性の伝搬になる。非分散性の伝搬では位相速度と群速度が等し

くなり、任意の波形がひずみ無く伝搬される。(12)式を、任意関数 $F(x,t)$, $G(x,t)$ を用いて一般的に表すと(4)式より次式となる。

$$E_y = F(x-ct) + G(x+ct) \quad (14)$$

同様に磁界成分も求められるが、電界が y 軸方向に向くものに対して、磁界はこれと直交する z 軸方向になり、次式で表される。

$$B_z = \frac{1}{c} \{F(x-ct) - G(x+ct)\} \quad (15)$$

以上をまとめると、電磁波（平面波）は

- ・電界と磁界で構成され、両者は直交している
- ・横波である
- ・光速で進む（位相速度）
- ・非分散性である（群速度も位相速度（光速）に等しい）
- ・ローレンツ変換に対する共変性がある（これは次項の 3(1)で調べる）

3. 平面波の伝搬：動いている人にはどう見えるか

(1) 電波の速さ

波動方程式のローレンツ変換に対する共変性を調べる。すべての慣性系（一定速度で移動する系）に対して物理法則は同じ数学形式をとるとき、共変性があると言う。ローレンツ変換に対する共変性とは、光速度不変を基本原理とした（アインシュタインが打ち立てた）特殊相対性理論に合致しているかどうかということである。筆者は、先のレポート[2]で、マックスウェルの各方程式がローレンツ変換に対して共変性であることをまとめている。波動方程式の元になるマックスウェルの方程式に共変性があるなら、それから得られた波動方程式の共変性など調べるまでも無いのだが、それを調べる過程において、電磁気学独特の性質（すなわち他の分野の波動方程式には見られない性質）が見えてくるので、この確認を行う。

K' 系での波動方程式が

$$\frac{\partial^2 E_y'}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y'}{\partial t'^2} = 0 \quad (16)$$

で表されれば、いかなる慣性系においても、電波の速度（位相速度）が光速 c であることが成立する。具体的な確認の仕方の手順は[2]にまとめているので、ここでは、それに従って機械的に変換してゆく。

2節で述べたように、 K 系において、電界と磁界に関して以下の波動方程式が成立していることを前提とする。

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0 \quad (17a,b)$$

図1に示した座標系において、静止している系（K系）のK'系へのローレンツ変換は、以下になる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v/c^2 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{ローレンツ因子})$$

図1に示した座標でのローレンツ変換に用いる基本関係式は以下のとおりである（全体はレポート[2]の式(6),(7a)にまとめている）。

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\gamma v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \quad (19a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma v \frac{\partial}{\partial x} + \gamma \frac{\partial}{\partial t} \quad (19b)$$

$$E_y' = \gamma E_y - \gamma v B_z \quad (19c)$$

$$B_z' = \gamma B_z - \frac{\gamma v}{c^2} E_y \quad (19d)$$

以下、(16)式の左辺を(19)式で展開して整理すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E_y'}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y'}{\partial t'^2} \\ &= \left\{ \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\gamma v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\gamma v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \left(\gamma v \frac{\partial}{\partial x} + \gamma \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\gamma v \frac{\partial}{\partial x} + \gamma \frac{\partial}{\partial t} \right) \right\} E_y' \\ &= \gamma \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \right) - \gamma v \left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (20) \end{aligned}$$

となり、関係ないと思っていた磁界の波動方程式（式(17b)）が現われて、ローレンツ変換に対する共変性に一役買ったことになる。

ついでに、磁界に関する波動方程式での共変性を見ると、以下のように電界と同じ形にな

る。

$$\frac{\partial^2 B'_z}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B'_z}{\partial t'^2} = \gamma \left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \right) - \frac{\gamma v}{c^2} \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (21)$$

これによって、波動方程式のローレンツ変換に対する共変性、すなわち、(16)式が確認されたわけである。(繰り返すが、もとのマックスウェルの方程式で確認されていることなので、波動方程式でもそうなるのは当然のことである)。ここで何を確認したかと言うと、どのような慣性系においても、電波の進む速度は光速であるということである。

因みに、速度 V で動いているものを速度 v の観測系で見ると、その速度 V' は

$$V' = \frac{x'}{t'} = \frac{x - vt}{t - \frac{vx}{c^2}} = \frac{V - v}{1 - \frac{vV}{c^2}} \quad (22a)$$

$$\approx \begin{cases} V - v & (|v|, |V| \ll c) \\ c & (V = c) \end{cases} \quad (22b)$$

