

電磁気学の奥深さ（8）：パラドックスを楽しもう

電磁気学では、電界と磁界が織り成す動作の不思議ゆえに、相対論的視点からの様々な思考実験が行われ、見方によって異なる結果をもたらすパラドックスが生み出されている。そのようなパラドックスは、電磁気学と相対論の関係理解を深める意味において格好の教材になる。先人たちが編み出した大部分のパラドックスは、以下のようにほぼ共有な展開を見る。

【発生】 静止した系で一つの現象を見るのと、一定速度で動く系で見ると、力（電気力・磁気力）のバランスが異なってきて、二つの系（慣性系と呼ばれる）の間に動作上の矛盾が起きる

【原因】 磁界は電流によって生起し、動く電荷に対する力（ローレンツ力）を生み出すが、電流や電荷が動く速度は、慣性系に対して相対的なものであり、系によって力関係が変わる

【解消】 特殊相対性理論の考え方、すなわち、物理諸量のローレンツ変換によって、力のバランスに関して辻褄が合い、パラドックスが解消される。その本質は、「動く電気力線は磁界を作る・動く磁力線は電界を作る」という仕組みにある。

電磁気学の力学問題に関するパラドックスは、ニュートン力学にはないものであり、この種の議論や考察が、後の時代に生まれる相対性理論への架け橋になったとも言われている。本資料は、一つのパラドックスを取り上げ、これを解くことによって、相対論的效果を考えてみたい。本レポートによって、電磁気学が実に精巧に組み上げられていることに気付いてもらえれば嬉しい。尚、本レポートをまとめるに際して、江沢洋撰集 II 「相対論と電磁場」[1]中で熱く語られている主張を大いに参考にしていく。

1. パラドックス

電磁気学のパラドックスは、相対性理論と結び付けて、様々な例が取り上げられている。例えば、フラインマンの物理学教科書 ([2]の§13-6) では、電流とその横を平行に動く電子の力関係について論じている。筆者もこのより簡単な例として、2本の平行電流の力関係について議論している[3]。また、前述の江沢洋撰集 II ([1]の§5) では、棒の両端に正負の電荷を固定したものを異なる慣性系で見るときの振る舞いについて議論がなされている。ここでは、別の例で考える（脚注）。

図1に示すように、静止系（ K 系）と、これを左から右に一定速度 v で動く移動系（ K' ）がある。 K 系も K' 系も共に慣性系と呼ばれる。図2(a)のように、 K 系において、 x - y 面上に原点を中心とする半径 a の円があり、円の向きに電流 I が流れている。円の中心に電荷 q (正

【注】 これは、何かの本から取り上げたというものではないが、この種の思考実験は、多くの先人たちが様々に繰り広げており、どこかに同じものがあると思うので、例題のオリジナリティを主張するものではない。いろいろの物理法則を含んでいて、単に面白いと思うからである。

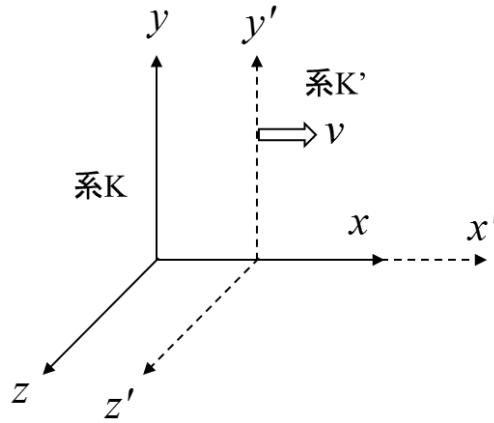
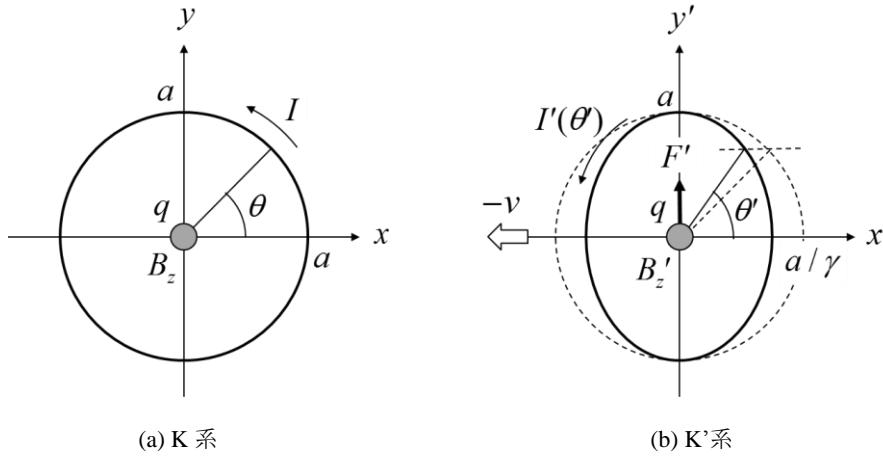


