

## 電磁気学の奥深さ（9）：“ガウスの法則とガウスの発散定理”，“アンペアの法則とストークスの定理” にみる法則と定理の関係

電磁気学は電気と磁気に関するいくつかの物理法則の上に理論が組み立てられている。では、この法則とはどういう位置づけになるのだろうか。同じような言葉で、定理や原理もあるが、何が違うのだろうか。例えば、ガウスの法則とガウスの発散定理、アンペアの法則とストークスの定理、同じような違うような、微妙な関係に見える。この二つの例を題材として、法則と定理の関係をできるだけ直感的に捉えてみたい。特に、理解に迷い道が多そうに思える後者の例に力点を置く。電磁気学の基礎概念（近接作用に基づく電界・磁界と言った場の概念など）を打ち立てたファラデー(Michael Faraday)は、電磁現象を直感的に捉えることに天賦の才があったと言う（ファラデーの生い立ちや生き様については[1]に豊富なエピソードが語られている）。本レポートでもファラデー流に迫ってみたい。

### 1. 用語の定義

本レポートの主役である定理と法則、それに関連する公理や原理のそれぞれの定義をまとめる（出典は主に Wikipedia）。

#### 公理 (axiom)

命題（真偽の判断の対象となる文章または式）を導きだすための前提として導入される最も基本的な仮定。他の結果を導きだすための議論の前提となるべき論理的に定式化された（形式的な）言明。真実であることが明らかな自明の理が採用されるとは限らない。

例：平面上で直線外の1点を通して、この直線と交わらない直線がただ1本存在する（ユークリッド幾何学）

#### 定理 (theorem)

公理を前提として演繹手続きによって導きだされる命題。その正しさは、公理に基づき数学的に証明される。

電磁気学で使われる定理の例：ガウスの発散定理、ストークスの定理

#### 法則 (law)

ある物事と他の物事との間に一定の関係があるときに、その関係を表す言葉あるいは式。その関係が必然性や普遍性を持つと認められたとき、法則と呼ばれる。観測や実験から帰納されたもので、数学的に証明されるものではない。自然科学に対する法則に対しては、自然界はそのような仕組みになっていると素直に受け入れるしかない。法則に当てはまらない物事が見つかり、新たな法則に置き換えられたり、廃棄されたりする。

電磁気学に現われる法則の例：クーロンの法則、オームの法則、電荷保存の法則（電荷保存則）、ガウスの法則、アンペアの法則、電磁誘導の法則

### 原理 (principle)

自然科学、特に物理学で用いられる基本的な命題。法則とほとんど同義だが、それよりも少し定性的概念的なもの。法則と同様、観測や実験から帰納されたもので、数学的に証明されるものではない。

例：重ね合わせの原理（重ね合わせの理）

## 2. ベクトル解析に関する基本式

本資料の中で登場するベクトルの基本式を整理しておく。

スカラー関数： $\phi(x, y, z)$

ベクトル関数：

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad (\text{直角座標})$$

$$\mathbf{A} = A_r \hat{\mathbf{r}} + A_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{円筒座標})$$

$$\mathbf{A} = A_r \hat{\mathbf{r}} + A_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (\text{球座標})$$

勾配：

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (\text{直角座標})$$

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (\text{球座標})$$

発散：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{直角座標})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{球座標})$$

回転：

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (\text{直角座標})$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{円筒座標})$$

公式

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi \quad \left( \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

ガウスの発散定理 (積分定理)

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

ストークスの定理 (積分定理)

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

### 3. ガウスの法則とガウスの発散定理

#### 3. 1 ガウスの発散定理：その直観的理解

閉曲面  $S$  で囲まれた内部空間  $V$  がある。ガウスの発散定理は、対象空間内で定義されるベクトル関数  $\mathbf{A}$  の内部空間  $V$  での性質とその表面  $S$  での性質を等式で結びつけたものであり、以下の式で表される。

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1)$$

このような、積分変換で表される定理は積分定理と呼ばれる。定理であるから、その正しさは数学的に証明されている。その証明についてはここでは割愛し (ベクトル解析の教科書を見てほしい)、式が意味するところだけを簡潔に述べる。

同式の左辺は、内部空間  $V$  にあるベクトル関数  $\mathbf{A}$  の発散 (=湧き出し) を全部集めたもの (=湧きだしの総量) である。一方、右辺は、表面  $S$  から、その面に垂直に向かうベクトル関数  $\mathbf{A}$  の成分を面全体で積分したものであり、表面から出てゆく量の全体に当たる。

