

電磁気学の奥深さ（11）：マックスウェルの方程式ができるまで（その1）

唐沢 好男

筆者はこのシリーズにおいて、「電磁気学の奥深さ」のタイトルで、10篇の技術レポートを作成してきた。そのレポートでは、筆者自身が面白いと感じること、不思議だと思ふことに絞ってまとめている。学部レベルの電磁気学の授業で、マックスウェルの方程式までを一通り学んだ人を読者対象としている。ここでは、その対象をもう少し広い範囲にしたいために、電磁気学のハイライトであるマックスウェルの方程式が出来上がって行く過程をまとめている。マックスウェル自身が打ち立てた電磁気学は、多くの物理量の関係を多くの連立方程式で書き表した複雑なものであったそうであるが、ヘビサイドやヘルツがそのエッセンスを抽出し、今日の電磁気学教科書にある4つの方程式に集約している。そのお陰で、後の時代に学ぶ我々にとっての電磁気学は、極めて見通しの良い理論体系に生まれ変わっている。

本レポートは、多岐に渡る電磁気学の授業内容のうち、マックスウェルの方程式に直接に関わる部分のみに焦点を当ててまとめている。電磁気学の学びを山登りに例え、マックスウェル山の頂上にある4つの方程式の理解を目指す。途中、極力、寄り道をせず（脇道にも大事なものはいっぱいあるが、それらには目を向けず）、メインストリートをひたすら頂上を目指して登るスタイルをとる。一般的な学部レベル電磁気学教科書内容の半分程度、しかし、エッセンスはほぼ全部含んでいる。本シリーズレポートの基礎を与える筆者流電磁気学教科書である。

内容目次

1. 準備

1. 1 法則と定理
1. 2 ベクトル解析
1. 3 登場する物理量と単位
 1. 3. 1 電磁気関係の物理量
 1. 3. 2 MKSA 単位系と物理単位
1. 4 場の概念：遠隔作用と近接作用
1. 5 マックスウェルの方程式

2. $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ ：電束密度の関するガウスの法則

2. 1 電磁気学の出発点：電荷
2. 2 クーロンの法則
2. 3 電界

- 2. 4 電位
- 2. 5 電束密度
- 2. 6 電界及び電束密度に関するガウスの法則

..... 【本レポート（その1）はここまで】

（以下、続編（その2以降）で）

3. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$: 磁束密度に関するガウスの法則

4. $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}$: アンペアの法則

5. $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$: 電磁誘導の法則

6. $\mathbf{i}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$: 変位電流

7. マックスウェルの方程式

8. 電磁気学の奥深さ

（既存レポートを整理して紹介）

注：このテキストをまとめるに際して、筆者が長年授業で使ってきた下記の教科書を参考にしている。ところどころに類似の表現があるかもしれないが、それはこの理由からである。同教科書には、理解を助ける図面や練習問題も多く、本レポートが簡潔すぎて分かりにくいときは、あるいは自習参考書としても役立つと思う。

渡辺征夫, 青柳晃, *工科の物理：電磁気学*, 培風館, 1991.

1. 準備

電磁気学の学びは2章から入る。ここではそれを学ぶために必要な準備を行う。

1. 1 法則と定理

電磁気学は電気と磁気に関するいくつかの物理法則の上に理論が組み立てられている。では、この法則とはどういう位置づけになるのだろうか。同じような言葉で、定理や原理もあるが、何が違うのだろうか。ここでは、電磁気学の根底を与える定理と法則、および、それに関連する公理や原理のそれぞれの定義をまとめる（出典は主に Wikipedia）。

公理 (axiom)

命題（真偽の判断の対象となる文章または式）を導きだすための前提として導入される最も基本的な仮定。他の結果を導きだすための議論の前提となるべき論理的に定式化された（形式的な）言明。真実であることが明らかな自明の理が採用されるとは限らない。

例：平面上で直線外の1点を通して、この直線と交わらない直線がただ1本存在する（ユークリッド幾何学）

定理 (theorem)

公理を前提として演繹手続きによって導きだされる命題。その正しさは、公理に基づき数学的に証明される。

電磁気学で使われる定理の例：ガウスの発散定理、ストークスの定理

法則 (law)

ある物事と他の物事との間に一定の関係があるときに、その関係を表す言葉あるいは式。その関係が必然性や普遍性を持つと認められたとき、法則と呼ばれる。観測や実験から帰納されたもので、数学的に証明されるものではない。自然科学に対する法則に対しては、自然界はそのような仕組みになっていると素直に受け入れるしかない。法則に当てはまらない物事が見つかり、新たな法則に置き換えられたり、廃棄されたりする。

電磁気学に現われる法則の例：クーロンの法則、オームの法則、電荷保存の法則（電荷保存則）、ガウスの法則、アンペアの法則、電磁誘導の法則

原理 (principle)