となる。

(2) 電波の強さ

次に、 E_y と E_y' 、 B_z と B_z' の振幅関係を見る。K 系と K' 系では

$$E_y = cB_z \quad (\text{K 系}) \quad \rightarrow \quad E_y' = cB_z' \quad (\text{K' 系}) \quad (23)$$

であるので、(19c, d) は次式となる。

$$E_y' = \gamma E_y - \gamma v B_z = \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \right) E_y \quad (24a)$$

$$B_z' = \gamma B_z - \frac{\gamma v}{c^2} E_y = \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \right) B_z \quad (24b)$$

x 方向に速度 v で動いている観測者には、電界、及び、磁界の強度が $\gamma(1-v/c)$ だけ、違って見えるということである。この量はどの程度のものであろうか。これを η とすると、

$$\eta \equiv \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \right) = \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \quad (25a)$$

$$\approx \left(1 - \frac{v}{c} \right) \quad (|v| \ll c) \quad (25b)$$

となり、電波の強度（振幅）は、 K' 系観測者には移動速度に依存する。電波の進む方向と移動方向が同じ場合は、 $\eta (<1)$ 倍となって速度と共に弱くなる。逆に、電波と観測者の進む方向が反対の場合は $1/\eta (>1)$ 倍となって速度と共に強くなる。仮に観測者が光の速度で同じ方向に進めば、(25a)式より、強度が 0 となって、消えてしまうことになり、逆の場合は、無限大の強さになる。両方ともありえないことであるが、感覚的には受け入れられる。

(3) 電波の波長と周波数

以下の議論は、特殊相対性理論のおさらいの様なものになる。 K 系において、 x 軸方向に進む平面波の波長を λ 、周期を T 、周波数を f とする。これらには、 $f=1/T$ 、 $\lambda=c/f$ の関係がある。図2の $x-t$ 座標（ K 系）を用いて説明する。

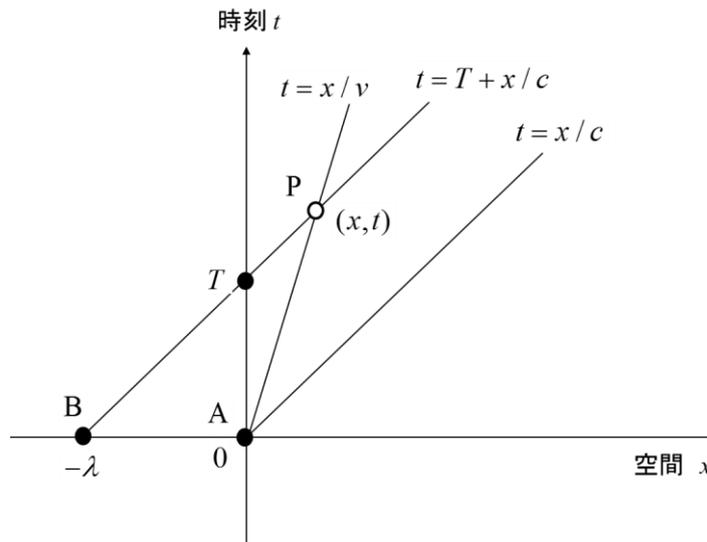


図2 波長と周期の関係の説明図

静止系（ K 系）で、 x 軸方向に波長 λ の長さで2点A,Bがあり、Aが時間的に先にある（A,Bは場所の固定点ではなく、波形にA,Bと目印を入れたイメージ）。図のAの黒丸点を、時間と空間の基準（ $t=0$ のとき $x=0$ ）とし、観測者もこの点を通るとする。A,Bの点は、光速で x 軸方向に進むので、時間と空間の関係は傾きを $1/c$ とする直線で表される。観測者は速度 v で x 軸方向に進んでおり、 K 系の座標において、傾き $1/v$ の直線になる。これをまとめると、

$$t = x / c \quad (\text{A点の動き}) \quad (26a)$$

$$t = T + x / c \quad (\text{B点の動き}) \quad (26b)$$

$$t = x / v \quad (\text{観測点の動き}) \quad (26c)$$

(26b)式と(26c)式の直線の交点を P とすると、K 系で見て、A 点を $x=0, t=0$ で見た後、移動する人が次の B 点を見るのが、P 点になると言うことである。この時刻と場所は、同式の連立方程式より、

$$x = \frac{cv}{c-v}T, \quad t = \frac{c}{c-v}T \quad (27a,b)$$

となる。この P 点 (x,t) を移動系 (K'系) の座標 (x',t') で見ると、ローレンツ変換により次式となる。

$$x' = \gamma x - \gamma vt = 0 \quad (28a)$$

$$t' = \gamma t - \frac{\gamma v}{c^2}x = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}T = \frac{1}{\eta}T \quad (28b)$$