ガウスの発散定理を一言で言えば、「内部で湧き出す量 (左辺) は、表面からあふれ出る量 (右辺) に等しい」であり、至極当然と言う気持ちで受け入れることができると思う。

#### 3. 2 ガウスの法則

電磁気学では、発散が扱われる物理量は、電界  $\mathbf{E}$ 、電束密度  $\mathbf{D}$ 、磁束密度  $\mathbf{B}$  などがあるが、ここでは、代表して、電界  $\mathbf{E}$  に関する発散とガウスの法則を調べる。

電磁気学では、電界は電荷から生まれると説明され、これが電界に関するガウスの法則である。これは、以下の式で表される。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\rho: \text{電荷密度 [C/m}^3\text{)}) \quad (2)$$

ガウスの発散定理に代入すると、

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3)$$

である。(2)式がガウスの法則の微分形表現、(3)式が積分形表現である。

原点  $r=0$  に点電荷  $Q$  がある場合には、球座標において、(2)式は以下のようなになる。

$$\rho = Q\delta(r) \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \delta(r) \quad (4)$$

ここで、 $\delta$ はディラックのデルタ関数で、原点以外は0である。このとき、 $S$ を半径  $r$  の球面とすると、(3)式は以下のようなお馴染みの式になる。

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = 4\pi r^2 E_r \rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (5)$$

電荷が距離の2乗に逆比例する形で電界を生み出しているというのが、ガウスの法則の主要帰結である。しかし、この距離の2乗に逆比例するという性質は、ガウスの発散定理そのものの中にある性質である。すなわち、(1)式で、発散が原点の微小領域のみにあって、閉曲面  $S$  を半径  $r$  の球の表面におけば、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \propto \delta(r) \rightarrow \mathbf{A} \propto \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (6)$$

となり、ベクトル量  $\mathbf{A}$  の距離の2乗に逆比例する性質は、ガウスの発散定理に現われている。では、ガウスの法則が言いたい部分はどこに有るかと言うと、

1) 電荷と電界という異なる物理量を結びつける関係 ((2)式)

2) ガウスの発散定理がもつ距離の2乗に逆比例する性質が、維持されていること

(数学的に正しくても、物理がそうなるとは限らないが、ここでは、物理現象が持つ性質として実際にそうになっている)

このように自然界が、数学に従った美しい法則に支配されていることを喜びたい。

ガウスの法則を次のような喩話にすると、より直観的でわかりやすいと思う。

「針の数が  $Q_1$  本と  $Q_2$  本の2匹のハリネズミがいる。針は曲がらず十分な長さがあるとす。この2匹を閉じられた空間に入れる。ハリネズミがどの位置に居ようが、表面から飛び出す針の本数は  $Q_1 + Q_2$  である。」

### 3. 3 もう一つの見方

ここでは、点電荷  $Q$  で作られる電界  $\mathbf{E}$  及びスカラーポテンシャル (あるいは電位)  $\phi$  の関係について電磁気学的な整理をしたい。

静電界において、電界  $\mathbf{E}$  はスカラーポテンシャル  $\phi$  の勾配として、次式で与えられる。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (7)$$

点電荷  $Q$  の場合について(4)式に代入すると、スカラーポテンシャル  $\phi$  は以下のように解ける。

$$\nabla^2\phi = -\frac{Q}{\varepsilon_0}\delta(r) \rightarrow \phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (8)$$

これをまとめると、電荷  $Q$ 、スカラーポテンシャル  $\phi$ 、電界  $\mathbf{E}$  には、以下のような解釈が可能である (注1)。

- 1) 電荷  $Q$  が存在する (ここが出发点)
- 2) 空間にスカラーポテンシャル  $\phi$  が生まれる
- 3) スカラーポテンシャルの勾配として、空間に電界  $\mathbf{E}$  が生まれる

---

(注1) これは解釈の問題である。電荷から直接電界が生まれるとして、スカラーポテンシャルに触れずに説明することでも問題は無い。例えば、電荷→電界、あるいは、電荷→電気力線→電界、など、色々の考え方ができる。

---

## 4. アンペアの法則とストークスの定理

### 4. 1 ストークスの定理：その直観的理解

ループをなす経路  $c$  で囲まれた曲面  $S$  を考える。ストークスの定理は、曲面  $S$  上でのベクトル関数  $\mathbf{A}$  に関する積分定理で以下の式で表される。