自然科学、特に物理学で用いられる基本的な命題。法則とほとんど同義だが、それよりも少し定性的概念的なもの。法則と同様、観測や実験から帰納されたもので、数学的に証明されるものではない。

例：重ね合わせの原理（重ね合わせの理）

1. 2 ベクトル解析

電磁気学に出てくる法則等は数式によって表現される。特に大事なものはベクトル解析で、その知識が求められる。ベクトル解析そのものは、他の教科書で学んで欲しいが、そのエッセンス（必要最小限の知識；主に本シリーズに現われるのも）を以下に整理する。

スカラー関数とベクトル関数

- ・スカラー関数： $\phi(x, y, z)$
- ・ベクトル関数：

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad (\text{直角座標})$$

$$\mathbf{A} = A_r \hat{\mathbf{r}} + A_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{円筒座標})$$

$$\mathbf{A} = A_r \hat{\mathbf{r}} + A_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (\text{球座標})$$

内積と外積

- ・内積

角度差 θ の二つのベクトル \mathbf{A} と \mathbf{B} に対して、以下で定義されるスカラー量。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

- ・外積

角度差 θ の二つのベクトル \mathbf{A} と \mathbf{B} に対して、以下で定義されるベクトル量。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta$$

微分演算子

$$\nabla \equiv \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

勾配 (gradient, グラディエント)

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (\text{直角座標}) \quad (1.1a)$$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \quad (\text{円筒座標}) \quad (1.1b)$$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (\text{球座標}) \quad (1.1c)$$

発散 (divergence, ダイバージェンス)

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{直角座標}) \quad (1.2a)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{円筒座標}) \quad (1.2b)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \quad (\text{球座標}) \quad (1.2c)$$

回転 (rotation, ローテーション)

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \quad (\text{直角座標}) \quad (1.3a)$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right)\hat{\mathbf{z}} \quad (\text{円筒座標}) \quad (1.3b)$$

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{A} = & \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ & + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (\text{球座標}) \quad (1.3c) \end{aligned}$$

よく使う公式

$$\nabla\cdot\nabla\phi = \nabla^2\phi \quad \left(\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \quad (\text{ラプラシアン})$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A} = 0$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

積分定理(1) ガウスの発散定理

閉曲面 S で囲まれた内部空間 V がある。ガウスの発散定理は、対象空間内で定義されるベクトル関数 \mathbf{A} の内部空間 V での性質とその表面 S での性質を等式で結びつけたものであり、以下の式で表される。

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\mathbf{n}: \text{面 } S \text{ 上の単位法線ベクトル}) \quad (1.4)$$

このような、積分変換で表される定理は積分定理と呼ばれる。定理であるから、その正しさは数学的に証明されている。その証明についてはここでは割愛し（ベクトル解析の教科書を見てほしい）、式が意味するところだけを簡潔に述べる。

同式の左辺は、内部空間 V にあるベクトル関数 \mathbf{A} の発散（＝湧き出し）を全部集めたもの（＝湧きだしの総量）である。一方、右辺は、表面 S から、その面に垂直に向かうベクトル関数 \mathbf{A} の成分を面全体で積分したものであり、表面から出てゆく量の全体に当たる。

ガウスの発散定理を一言で言えば、「内部で湧き出す量（左辺）は、表面からあふれ出る量（右辺）に等しい」であり、至極当然と言う気持ちで受け入れることができると思う。

(2) ストークスの定理

ループをなす経路 c で囲まれた曲面 S を考える。ストークスの定理は、曲面 S 上でのベクトル関数 \mathbf{A} に関する積分定理で以下の式で表される。

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.5)$$

先ず、式の意味を考える。

同式の左辺は、曲面 S 上におけるベクトル関数 \mathbf{A} の回転（＝渦巻き力；ベクトルの向きは回転軸の方向）の面に垂直な方向の成分を全部集めたもの（＝回転力の総量）である。一方、右辺は、面の縁をなす経路（ループ） c 上でのベクトル関数 \mathbf{A} の経路方向成分を経路全体で積分したものであり、ループに働く渦の力。式の左右に表される量が等しい、という定理である。

ストークスの定理を一言で言えば、「面上の微小部分に発生する回転（左辺）が、その外側に渦を作り（右辺）、任意のループに対する積分値はループの形によらない」であり、ガウスの発散定理の直感的理解のしやすさに比べると、少し分かりにくいように思う。

道具として利用すると言う目的であれば、ここまでの理解でよい。以下は少し拘りを持った説明なので、興味がある人のみに。

電磁気学（あるいはベクトル解析）授業などで、この定理の意味について以下のような説明が見受けられる。図 1. 1 (a) で、左側に示す 4 つの矩形ループがあつて図のように回転力