図1 本資料での慣性系の座標



(a) K系

(b) K'系

図2 ループ電流の中心に置かれた電荷は力を受けるか？

電荷を仮定) が置かれている。この状態を **K** 系で見れば、電荷の位置に磁界 \mathbf{B} (向きは z 軸方向) はあるが、電荷に対する力は何も働いていない。すなわち、この状態は変化することなく安定である。[注: \mathbf{B} の正確な呼び名は磁束密度であるが、本レポートでは磁界と呼ぶ]。

一方、これを同図(b)の移動系 (**K'**系) で見るとどうであろうか？ (相対論的効果で、円が楕円に見えるのは後で述べるが、今はそれを気にしなくて良い)。ループ電流と共に、電荷も左側に速度 v で動いているのであるから、この電荷は磁界によって図の y 軸方向にローレンツ力 qvB_z を受ける。他に電界の存在は見え、電荷は y 軸方向に動いてしまうことになる。

このように、同じ現象を止まって見るか動いて見るかで、力のバランス関係が違って見え、結果として動作も異なる。単なる見方の違いによって、力のバランスが変わってしまうことはありえず、これがパラドックスである。これを解きほぐす鍵は、既に冒頭に述べているが、以下、その手順に従って考える。

2. ローレンツ変換に関するおさらい

このパラドックスを解くには、座標や物理量のローレンツ変換が用いられる。筆者も本シリーズの[4]で詳しくまとめているので、ここでは、必要最小限のおさらいをする。

K系の座標を (x, y, z, t) で、K'系の座標 (K'系にいる人が基準とする座標) を (x', y', z', t') で表す。静止している系 (K系) のK'系へのローレンツ変換は以下になる。(この変換式の導出は、相対性理論の入門書ばかりでなく、インターネット検索すれば説明するサイトがいっぱい出てくる)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v/c^2 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq 1 \quad (\gamma: \text{ローレンツ因子}; c: \text{光速})$$

この変換に従うと、K系で長さ Δx 、時間差 Δt を、K'系から見ると付録1で説明するように

$$\Delta x' = (1/\gamma)\Delta x \leq \Delta x, \quad \Delta t' = (1/\gamma)\Delta t \leq \Delta t \quad (2)$$

となって、動いているものを見る時長さは縮み、時計の進みは遅くなることになる。この説明は相対性理論の入り口部分で行われるが、動きは相対的であることによって、関係の理解が混乱することが多い。すなわち、慣性系であれば、その系にいる人にはその系の動きが止まって見え、実は自分たちのいる系がK系であるという認識になる。要はそれぞれの系から見て、相手が(視線方向に)動いていれば、縮んで見えるということである。(詳しくは本資料の付録1で)

次に、電磁界の物理量のローレンツ変換を示す。本レポートで取り扱うケースでは、電界はy軸方向の成分 E_y 、磁界はz軸方向の成分 B_z しか現われないので、この関係のみを以下に示す。

$$E_y' = \gamma E_y - \gamma v B_z \quad (3a)$$

$$B_z' = \gamma B_z - \frac{\gamma v}{c^2} E_y \quad (3b)$$

この式の導出は、他の関係式も含めて、[4]で解説しているが、大事なことなので、付録2でおさらいをする。この式を見て次のことに気がつくであろう。

1) 動く磁界は電界を生み出す (式(3a)で、 E_y に E_y だけでなく、 B_z も寄与している、すな

わち、 B_z から E_y' が生まれている)。動く磁力線は電界を生み出すとするほうがイメージしやすいであろう（この言い方は[1]に）

- 2) 動く電界は磁界を生み出す（式(2b)で E_y から B_z' が生まれている）。同様に、動く電気力線は磁界を生み出す の理解の方がよいかかもしれない[1]