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (9)$$

先ず、式の意味を考える。

同式の左辺は、曲面  $S$  上におけるベクトル関数  $\mathbf{A}$  の回転 (=渦巻き力; ベクトルの向きは回転軸の方向) の面に垂直な方向の成分を全部集めたもの (=回転力の総量) である。一方、右辺は、面の縁をなす経路 (ループ)  $c$  上でのベクトル関数  $\mathbf{A}$  の経路方向成分を経路全体で積分したものであり、ループに働く渦の力。式の左右に表される量が等しい、という定理である。

ストークスの定理を一言で言えば、「面上の微小部分に発生する回転 (左辺) が、その外側に渦を作り (右辺)、任意のループに対する積分値はループの形によらない」であり、ガ

ウスの発散定理の直感的理解のしやすさに比べると、少し分かりにくいように思う。

電磁気学（あるいはベクトル解析）授業などで、この定理の意味について、以下のような説明が見受けられる。図 1 (a)で、左側に示す 4 つの矩形ループがあって図のように回転力がある。この場合に、内部の接合部分は力が打ち消されて消え、残るのは、右側図のように縁の成分のみになる。同図(b)のような一般的な形でも同様なことになり、結局、内部の回転力は縁にのみに現れる、という説明である。この説明を聞いて、なんとなくわかった気分になるが、誤解を招く説明であり、筆者は良い説明とは思わない。例えば、 $\nabla \times \mathbf{A}$  が、ループの中心部分にはあるが、ループの縁付近には無い場合（すなわち外周付近では $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ ）、図 1 (b)の説明は成立しないからである。同図の説明が有効となるのは、面内に $\nabla \times \mathbf{A}$  がほぼ均一に存在するような場合（まさに図に書いたような例）のみで、それは一般的ではない。

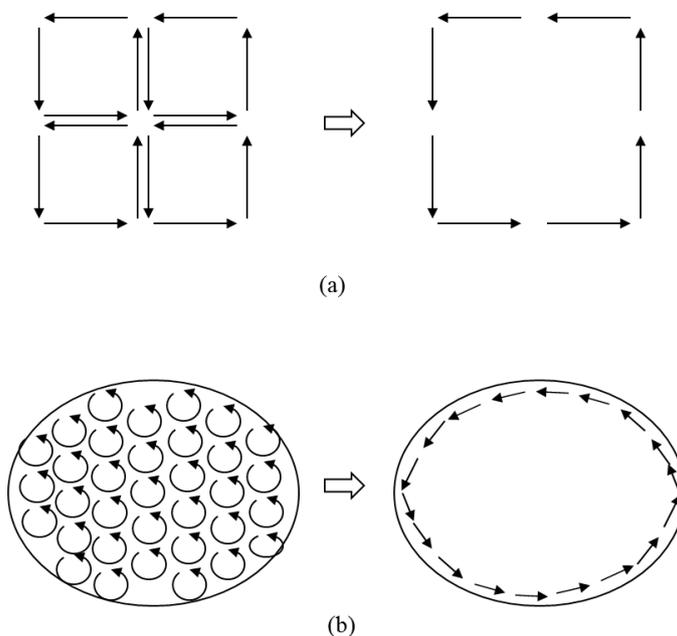


図 1 ストークスの定理の直感的説明イメージ図（誤解を与えて良くないという例）

ストークスの定理の意味するところは、面内の一部に $\nabla \times \mathbf{A}$ なる量が存在すれば、その影響はループの位置にまで現れるということである。図 2 のように、曲面  $S$  上の 2 つの微小エリア  $\Delta S_1, \Delta S_2$  のみにそれぞれ  $\nabla \times \mathbf{A}_{10}, \nabla \times \mathbf{A}_{20}$  が均一に存在する場合を考える。  $S$  面上の 3 つのループ  $c_1, c_2, c_3$  に対して、(9)式から、次のことが導かれる。

$$\oint_{c_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{c_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^2 \nabla \times \mathbf{A}_{i0} \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i \quad (10a)$$