がある。この場合に、内部の接合部分は力が打ち消されて消え、残るのは、右側図のように縁の成分のみになる。同図(b)のような一般的な形でも同様なことになり、結局、内部の回転力は縁にのみに現れる、という説明である。この説明を聞いてなんとなくわかった気分になるが、誤解を招く説明であり、筆者は良い説明とは思わない。例えば、 $\nabla \times \mathbf{A}$ が、ループの中心部分にはあるが、ループの縁付近には無い場合（すなわち外周付近では $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ ）、図同(b)の説明は成立しないからである。同図の説明が有効となるのは、面内に $\nabla \times \mathbf{A}$ がほぼ均一に存在するような場合（まさに図に描いたような例）のみで、それは一般的ではない。

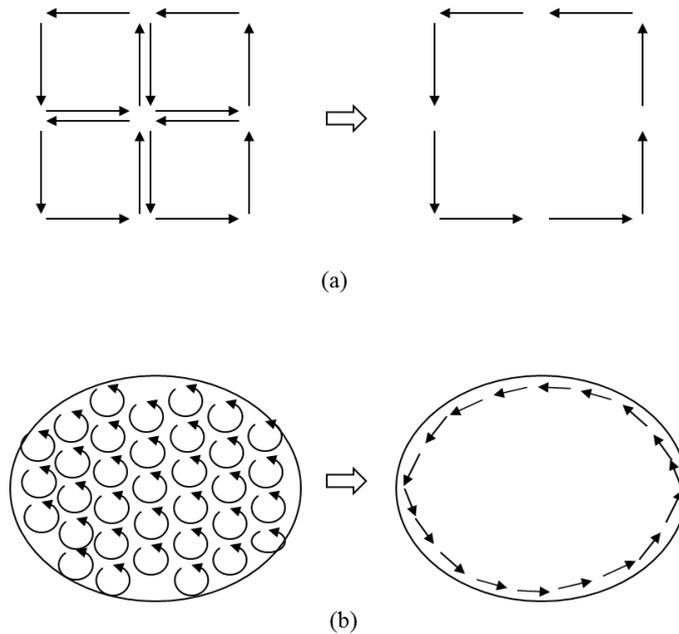


図 1. 1 ストークスの定理の直感的説明イメージ図（誤解を与えて良くないという例）

ストークスの定理を直角座標成分で書き下すと以下のようなになる。

$$\int_S \left\{ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right\} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_c (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$$

曲面上での問題を平面上での問題に置き換えるため、 $\mathbf{n}=\mathbf{k}(=\hat{z}), A_z=0$ とする。この時、上式は以下のように簡単になる。

$$\int_S \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy = \oint_c (A_x dx + A_y dy) \tag{1.6}$$

この関係式はストークスの定理を平面に適用した式で、**グリーン**の定理と呼ばれている。平面に適用したストークスの定理（すなわちグリーン

の定理）で、その意味を考えてみたい。図 1. 2 において、中心部に円形微小領域 ΔS がある。この微小領域内に、ベクトル場 $\nabla \times \mathbf{A}_0$

が均一に存在するとする。図では、 \mathbf{A}_0 のイメージで渦の絵で書いているが、ベクトル $\nabla \times \mathbf{A}_0$ の向きは紙面に対して垂直（手前方向： \hat{z} ）である。この ΔS にあるベクトル場は、 ΔS 外（半径 r の地点）に以下のベクトル場 \mathbf{A} を作る。

$$2\pi r A_\phi = (\nabla \times \mathbf{A}_0 \cdot \hat{z}) \Delta S \rightarrow \mathbf{A}(r) = \frac{1}{2\pi r} (\nabla \times \mathbf{A}_0 \cdot \hat{z}) \Delta S \hat{\phi}$$

このようにして、周方向に成分を持つベクトル場 \mathbf{A} が作られるが、このベクトル場の回転は $\mathbf{0}$ である。これは非常に勘違いされやすいところと思うが、なぜなら、円筒座標表現で

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) = 0 \quad (\Delta S \text{ 外の領域})$$