この性質は、パラドックスが生まれるかなり本質的なことなので、4節でもう一度取り上げる。

3. この問題を解く

まず、動いている人（ K' 系）には、この円はどう見えるかからはじめる。時間の基準を円の中心位置にとり、 $t=0, x=0$ とする。 K' 系においても、 $t'=0$ のとき、 $x'=0$ とする。 K' 系においては、ローレンツ変換によって、 x 軸方向は縮み、 y 方向には変化がないので、以下の式で表される楕円（左方向に速度 v で動く）になる（図 2 (b)）。

$$\gamma(x' + vt')^2 + y'^2 = a^2 \quad (4)$$

楕円の中心の磁界 B_z' は以下の手順で求められるはずである。

- (1) K 系での円状ループでの総電荷量 Q とし、ループ上の線電荷密度 λ [C/m] を定める。このとき、電流は $I=c\lambda$ とする。（ $I=c\lambda$ の根拠は[5]）
- (2) 電荷の総量 Q を一定のまま、 x 軸方向を $1/\gamma$ 倍縮めて図 2 (b) の楕円に圧縮し、 $\lambda'(\theta)$ を求める。（両系での電荷保存則 $Q=Q'$ を適用）
- (3) 楕円ループの電流を $I'(\theta)=c\lambda'(\theta)$ により定める。（電流が楕円ループ内で一様でなくなるが、電流連続の式によって、ループ内の電荷の発生・消滅で調整されているとする）
- (4) この電流からビオ・サバルの法則を用いて、楕円の中心点（重心）での磁界 B_z' を求める。

このようにして求まるのであるが、実際に定式化しようとするとは結構煩雑である。そこで、近道を通して、これを直接求める。すなわち、式(3b)より

$$B_z' = \gamma B_z = \frac{\gamma \mu_0 I}{2a} \quad (5)$$

$$\left(\because E_y = 0, B_z = \frac{\mu_0 I}{2a} \right)$$

- (5) 中心の電荷に働くローレンツ力（磁界が動く電荷に作用する力）を求める。この大きさ $F_{(1)}$ は

$$\mathbf{F}_{(1)}' = -q\mathbf{v} \times \mathbf{B}' = \frac{\gamma \mu_0 qvI}{2a} \hat{\mathbf{y}} \quad (6)$$

となり、向きは y 軸の正方向（ $\hat{\mathbf{y}}$ は y 軸方向の単位ベクトル）である。（ローレンツ力

この式に負符号が付いているのは、 K' 系の移動方向を v の向きとしているため)
この段階で、移動する系から眺めると K 系にはなかった力が電荷 q に働くことになり、
パラドックス状態になっている。

(6) ローレンツ力を打ち消す力を探す

この鍵は、(3a)式にある。このケースでは $E_y=0$ であるので、同式は

$$E'_y = -\gamma v B_z \tag{7}$$

となり、 K 系での磁界により（すなわち磁力線の移動により）電界が生まれているのである。この電界により、電荷 q はクーロン力を受け、その大きさ $F_{(2)}$ は

$$F_{(2)}' = qE' = -\gamma qv B_z \hat{y} = -\frac{\gamma \mu_0 qv I}{2a} \hat{y} = -F_{(1)}' \tag{8}$$

となる。これによって、 K' 系でも q に働く力は消え、 K 系と同じ状態になる。めでたし、めでたしである。

4. 考察：動く磁力線は電界を生む

この種のパラドックス（本レポート以外のパラドックスも含んで）では、静止系にある電界を動いている系で見れば、そこには磁界も現れる。同様に、磁界を動いている系で見れば、電界も現れるという不思議にある。磁界が時間的に変化すると電界が生まれる典型的な例は電磁誘導である。今回の問題は静電界（静磁界）の話であり、動的電磁界を対象とする電磁誘導とは違うと思うかもしれない。本当にそうであろうか？以下の議論は、筆者の言葉でまとめているが、種本は[1]である。その本の著者（江川洋氏）の主張は受け継いでいると思っている。