$$\oint_{c_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (10b)$$

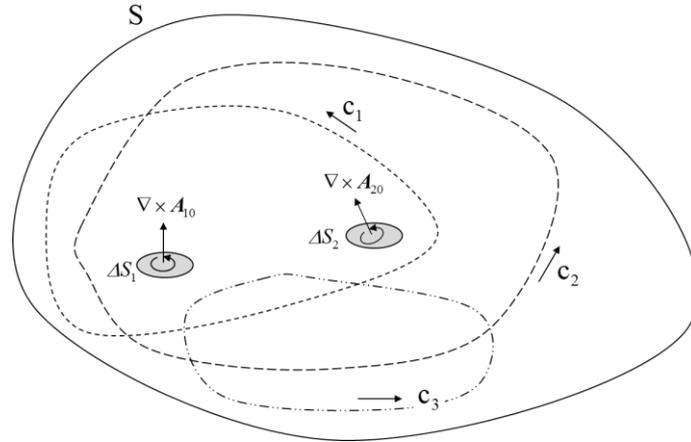


図2 ストークスの定理の説明図（回転成分が面内の2箇所が存在する場合）

これも定理であるから、その正しさは数学的に証明されている。その証明の詳細は、教科書に任せて割愛するが、図2の説明だけでは分かりにくいので、もう少し直感的説明を試みる。ストークスの定理は、任意の曲面上で成立する定理であるが、平面上での説明の方がイメージしやすいので、以下、それでの説明を行う。

ストークスの定理 (9)式) を直角座標成分で書き下すと以下のようなになる。

$$\int_S \left\{ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right\} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_c (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \quad (11)$$

曲面上での問題を平面上での問題に置き換えるため、 $\mathbf{n}=\mathbf{k}(=\hat{z})$ ,  $A_z=0$  とする。この時、上式は以下のように簡単になる。

$$\int_S \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy = \oint_c (A_x dx + A_y dy) \quad (12)$$

平面では曲面に対して以下の対応になる。

$$\nabla \times \mathbf{A} \rightarrow \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}, \quad dS \rightarrow dx dy$$

この関係式 (ストークスの定理を平面に適用した(12)式) は、グリーンの定理と呼ばれている。グリーンの定理の証明は  $A_x$  と  $A_y$  の成分に分離した以下の連立方程式

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left\{ \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial A_y(x, y)}{\partial x} dx \right\} dy = \oint_c A_y(x(y), y) dy \quad (13a)$$

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial A_x(x, y)}{\partial y} dy \right\} dx = - \oint_c A_x(x, y(x)) dx \quad (13b)$$

のそれぞれについて、左辺から右辺を導出する形で行うが、左辺の形を見ると、右辺の形が見えてくると思う（具体的な導出説明は略）。この平面に適用したストークスの定理（すなわちグリーンの定理）で、その意味を考えてみたい。

図3において、中心部に円形微小領域 $\Delta S$ がある。この微小領域内に、ベクトル場 $\nabla \times \mathbf{A}_0$ が均一に存在するとする。（場と言うのは、物理の概念であって、数学にはないが、ここでは、これが後に場を表す物理量とつながるので、場と言う言葉を使う）。図では、 $\mathbf{A}_0$ のイメージで渦の絵で書いているが、ベクトル $\nabla \times \mathbf{A}_0$ の向きは紙面に対して垂直（手前方向： $\hat{z}$ ）である。この $\Delta S$ にあるベクトル場は、 $\Delta S$ 外（半径 $r$ の地点）に以下のベクトル場 $\mathbf{A}$ を作る。

$$2\pi r A_\phi = (\nabla \times \mathbf{A}_0 \cdot \hat{z}) \Delta S \rightarrow \mathbf{A}(r) = \frac{1}{2\pi r} (\nabla \times \mathbf{A}_0 \cdot \hat{z}) \Delta S \hat{\phi} \quad (14)$$

このようにして、周方向に成分を持つベクトル場 $\mathbf{A}$ が作られるが、このベクトル場の回転は $\dot{0}$ である。これは非常に勘違いされやすいところと思うが、なぜなら、円筒座標表現で

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) = 0 \quad (\Delta S \text{ 外の領域}) \quad (15)$$