であるからである。

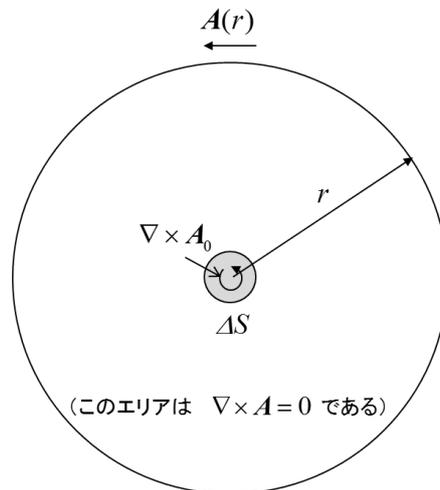


図 1. 2 円の中心に回転成分がある場合（平面に適用したストークスの定理）

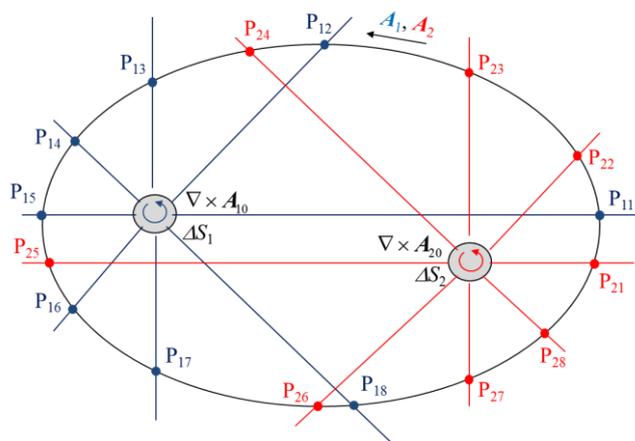


図 1. 3 2箇所に回転成分が有る場合（平面に適用したストークスの定理）

図1. 3は、二つの円形微小エリア ΔS_1 と ΔS_2 に均一な回転成分がある場合であり、ここでも平面で考えている。 ΔS_1 と ΔS_2 にある回転成分によって、周囲にベクトル \mathbf{A}_1 、 \mathbf{A}_2 の渦ができて、それぞれの中心から等角度で8分割した図のケースでは、以下の性質がある。

$$\int_{P_{11}}^{P_{12}} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_{12}}^{P_{13}} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l} = \dots = \int_{P_{17}}^{P_{18}} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{8} \nabla \times \mathbf{A}_{10} \cdot \hat{\mathbf{z}} \Delta S_1$$

$$\int_{P_{21}}^{P_{22}} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_{22}}^{P_{23}} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l} = \dots = \int_{P_{27}}^{P_{28}} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{8} \nabla \times \mathbf{A}_{20} \cdot \hat{\mathbf{z}} \Delta S_2$$

回転成分を持つ微小エリアが N 個ある場合には、重ね合わせの原理により

$$\sum_{i=1}^N \nabla \times \mathbf{A}_{i0} \cdot \hat{\mathbf{z}} \Delta S_i = \oint_c \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \cdot d\mathbf{l} \rightarrow \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{z}} dx dy = \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

である。ストークスの定理は、平面上で考えた方が分かりやすいので、そのような説明を行った。ストークスの定理は、平面上の定理（グリーン定理）を曲面上の定理に拡張したものであり、ここまでが理解できれば、その先の理解も容易と思う。

なお、ガウスの発散定理もストークスの定理も、内部の現象が瞬時に周辺に伝わる小さいスケールに適用できるものである。例えばストークスの定理で面の大きさを半径1光年の円にすれば、内部の現象が円周部に伝わるまでには1年を要し、(1.5)式がそのまま適用できないことは明らかであろう。

1. 3 登場する物理量と単位

本テキストでは電磁気学の理解を山登りに見立てているが、その展開は大河ドラマに近い。場面が進む毎にいろいろな登場人物が現われ、それらがお互いに関わりあってドラマが展開し、最後は大団円を迎える。ここでは、電磁気学の登場人物（物理量）を簡単に紹介する。また、物理量には単位がある。電磁気学に関連する物理量は MKSA 単位系による4つの基本単位（m, kg, s, A）で組み立てられるが、その物理量に特化した基本単位（例えば、電圧のボルト、電荷のクーロンなど）も定められている。物理量の理解のためには、単位を知ることが重要であり、基本単位と組立単位（MKSA 単位）の関係を整理して示す。なお、物理量の詳細な性質や他の物理量との関係は、2章以降で詳しく述べる。

1. 3. 1 電磁気関係の物理量

電荷 (q, Q)（カッコ内の記号は代表的に使われる文字）

電気力を引き起こす源。万有引力の源になる質量に対応。電荷は質量と違って正負の2種類（すなわち極性）がある。電荷の根源は全ての物質を構成している原子に求めることができる。電荷の最小単位（電気素量）は電子一つ分で、その絶対値 e は、単位をクーロン[C]として $e=1.60218 \times 10^{-19}$ [C]である。通常原子は、陽子と電子の数が等しく、電気的には中

和している（電氣的性質を示さない）。何らかの理由によって原子から飛び出した電子が負の電荷を持つ粒子となる。また、負の電子が飛び出した後の原子は正の電荷を持つ粒子として振舞う。量子力学によれば、電子は位置が定まった固体としてではなく、確率的に分布している波の性質をもつもの（シュレーディンガーの波動方程式により）として表されるが、電磁気学では、それを巨視的に見て、定まった位置に電荷があるとみなして扱う。電荷は電磁気学の出発点を与える。

電荷密度 (ρ)

単位体積当たりの電荷の量を電荷密度と呼び、単位は[C/m³]である。なお、平面状に分布する電荷密度を扱う場合には単位は[C/m²]、線上に分布する電荷密度を扱う場合には[C/m]である。

電界 (E)