その主張とは、動く磁力線は電界を生み出す、である。もう少し別な言葉で言うと、導線を磁界の中で動かすと、導線が磁力線を切る率に比例して起電力が発生する、ということである。

図3は電磁誘導現象の説明図である。固定された棒磁石に対して、電圧を感知する一巻きコイルを上下させてコイル内の磁界を変化させている（一般的な教科書では、コイルを固定して磁石を上下する図が普通であるが、後の説明のために、この状況を設定している）。電磁誘導の法則を原形とその積分形で表すと以下の式になる。

$$V = -\frac{d\Phi_m}{dt} \rightarrow \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \tag{9a, b}$$

コイル C に沿って電界の接線方向成分を積分すると、その誘導起電力 V （コイルに流れる電流によって起きる電圧降下が無視できるようコイルの抵抗が十分大きいとする）は、コイル C を縁とする任意の面 S を通過する磁束の総量 Φ_m の時間微分値に等しい、と説明され

る。この説明に対して、不合理となる例（すなわち、例外）は見出されておらず、故に、法則として無条件に受け入れるべきものであって、電磁気学授業においてはそれで問題がない。しかし、物理的には、コイルに起きる現象は、コイル部分の場の作用だけで（＝コイルに起きることはコイルの現場のこととして）説明されるべきと言う考え方がある。（コイルから離れた真ん中当たりの磁界は、コイルから見れば関係ないはず）。その考えに基づいて、コイルに生まれる誘導起電力を導線内にある電子に働くローレンツ力の結果として、電磁誘導を説明することもでき、それでも矛盾は起きない。

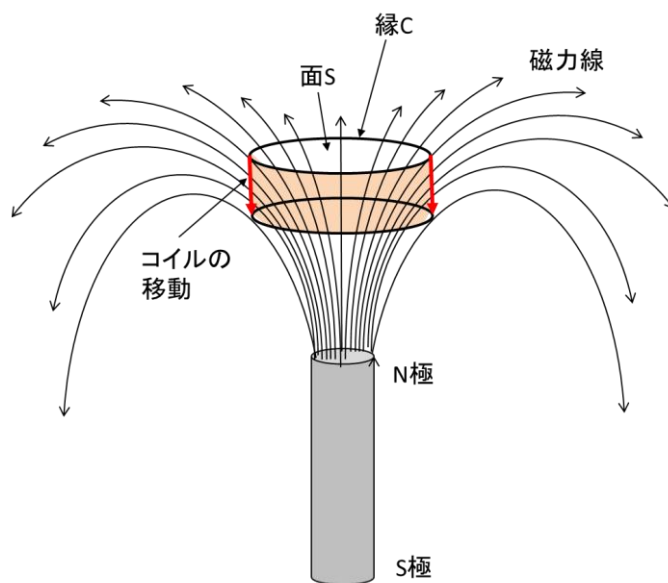


図3 電磁誘導の説明図（誘導起電力はコイルが切る磁力線の時間比率に比例する）

さらにもう一つの考え方がある。コイルに誘起される起電力は、磁場の磁力線を切る時間比率に比例する、と言う考え方である。図で言う、コイルが磁力線を切るとは、図の円筒の側面部から出てゆく磁力線のことであり、この時間比率に着目する、ということである。これを定量的に評価すると（9）式と同じになることが示されている（[1]の§15）。

この考えを、式(3b)の意味に当てはめてみる。今回のケース（図2(a)）では、電荷が置かれている場所では $E_y=0$ であるので、式(3b)は

$$E'_y = \gamma E_y - \gamma v B_z \rightarrow E'_y = -\gamma v B_z \tag{10a, b}$$

であるが、右側の式（10b）の右側の γ （＝ローレンツ圧縮の効果）を除いた部分の vB_z は、まさに電子が磁力線を切る比率である。このようにして、磁界だけの世界の中でも、動く物体（あるいは観測者）は磁力線を切り、それが電界として感じる、と言うメカニズムである。その意味においては図2(b)も電磁誘導も同じである（ファラデー自身もそういう感覚で電磁誘導を捉えていたらしい([1] p229)）。