であるからである。

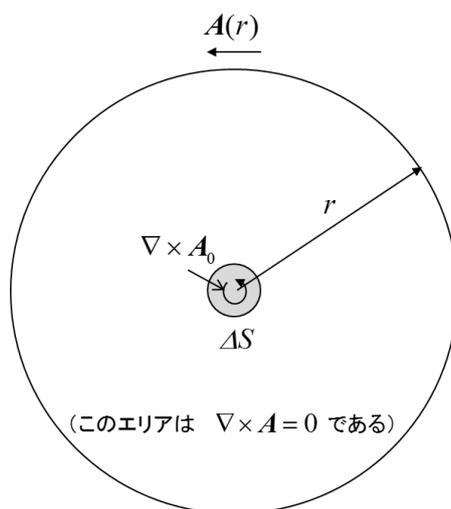


図3 円の中心に回転成分がある場合（平面に適用したストークスの定理）

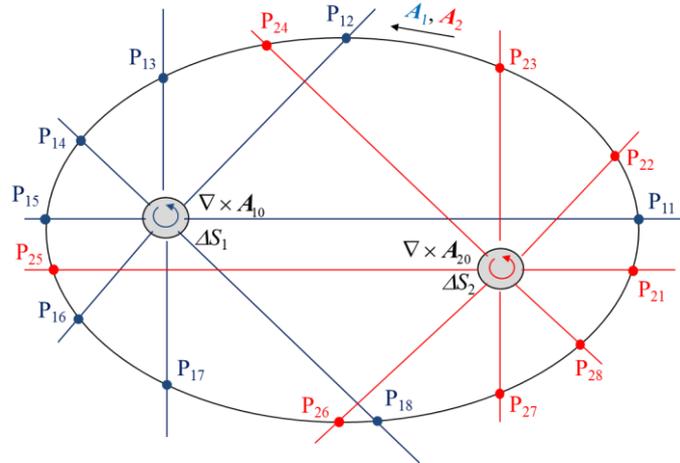


図4 2箇所に回転成分が有る場合（平面に適用したストークスの定理）

図4は、図2と同様に、二つの微小エリア $\Delta S_1$ と $\Delta S_2$ に回転成分がある場合であり、違いは、平面で考えていることである。 $\Delta S_1$ と $\Delta S_2$ にある回転成分によって、周囲にベクトル $\mathbf{A}_1$ 、 $\mathbf{A}_2$ の渦ができ、等角度で8分割した図のケースでは、以下の性質がある。

$$\int_{P_{11}}^{P_{12}} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_{12}}^{P_{13}} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l} = \dots = \int_{P_{17}}^{P_{18}} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{8} \nabla \times \mathbf{A}_{10} \cdot \hat{\mathbf{z}} \Delta S_1 \quad (16a)$$

$$\int_{P_{21}}^{P_{22}} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_{22}}^{P_{23}} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l} = \dots = \int_{P_{27}}^{P_{28}} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{8} \nabla \times \mathbf{A}_{20} \cdot \hat{\mathbf{z}} \Delta S_2 \quad (16b)$$

回転成分を持つ微小エリアが $N$ 個ある場合には、重ね合わせの原理により

$$\sum_{i=1}^N \nabla \times \mathbf{A}_{i0} \cdot \hat{\mathbf{z}} \Delta S_i = \oint_c \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \cdot d\mathbf{l} \rightarrow \int_s \nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{z}} dx dy = \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (16c)$$

である。ストークスの定理は、平面上で考えた方が分かりやすいので、そのような説明を行った。(9)式のストークスの定理は、平面上の定理（グリーン定理）を曲面上の定理に拡張したものであり、ここまでが理解できれば、その先の理解も容易と思う。

#### 4. 2 アンペアの法則

磁界は電流から生まれると言う性質をもち、これがアンペアの法則である。マックスウェルの方程式では、以下の式で表される。（注：本レポートでは、磁束密度として定義される $\mathbf{B}$ を磁界と呼んで用いる）

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} \quad (\mathbf{i}: \text{電流密度 [A/m}^2\text{]}, \mu_0: \text{真空中の透磁率}) \quad (17)$$

ストークスの定理に代入すると、

$$\mu_0 \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (18)$$

である。(17)式がアンペアの法則の微分形表現、(18)式が積分形表現である。

円筒座標において、中心軸  $r=0$  に電流  $I$  が流れている場合には、(17)式は以下のようなになる。

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 I \delta(r) \quad (19)$$

このとき、半径  $r$  の円上では、(18)式は以下のようなお馴染みの式になる。

$$\mu_0 I = 2\pi r B_\phi \rightarrow B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (20)$$

無限直線状に流れる電流の存在が、距離に逆比例する形で影響が及んでいると言うのが、アンペアの法則の主要帰結であり、かつ、ストークの定理から導かれる帰結でもある（式(14)）。ガウスの法則と同様に自然界が美しい法則に支配されている（＝数学の世界が自然界の法則に現われている）ことを喜びたい。