荷電粒子（電荷）に対して力を生み出す場を電界と呼ぶ。電氣的歪を持つ場。場に時間的変化が無いときの電界は電荷が発生源になる。大きさと向きを持つベクトル場である。単位は[V/m]。

電束 (Φ)

電荷 Q から、 Q 本の電気力線が放射状に生み出されているとみなし、この一つ一つを電束と呼ぶ。 Q そのものは通常 1 より小さい値であり、整数値で数えられる本数と言うよりは、均一の分布で無限の数の電気力線が出ていて、その全体が Q であるとみなす。故に、 $\Phi=Q$ であり、単位は[C]である。

電束密度 (D)

単位面積当たりの電束の量。大きさと向きを持つベクトル量。単位は[C/m²]。

電位 (スカラーポテンシャル) (ϕ, V)

空間に存在する電氣的ポテンシャル。スカラー量。電位はスカラーポテンシャルとも呼ばれる。また、電気回路では電圧と呼ばれる。空間の 2 点 P_1 、 P_2 の電位が ϕ_1 、 ϕ_2 であるとき、電位差 $\phi_2 - \phi_1$ は、点電荷を P_1 から P_2 まで運ぶときに外力がなす単位電荷当たりの仕事である。単位は[J/C]であるが、[V (ボルト)]で表す。電界の空間領域での線積分量である。

電流 (I)

1 秒間に当該面積を通過する電荷の量。単位は[C/s]であるが、[A (アンペア)]で表す。

電流密度 (\mathbf{i})

単位面積当たりの電流。大きさと向きを持つベクトル量。単位は[A/m²]。

誘電率 (ϵ_0, ϵ)

誘電率 ϵ は電界と電束密度のそれぞれの大きさの比 D/E 。真空の誘電率 ϵ_0 の値は、次のように定められる。1 [C]の電荷量を持つ二つの点電荷を真空中に1 [m]離して置いたときのクーロン力は測定値より換算して 8.9876×10^9 [N]になる。 $F = K_e Q_1 Q_2 / r^2$ とする比例定数 K_e を $K_e = 1 / (4\pi\epsilon_0)$ [Nm²/C²]と置くと、 $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ [C²N⁻¹m⁻²]となる。単位は[F (ファラッド)/m]でも表される。誘電体では分極によって誘電率は $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ に変化する。 ϵ_r は比誘電率 ($|\epsilon_r| \geq 1$) と呼ばれ、媒質に依存した値を持つ。

磁荷 (q_m)

時間的に変化の無い場において、電界が電荷によって発生したと同じ考えの下での磁界の発生源と考えられた物理量。しかし、磁界を作り出す磁束(磁力線)は電流から生み出されることが明らかになり、単独磁荷の存在は否定されている。磁気による力の説明に仮想的な磁荷を用いることはある。また、微小電流ループの等価回路として磁気双極子(極性が反対の二つの磁荷のペア)も用いられる。単位は[Wb (ウェーバ)]。

磁束 (Φ_m)

磁力線と等価。ガラスの板の上に鉄粉を撒き、下から磁石を当てると磁力線の形に相当する模様ができる。磁束は始めも終わりも無く、ループになっている。単位は磁化と同じ[Wb]。

磁束密度 (\mathbf{B})

単位面積当たりを通過する磁束の量。大きさと向きを持つベクトル量。単位は[Wb/m²]であるが、[T (テスラ)]で表される。

磁界 (\mathbf{H})

磁気の力に関するクーロンの法則から定義された磁氣的歪の場を表すベクトル量。単位は[A/m]。磁束密度と同様に磁場の強さを表す量であるが、単位の違いから分かるように、二つは異なる物理量。

ベクトルポテンシャル (\mathbf{A})

空間に存在する磁氣的ポテンシャルを表すベクトル量。磁束密度 \mathbf{B} に対して $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ で定義され、単位は[Tm]である。ベクトルポテンシャルの渦が磁束密度を生み出すと解釈される。

透磁率 (μ_0, μ)

透磁率 μ は磁界と磁束密度のそれぞれの大きさの比 B/H 。真空の誘電率 μ_0 の値は、 $\mu_0=4\pi\times 10^{-7}$ [H (ヘンリー) /m]である。磁性体では磁化によって透磁率は $\mu=\mu_r\mu_0$ に変化する。 μ_r は比透磁率 ($|\mu_r|\geq 1$) と呼ばれ、媒質に依存した値を持つ。電磁気学により、真空中の光の速度 c は $c=1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ となることが明らかにされた。

1. 3. 2 MKSA 単位系と物理単位

物理学では、物理量の単位を理解することが物の本質を捉える意味において重要である。また、単位に目が行き届くようになれば、単位が違う物理量を等号で結んだり、足し合わせたりというような初歩的な誤りを避けることができる。