(3b)式も、磁界と電界を入れ替えて考えれば、同様の結論（動く電気力線は磁界を生む）

が見えてくると思う。

5. おまけ

同類のパラドックスをもう一つ。図4に示すように、電荷から少し離れた位置に自由に回転できる磁針が取り付けられていて、磁界に反応する。この装置を一定速度で動かす。電荷が動くことによって、電荷の周囲に磁界ができる。磁針はこれに反応して磁界の向きに……。動く？

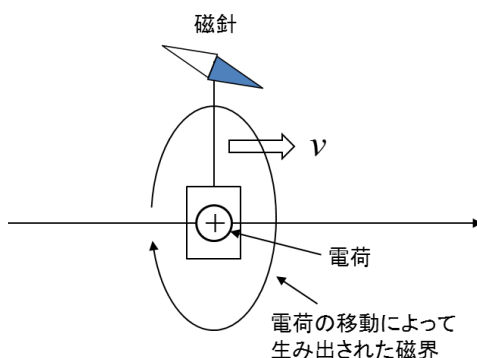


図4 電荷と磁針が一体となった装置が動いている。磁針は反応する？

参考文献

- [1] 江沢洋, 上條隆志 (編), 江沢洋選集 II: 相対論と電磁場, 日本評論社, 2019.03.
- [2] R.P.ファインマン, R.B.レイトン, M.L.サンズ: (宮島龍興訳), ファインマン物理学 III 電磁気学 (§13-6, 7), 岩波書店, 1969.
- [3] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ (3) : 相対性理論への道,” 技術レポート YK-025 (私報), http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-025_EM-3.pdf
- [4] 同上 (4), “マックスウェル方程式のローレンツ変換,” 技術レポート YK-026 (私報) http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-026_EM-4.pdf
- [5] 同上 (5), “電線に流れる電流は光の速さで進む?” 技術レポート YK-027 (私報), http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-027_EM-5.pdf
- [6] 太田浩一, 電磁気学の基礎 II, 東京大学出版会, 2012. (付録2で引用)

付録1 動いているものは縮んで見える

本レポートでは、電磁気学と相対性理論とのかかわりでパラドックスを取り上げているが、相対性理論そのものの中にある時間と長さの関係も、混乱を招くことが多く、ロケットに乗った双子のパラドックスのようなものが話題になる。ここでは、その基本である二つの

慣性系での、長さの関係、時間差の関係について簡単にまとめる。(この種の解説資料はインターネットサイトにも非常にたくさんある)。

基本式 (ローレンツ変換式) は以下の二つである。

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad (\text{A1})$$

その逆変換は以下の式である。

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \quad (\text{A2})$$

両式では、 v にかかる符号が違うだけになっているが、自分が止まっていると考えれば、相手が v で動いている、相手がとまっていると考えれば自分は $-v$ で動いていると言う相対性原理 (物理法則は慣性系によらない) そのものが式に現われているわけである。混乱の原因は、時間 t' への変換に t と x が、空間位置 x' への変換にも t と x の両方が現われて、時間、位置、それぞれの次元だけでの変換にならないためである。

時間差と長さの変換では視点が異なるので、先ず、付図 1 (a) により、時間差の関係から考える。今、慣性系 K において、一つの弾丸が一定速度で x 軸方向に速度 v で動いているとする。慣性系 K において、A 点通過時を (x, t) の座標で $(0, 0)$ 、B 点通過時を (x_B, T) だったとする。一方、弾と同じ速さで動く系 K' での A 点、B 点对応位置を座標 (x', t') で表すとき、A 点は $(0, 0)$ 、B 点は $(0, T')$ であったとする (K' 系では、A 点も B 点も、位置は変わらないので $x_A' = x_B' = 0$ とする)。この設定からの時間差 $T = t_B - t_A$ と $T' = t_B' - t_A'$ の関係を調べる。