アンペアの法則を次のような喩話にすると、より直観的でわかりやすいと思うがどうであろうか。

「フィンの数が  $I_1$  本と  $I_2$  本の2組の水車がある（図4を  $z$  方向（紙面に垂直な方向）に長く引き伸ばして立体化させたイメージ）。フィンは曲がらず  $r$  方向（中心から離れる方向）に十分な長さがあるとす。この2つを断面（底面）が任意形状の筒状空間（軸は  $z$  方向）に入れる。電流が任意断面内のどの位置に流れていようが、筒の側面上の任意のループを切断するフィンの数は  $I_1 + I_2$  であり、ループの経路方向の磁界成分の積分値（＝水車を回す力）は  $I_1 + I_2$  に比例し、かつ、ループの形状によらない。」

（図がなくてイメージしにくいかもしれないが、読者の想像力にお任せ）

#### 4. 3 もう一つの見方

ここでは、 $z$  軸方向に無限直線状に電流  $I$  で作られる磁界及びベクトルポテンシャルの関係について電磁気学的な整理をしたい。

静磁界において、磁界  $\mathbf{B}$  はベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の回転として、次式で与えられる。（ここまでは、ベクトルの一般表記として  $\mathbf{A}$  を用いてきたが、この節での  $\mathbf{A}$  はベクトルポテンシャルを表す）

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (21)$$

ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  は、マックスウェルの方程式の一つ  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  を要請するために生まれた仮想物理量とも言えるが、実体としても存在することが量子力学の分野で確認されている（アハラノフ・ボーム効果：[2]、[3]）。

(21)式を(9)式に代入すると、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  は  $z$  方向成分のみを有し、以下のよう  
に解ける（導出は[3]の(8)式。距離  $a$  は基準とする距離であるが、任意の距離においてよ  
い）。

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 I \delta(r) \hat{z} \quad \rightarrow \quad A_z(r) = A_z(a) - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a} \quad (22)$$

さらに、

$$\nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{\phi} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = B_\phi \quad (23)$$

となることが確かめられる。

これをまとめると、電流  $I$ 、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$ 、磁界  $\mathbf{B}$  には、以下のような解釈が  
可能である（注2）。

- 1) 電流  $I$  が存在する
- 2) 空間にベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  が生まれる
- 3) ベクトルポテンシャルの回転として、空間に磁界  $\mathbf{B}$  が生まれる

図5はこのイメージをまとめている。

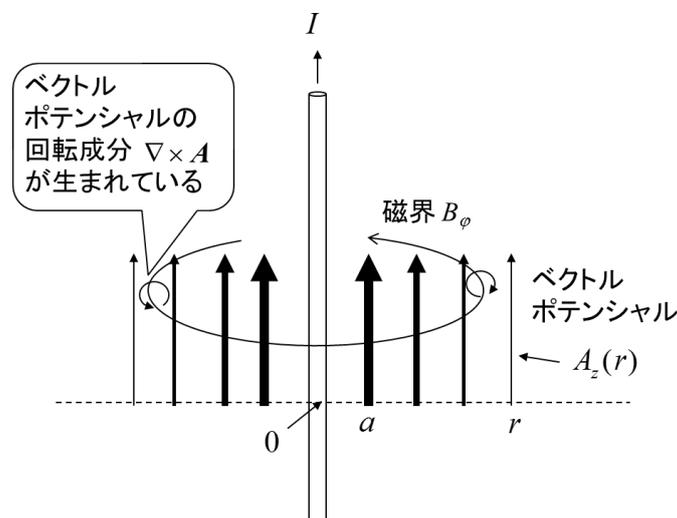


図5 電流・ベクトルポテンシャル・磁界の関係

(注2) これも先の注1と同様に解釈の問題である。電流から直接磁界が生まれるとして、ベクトルポテ  
ンシャルに触れずに説明することも問題は無い。例えば、電流→磁界、あるいは、電流→磁力線→磁界、  
など、色々の考え方ができる。

## 参考文献

- [1] 小山慶太, 光と電磁気: マックスウェルとファラデーが考えたこと、ブルーバックス、講談社, 2016.
- [2] 外村彰, “電子波で見る電磁界分布 (ベクトルポテンシャルを感じる電子波),”  
<https://www.ieice.org/jpn/books/kaishikiji/200012/20001201-1.html>
- [3] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ (6) : ベクトルポテンシャルを知ろう,” 技術レポート YK-028 (私報),  
[http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-028\\_EM-6.pdf](http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-028_EM-6.pdf)