現在の国際単位系 (SI 単位と呼ばれる) では7つの基本単位を定めていて、個々の物理量の単位はこの基本単位の組み合わせ (組立単位) で表される。7つの基本単位は、長さ[m]、質量[kg]、時間[s]、電流[A]、熱力学温度[K]、物質[mol]、光度[cd]である。このうち、長さ・質量・時間の3つで構成される単位系は MKS 単位系、電流を加えた単位系は MKSA 単位系と呼ばれる。電磁気学に現われる物理量は MKSA 単位系で表すことができる。

表 1. 1 は、電磁気学に現われる物理量とその単位をまとめている。以降、MKSA 単位系での組立単位の表記 $[m^{p_1}kg^{p_2}s^{p_3}A^{p_4}]$ を、簡略化して $[p_1,p_2,p_3,p_4]$ とする。例えば、電圧は、 $[2,1,-3,-1]$ であり、組立単位が $[m^2kg/(s^3A)]$ であることを示している。電圧に与えられた固有の単位はボルト [V] であって、それを使えば便利であるが、物理量同士の関連が見えなくなってしまっている。マックスウェル山登山の道中には、いろいろの物理量が出てくるが、この表に示している組立単位に立ち返って考えれば、次元の闇に迷い込むことは無い。例えば、クーロンの法則 (法則自体は後に学ぶ) では、電荷 q_1 が距離 r にある電荷 q_2 に及ぼす力 F とその組立単位は、以下のように表される (物理量の割り算は組立単位の計算では引き算になる)。

$$F = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r^2} \rightarrow [1,1,-2,0] = [0,0,1,1] + [0,0,1,1] - [-3,-1,4,2] - [1,0,0,0] - [1,0,0,0]$$

表 1. 1 電磁気関連物理量の MKSA 単位系での次元 (組立単位)

(4つの基本単位の並び順にはいくつかの流儀があるが、本資料では MKSA [m, kg, s, A]の順で並べている。)

名称(物理量)	代表的表記	単位名称	物理単位	組立単位			
				M (m)	K (kg)	S (s)	A(A)
力	F	N(ニュートン)	J/m, kgm/s ²	1	1	-2	
エネルギー(仕事)	U	J(ジュール)	Nm	2	1	-2	
電力	P	W(ワット)	J/s, VA	2	1	-3	
電圧	V, ϕ	V(ボルト)	J/C, W/A	2	1	-3	-1
電流	I	A(アンペア)	C/s, W/V				1
電流密度	i		A/m ²	-2			1
抵抗(インピーダンス)	R	Ω (オーム)	V/A	2	1	-3	-2
導電率			1/ Ω m	-3	-1	3	2
静電容量	C	F(ファラド)	C/V	-2	-1	4	2
インダクタンス	L	H(ヘンリー)	J/A ²	2	1	-2	-2
誘電率	ϵ		C ² /Nm ² , F/m	-3	-1	4	2
透磁率	μ		H/m	1	1	-2	-2
電荷・電束	Q, q	C(クーロン)	As			1	1
磁荷・磁束	Q_m, q_m	Wb(ウェーバ)	Nm/A, Tm ² , Vs	2	1	-2	-1
電束密度	D		C/m ²	-2		1	1
磁束密度	B	T(テスラ)	N/Am, Wb/m ²		1	-2	-1
電界	E		V/m	1	1	-3	-1
磁界	H		A/m	-1			1
ベクトルポテンシャル	A		Tm	1	1	-2	-1
周波数	f	Hz(ヘルツ)	1/s				-1

1. 4 場の概念 (遠隔作用と近接作用)

現代の物理学は、場の理論によっている。近接作用の考え方である。近接作用と対比するものが遠隔作用である。例えば二つの質量があるとする。地球と私の関係でも良い。私は地球に引っ張られている。私も地球を引っ張っている。万有引力である。このように、相手が直接にこちらに作用していると考えるのが、遠隔作用の考え方である。一方、私に力が働いているのは、私の周りに力の原因となる場ができていくという考え方。これが近接作用の考え方である。地球と言う質量の塊が、周囲に重力場を作る。重力場の中にいる私に対して、その場の重力と私の質量に応じた力が働く。重力場を作っている質量が変化すれば、間にある媒質を通じて、その変化が有限速度(重力の場合は光速)で相手方に伝わり、それが私のところに来た時点で私が受ける力も変化する。図 1. 4はこのイメージを示している。電磁気学も同じで、電界や磁界と言う場が近接作用で電荷や電流に作用しているという考え方が採られている。近接作用の考え方は、電磁気学の成立過程において、電気力線や磁力線のモデルを与えたファラデーによって生み出されたものである。

以下雑談。地球と月がテレビ電話で結ばれている。会話には 2.6 秒の時間差(光の速度での往復時間)が生じる。念力の達人が画面に映っている人に向けて、エイッと念波を送った。たちどころに転倒したら、これはオカルト。でも 3 秒後に倒れたら、近接作用の結果として本物かもしれない。