K' 系で定めた条件から、 K 系での時間位置 t_A, t_B をローレンツ逆変換 (式 A2) して定めると

$$t_A = \gamma\left(t_A' + \frac{v}{c^2}x_A'\right) = 0, \quad t_B \equiv T = \gamma\left(t_B' + \frac{v}{c^2}x_B'\right) = \gamma T' \quad (\text{A3a})$$

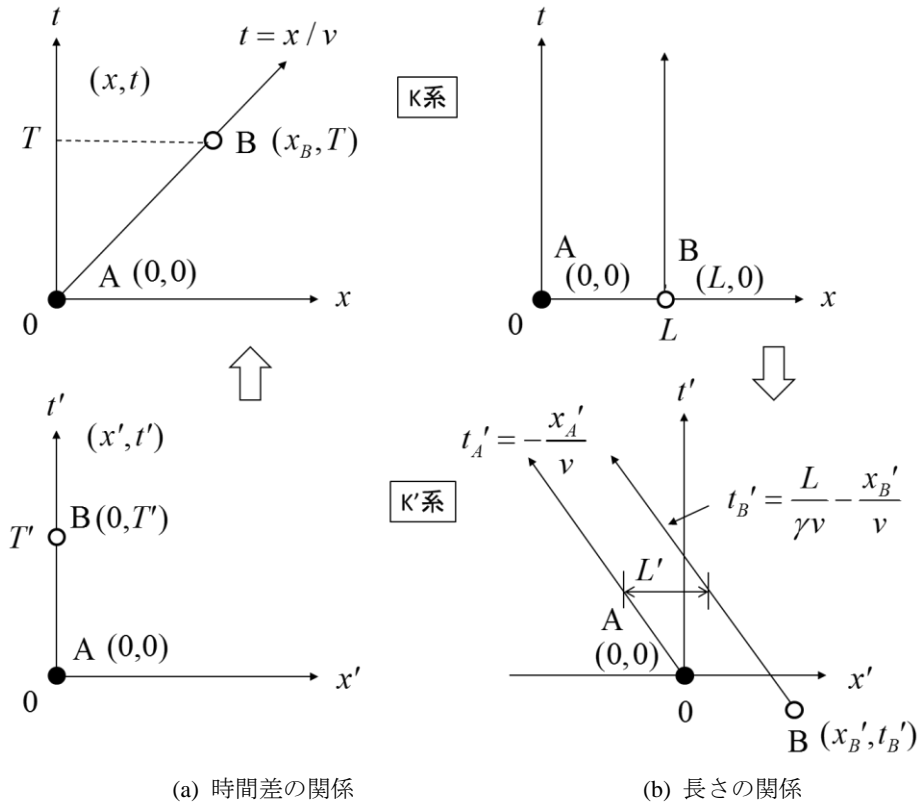
$$\rightarrow T' = \frac{1}{\gamma}T \leq T \quad (\text{A3b})$$

となり、動いている系の時間は、静止系の時間から見てゆっくり進むということになる。参考までに、

$$x_A = 0, \quad x_B = \gamma v T' = v T \quad (\text{A3c})$$

である。

次に、付図 1 (b) により、長さの変換を考える。今度は、 K 系において、長さ L の棒 (両端を A, B とする) を x 軸方向に向けて置く。この長さの一方を $x_A = 0$ 、もう一方を $x_B = L$ とする。この値は、止まって見える棒に対して同時刻に測定された値であり、 $t_A = t_B = t$ ($t = 0$ を原点) とする。そうすると K' 系での座標での棒の両端は $(x_A' = 0, t_A')$ 、 (x_B', t_B') である。これをまと



付図1 時間差と長さに関するローレンツ変換の説明図

めると、

$$x_A = 0, \quad x_B = L \tag{A4a}$$

$$t_A = t_B = t \tag{A4b}$$

となり、K'系では、ローレンツ変換されて

$$x'_A = -\gamma vt, \quad x'_B = \gamma L - \gamma vt \tag{A5a}$$

$$t'_A = \gamma t, \quad t'_B = \gamma \left(t - \frac{vL}{c^2} \right) \tag{A5b}$$

