Technical Report YK-032
Sept. 10, 2019
Y. Karasawa

電磁気学の奥深さ（１０）:（コーヒータイム）静電界に$\nabla\times\boldsymbol{E}$はあるか？

筆者は大学において電磁気学の授業を担当したが、教えるべき内容が山ほどあって、物理世界の美しさや面白さを伝える余裕がなかったと言う反省がある。本当の面白さは、マックスウェルの方程式に至るまでを学ぶ過程において、そこに生まれる疑問や不思議を突き詰める所にあると思っている。本シリーズでは、そのような視点から、少し脇道にそれたところ、特に、相対性理論が見え隠れする部分に焦点を当て、興味の赴くままにまとめてきた。ここでちょっと一休み、コーヒータイム。

【起】

先生：電磁気学のおさらいをします。静電界に渦はできますか？

学生：静電界は保存場（*）ですから、渦はできません。

（*: 線積分が経路によらず、始点と終点の電位の差で決まる性質を持つ場）

先生：数式で表すとどうなりますか？

学生：３次元上の任意の周回経路に対して $\oint_c \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0$ です。ストークスの定理 $\oint_c \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S \nabla\times\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS$ より、至るところで $\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ です。

先生：では、コンデンサの中の電界を考えてみよう。図１の実線で示す平行平板コンデンサ中の電界 $\boldsymbol{E}_0$ はどうなりますか？

学生：$\boldsymbol{E}_0=-(V/d)\boldsymbol{k}$ ですので、大きさは V/d、向きは z 方向下向きで、電極間は均一です。

当然、$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ です。

先生：そうですね。次に、電極の一方を図の点線のようにほんの僅かに傾けてみましょう。この場合、電界 $\boldsymbol{E}$ はどうなりますか？

学生：電界は、x の関数になり、ずれが十分小さい場合は、以下で近似できます。

$$\boldsymbol{E}(x)\approx\frac{V}{d+\varDelta z(x)}\boldsymbol{k}\approx\boldsymbol{E}_0-E'x\boldsymbol{k}$$

E'はコンデンサのパラメータやずれの量に依存する微小値ですが、コンデンサ内で定数として扱えます。

先生：電界の回転はどうなりますか？

学生：　$\nabla\times\boldsymbol{E}(x)\approx\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & E_0-E'x\end{vmatrix}=E'\,\boldsymbol{j}$　となるので、僅かながら（＝E'の値は小さいだろうけれど）回転があります。回転軸の向きは y 軸方向です。

先生：静電界でも回転がある場が存在すると言うことですか？でも、保存場だから、電界の回転（渦巻き）はなかったのではないのですか？

学生：そのはずなんですが、でも、この場合は確かに・・・・？？

先生：マックスウェルの方程式では何と言っていますか？

学生：$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$（電磁誘導の法則）です。静電磁界では$\partial\boldsymbol{B}/\partial t=\boldsymbol{0}$なので、$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$と言っています。

先生：と言うことは・・・。

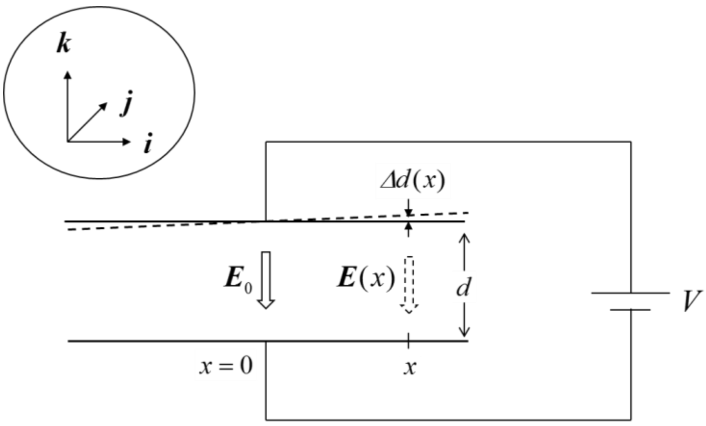

図１　コンデンサの中の電界

【承】

学生：これ、パラドックスですね。すっきりさせたいです。

先生：ストレスがある場について考えてみよう。何か思いつきますか？

学生：大地震の原因になる二つのプレートの境界面があります。

先生：その境界面に指を入れたらどう感じますか？

学生：捻られる感じを受けるだろうと思います。

先生：そうです。そういうストレスを感じるところに回転（渦巻きの力）があるのです。

学生：以前に読んだ本[1]で、流れの中に水車を入れて回り始めたら、そこに回転がある、とありましたが、それと同じですね。先生は、それをストレスと言っているのですね。

先生：そうです。ストレスがある場を絵に描くとどんな感じですか？

学生：図２とかです。

先生：その例で、場を $\boldsymbol{F}=ax\boldsymbol{k}$ とすると、回転はどうなりますか？

学生： $$\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & ax\end{vmatrix}=-a\,\boldsymbol{j}$$ となります。