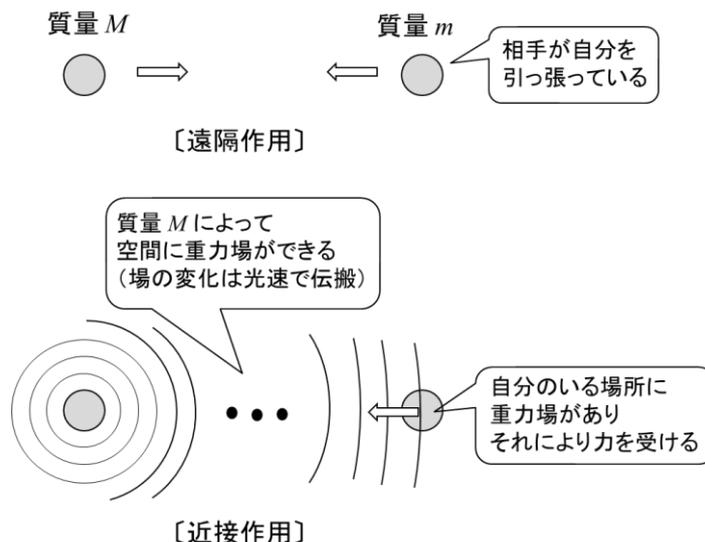


図 1. 4 重力を例とした遠隔作用と近接作用の考え方

1. 5 マックスウェルの方程式

これから学ぶマックスウェルの方程式は以下の 4 つであり、4 つの法則に基づいている。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{電磁誘導の法則}) \quad (1.7a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{アンペア・マックスウェルの法則}) \quad (1.7b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{電束密度に関するガウスの法則}) \quad (1.7c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{磁束密度に関するガウスの法則}) \quad (1.7d)$$

マックスウェルが電磁気学を打ち立てたのは 19 世紀の後半 (1873 年、電気磁気論として集大成) である。20 世紀に入りアインシュタインがニュートン力学を書き換える相対性理論を発表している。相対性理論では、慣性系において光速一定の下、二つの定速移動する座標系がローレンツ変換で結ばれることを示した。ガリレイ変換に基礎を置くニュートン力学は、その時点で近似の理論となった。電磁気学が完成したころ、ニュートン力学が完全な理論とみられていて、力学の性質に微妙な違いがあった電磁気学は近似の理論とみなされていた。しかし相対性理論が出て、ニュートン力学が近似の理論となったとき、立場が逆転して、電磁気学は厳密な理論の地位を得た。電磁気学 (マックスウェルの方程式) には、相対性理論が規範とするローレンツ変換の性質が既に具備されていたのである。故に、相対性理論が生まれて物理学に一大革命が起きたときでも、電磁気学は無傷でそれを乗り切ることができたのである。さらに言えば、電磁気学は、相対性理論の誕生に大いに貢献しているのである (この辺りの話題は同名シリーズレポートの(3), (4), (8)に)。さあ、その電磁気学を学ぼう。

電磁気学の勉強を山登りに見立てる。山の名前はマックスウェル山、山頂には上記マックスウェルの方程式（4つの連立方程式）が置かれている。登山口は「電荷」である。ここから入って、電気や磁気の性質を持つ様々な物理量に出会い、それらの相互の関連を与える法則を学ぶ。道に迷わないためにはコースを記した登山地図が必要である。

図1. 5はこの登山地図である。コースは①から番号順になっている。①～⑥は裾野あたりにあり、電氣的性質を学ぶ。次に中腹に入り、⑦～⑮で磁氣的性質を学ぶ。山頂付近には難所が多いが、⑯、⑰で電気と磁気の相互作用を学ぶ。山頂には、途中の⑤、⑪、⑯、⑰で出あった4つの方程式が置かれている。この方程式の意味を読み取ることによって、電磁気学の理論体系を理解する。山頂では、マックスウェルの方程式から導かれる電波の性質⑱を壮大な景色として眺めてみる。

登山地図から分かるように、この登山では、山頂目指して本筋一直線になっていて、少し寄り道をする楽しめるところを素通りしている。これについては、冒頭に挙げた電磁気学教科書や本シリーズレポートの(1)～(10)を見て欲しい。