となる。K系でのA点が(0,0)、B点が(L,0)にあるとき、これに対応するA'点、B'点は(0,0)、 $(\gamma L, -\gamma vL/c^2)$ になる(付図1に●と○で表示)。この状態での $x'_B - x'_A = \gamma L$ がK'系での長さだという考え方は間違いになる。長さは、同じ時間に測った距離差でなければならないからである(このあたりが相対性理論らしいところ)。(A5)式で t を消去して x'_A と t'_A 、 x'_B と t'_B の関係を求めると次式になる。

$$t'_A = -\frac{1}{v} x'_A, \quad t'_B = \frac{L}{\gamma v} - \frac{1}{v} x'_B \tag{A6a, b}$$

同じ時刻で比べるのであるから、上式で $t_A' = t_B' = t'$ として、整理すると以下になる。

$$L' = x_B' - x_A' = \frac{L}{\gamma} \leq L \quad (\text{A7})$$

これより、動いている系 (\mathbf{K}' 系) から、静止系 (\mathbf{K} 系) にあるものを見れば、縮んで見えるということである。動きは相対的であるのだから、次のように言い換えたほうが正確である。 \mathbf{K} 系と \mathbf{K}' 系のそれぞれに円が書かれていたとする。それを相手側から見ると、どちらも視線方向を短軸とする楕円に見えるということである。図 2 (b)の楕円は、これが現われている。

付録2 電界と磁界のローレンツ変換：そのおさらい

本文で示した(3)式の意味を詳しく見てみたい。先ず、式を再掲する。

$$E_y' = \gamma E_y - \gamma v B_z \quad (\text{A8a})$$

$$B_z' = \gamma B_z - \frac{\gamma v}{c^2} E_y \quad (\text{A8b})$$

この導出には、空間に E_y と B_z が均一に存在する環境を考える。それには、付図 2 で示す帯電した無限大平行平板 (コンデンサ) で囲む空間を考える。さらにそのコンデンサは、速度 V で右方向に移動している。視点は、静止位置から動きを見ているので、図 1 の \mathbf{K} 系でみていることになる。下の平板には電荷密度 σ で、上の平板には $-\sigma$ の電荷が均一に分布している。電磁気学で学んだように、この空間には以下の電磁界ができています。

$$E_y = \sigma / \epsilon_0, \quad B_z = \mu_0 \sigma V \quad (\text{A9a, b})$$

次に速度 v で x 軸方向に移動する \mathbf{K}' 系でこの電磁界を見る。平行板の移動速度 V' は $V-v$ ではなくて、相対論的効果により次式になる。(正確には微分で求めるが原点を(0,0)にしているのもこれで良い)

$$V' = \frac{x'}{t'} = \frac{x - vt}{t - \frac{vx}{c^2}} = \frac{V - v}{1 - \frac{vV}{c^2}} \quad (\text{A10})$$

電荷密度 σ' は次式になる。(この導出は長い説明が必要なので[6]の§15.5を見て欲しい)

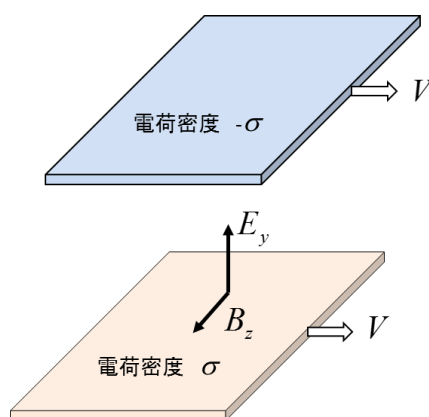
$$\sigma' = \gamma \left(1 - \frac{vV}{c^2} \right) \sigma \quad (\text{A11})$$

これにより、

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\gamma}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{vV}{c^2}\right) \sigma = \gamma (E_y - vB_z) \quad \left(\because c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}\right) \quad (\text{A12a})$$

$$B'_z = \mu_0 \sigma' V' = \mu_0 \gamma \left(1 - \frac{vV}{c^2}\right) \frac{V - v}{1 - vV/c^2} \sigma = \mu_0 \gamma (V - v) \sigma = \gamma \left(B_z - \frac{vE_y}{c^2}\right) \quad (\text{A12b})$$

となり、冒頭の式(A8a, b)が導かれる。



付図2 電界(E_y)と磁界(B_z)のローレンツ変換を説明するための図