この t' が K'系での周期 T' になり、これを用いて、周波数 f' 、波長 λ' が以下のように自動的に決まる。

$$T' = t' = \frac{1}{\eta}T \quad (29a)$$

$$f' = \frac{1}{T'} = \eta f \quad (29b)$$

$$\lambda' = \frac{c}{f'} = \frac{1}{\eta}\lambda \quad (29c)$$

これより、電波と移動方向が同じ場合は、周期は $1/\eta$ 倍長く、周波数は η 倍低く、波長は $1/\eta$ 倍長くなる（反対方向では、倍率が、それぞれの逆数 ($\eta \rightarrow 1/\eta$) になる）。

周波数 f' と f の差はドップラー周波数であり、これを Δf と置くと

$$\Delta f = (\eta - 1)f \quad (30a)$$

$$\approx -\frac{v}{\lambda} \quad (|v| \ll c) \quad (30b)$$

となり、 $|v| \ll c$ では、お馴染みの式 (30b) になる。

4. まとめ

ローレンツ変換においては、式(18)で定義されるローレンツ因子 γ が重要な働きをするが、電波伝搬の変換においては、式(25a)で定義したファクタ $\eta (= \{(c-v)/(c+v)\}^{1/2})$ が随所に現われる。速度 v で、電波の進む方向（あるいはその逆の方向）に移動する観測系（慣性系）にお

いては、静止系で定めた電波（ここでは平面波）に対して、以下のように違って（あるいは同じに）見える。

- 1) 速度：不変 (=光速 c) である
- 2) 電界と磁界の強さの比：不変である ($E_x/B_y = E_x'/B_y' = c$)
- 3) 強度（振幅）：同じ方向に進めば弱くなる。同方向で η 倍、逆方向で $1/\eta$ 倍
- 4) 波長：同じ方向に進めば長くなる。同方向で $1/\eta$ 倍、逆方向で η 倍
- 5) 周波数：同じ方向に進めば低くなる（ドップラーシフト）。同方向で η 倍、逆方向で $1/\eta$ 倍

電波の進む方向と、移動方向に角度差が有る場合には、上記の 3)~5) の値の全てにその角度依存性が現われる。この場合、到来方向も異なって見えてくる（=斜め前方から入射する電波はさらに前方に傾いて見える）。これらは、各自で考えて欲しい。

このように、電波環境は慣性系によって景色が異なってくることになる。実際に、その差が認知できるのは、移動系 (K' 系) の速度が c に対して無視できない大きさになってからであるので、日常的な世界においては、何も大騒ぎするようなことは起きてこない。さはさりながら、実用を離れて物理現象の仕組みを理解すると言う学術的好奇心もまた、科学の進展には大事なことである。

冒頭にも書いたように、電磁波における電界と磁界の関係は非常に不思議である。電磁気学においては、電界は電荷に、磁界は電流に由来すると学ぶが、電流自体が座標に対して相対的であるので、電界と磁界が相互に作用しあう電磁波においては、それぞれが独立な物理量というよりは、根本で同じものが見方によって異なる形で現れている、と理解したほうがよいかもしい。電界と磁界が寄り添うように存在し、異なる慣性系から見たとき、ある系の電界成分が別の系では磁界成分に、あるいはその逆に、移り変わってゆく。これは、音波や水波の波動現象にはない不思議な働きであり、それゆえに、電磁気学は相対性理論誕生へのコウノトリ役を担うことができたのである。

尚、本レポートでは、電波についての動く人からの見え方についてまとめたが、光も電磁波であるので、ここで述べた結論は光の伝搬にも共通である。電磁波の仲間である光にも電波と同様に電界と磁界（に相当する物理量）が有るのだろうけれども、我々が日常眼にしているのは、どちらなのだろう。

参考文献

- [1] 唐沢好男, 技術報告資料 (私報)、そのうちの YK-023~028 が「電磁気学の奥深さシリーズ」、<http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/report.htm>
- [2] 同上、YK-026: マックスウェル方程式のローレンツ変換、http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-026_EM-4.pdf