先生：電磁気学で例を挙げると何がありますか？

学生：図３に示すように、直線状の電流に対して、それと平行にベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ ができます[2]。次式です。

$$A_z(r)=A_z(a)-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r}{a}$$

中心からの距離 r が大きくなるに従い弱くなるので、z 方向に対してストレスが生じています。

先生：この問題は円筒座標で考えるとよいですね。回転を計算してください。

学生：$\nabla\times\boldsymbol{A}=-\dfrac{\partial A_z}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\varphi}}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ となります。

先生：$\nabla\times\boldsymbol{A}$ に対応する物理量は何ですか？

学生：ベクトルポテンシャルは、$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ の定義から生まれており、$\boldsymbol{B}$ は磁界（正確には磁束密度）です。これで、磁界が電流の周りに渦巻きを作ることがイメージできました。

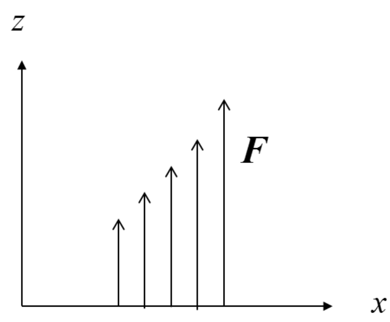

図２　ストレスのあるベクトル場

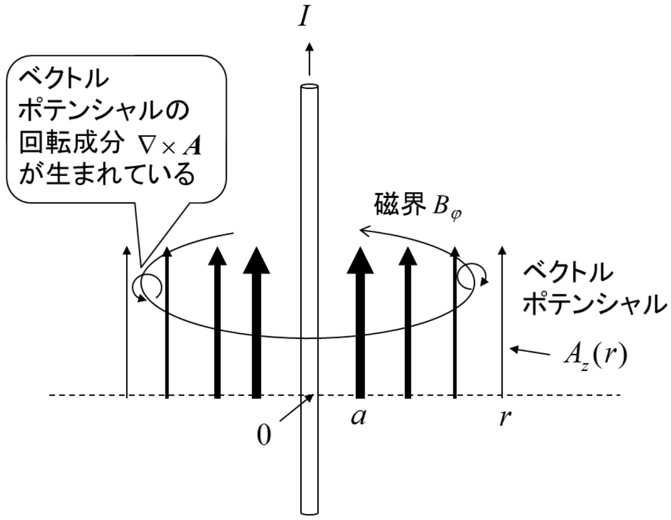

図３　直線状電流から生まれるベクトルポテンシャル（強さを線の太さで表している）と磁界

【転】

先生：次に、図３で磁界 $\boldsymbol{B}$ の性質を調べてみましょう。磁界の強さはどうなっていますか？

学生： $B_\varphi = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ですので、距離 r の増加と共に弱くなります。その傾向はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ と同じです。

先生：では、ここにも回転がありますか？円筒座標で求めてください。

学生： $\nabla\times\boldsymbol{B} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi)\hat{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{0}$。あれっ、渦巻きになっているのに回転無しと出ました。

先生：ベクトルポテンシャルも磁界も距離が大きくなるほど弱くなると言う性質は同じなのに、一方に回転があり、もう一方に回転はないというのはどうしてだろう。

学生：磁界（と同じベクトルを持つ流れ）の中に指を突っ込んでも、φ方向に押されるだけで、捻られる力は働きません。それだからだと思います。電流のところに中心をもつ円盤が一体として回転するイメージで、確かに、場にストレスは発生していません。

先生：アンペアの周回積分の法則を図３の磁界に適用するとどうなりますか？

学生： $\displaystyle\oint_c \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \begin{cases}\mu_0 I & \text{(経路}c\text{が作る面内に差交電流有り)}\\ 0 & \text{(同無し)}\end{cases}$ です。微分形では $\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0 I\delta(r)\hat{\boldsymbol{z}}$ となります。なので、電流があるところ（式でデルタ関数が値をもつ r=0）以外は、至るところ $\nabla\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ と言うことがわかりました。

先生：多くの学生は、電流の周りに渦状の磁界 $\boldsymbol{B}$ が生まれ、だから、$\nabla\times\boldsymbol{B}$ には、値がある（＝0 以外の値を持つ）と思っているようですがそれは間違いです。アンペアの法則を支えるストークスの定理の教え方（意味づけ）が良くないのだと思います[2]。

【結】

学生：でも、最初のパラドックスのもやもやはまだ晴れません。【承】のような考え方をして、同じような結論になりました。そしてそれはおかしいと。

先生：実はあの問題は、【転】と同じだったのです。だから、$\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathbf{0}$ となるべきだったのです。

学生：電界の近似が良くなかったのですね。そうか、電界の向きを電気力線で描くと、z 方向に直線ではなく、バームクーヘンのように円弧状になっていた、ということですね。金属面から出てゆく電気力線は面に直角な方向になるのだから。

参考文献

[1] 長沼伸一郎, *物理数学の直観的方法*, ブルーバックス, 2011.

[2] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ（９）： **“**ガウスの法則とガウスの発散定理**”, “**アンペアの法則とストークスの定理” にみる法則と定理の関係,” 技術レポート YK-031（私報）, 2019, http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-031_EM-9.pdf