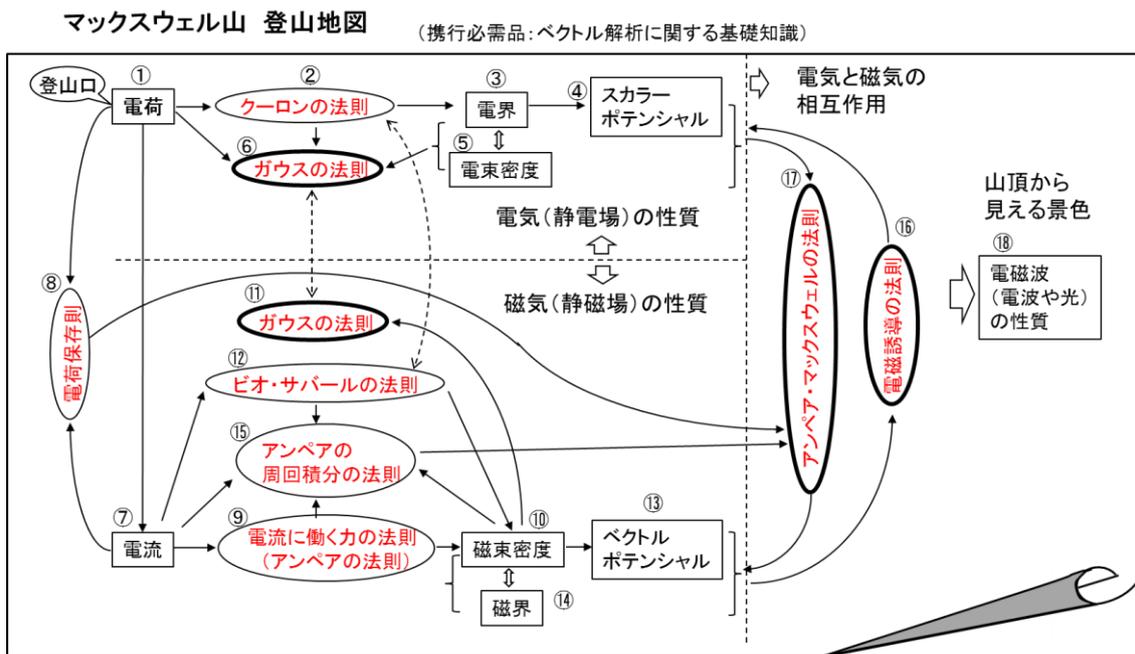


図1. 5 マックスウェル山登山地図

(マックスウェル山 (電磁気学) の頂にあるもの: 太字で囲った4つの法則 (⑥、⑪、⑯、⑰) を表す連立方程式 (マックスウェルの方程式))

2. $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$: 電束密度の関するガウスの法則 (登山地図 : ①~⑤を経て⑥に至る)

2. 1 電磁気学の出発点 : 電荷 ①

電磁気学は、電荷が荷電粒子として存在すると言うところからスタートする。点電荷の概念である。荷電粒子はすなわち電子 (や電子が飛び出した後の原子) のことであり、量子力学が教えるとおりに、電子の位置は、波のように、あるいは雲のように漠然としていて、存在位置は確率的に捕らえられる (シュレーディンガーの波動方程式)。しかし、これを少し離れたところから見れば、そこに荷電粒子があるように見える。電磁気学では、その荷電粒子から生み出される電磁現象が扱われる。

電子のもつ負の電荷の絶対値 e は電荷の最小単位で**電気素量**と呼ばれる。その値は電荷の単位クーロン[C]を用いて、以下である。

$$e = 1.60218 \times 10^{-19} \text{ [C]}$$

金属などの物質は原子や分子の結合状態によって、その中の電子が自由に動き回ることができ、これが荷電粒子である。電子が飛び出した後の原子や分子は正の電荷を持つ荷電粒子として振舞う。この電荷には、「発生や消滅は、必ず正・負等量の電荷で起こり、正あるいは負の電荷が単独で発生したり消滅したりすることは無い」、すなわち、「閉じられた系における総電荷量は常に一定である」という**電荷保存則**が成り立つ。

2. 2 クーロンの法則 ②

フランスのクーロン (Charles-Augustin de Coulomb, 1736-1806) は 1785 年、自らが工夫して作ったねじり天秤を用いて、距離 r 離れた二つの電荷 (Q_1 と Q_2) に働く力 F を測定し、以下の関係を見出した。

$$F = k_e \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (2.1)$$

この関係は、発見者のクーロンに因んで**クーロンの法則**と呼ばれる。 k_e は比例定数であるが、最終的に得られる式 (要はマックスウェルの方程式) がすっきりした形なるよう便宜的に $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$ と置く。このようにして定義された ϵ_0 を真空の**誘電率**と呼ぶ。クーロンによる力の測定、さらにはその後の精密な測定により ϵ_0 は次の値を持つ。

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ [C}^2/\text{Nm}^2] \quad (\text{あるいは [F/m]})$$

力には向きが有り、同種の電荷 (正と正、あるいは負と負) では反発力が、異種の電荷 (正と負) では引力になる。力をベクトルで表し \mathbf{F} 、 Q_1 から Q_2 に向かう距離をベクトル \mathbf{r} とすると、クーロンの法則は以下である。

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2 \mathbf{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q_1 Q_2 \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{r} / r; r = |\mathbf{r}|) \quad (2.2)$$

1. 1節の法則の項で説明したように、法則はその正しさが数学的証明で得られるものではなく、あくまで、経験を積んでそれに例外があるかどうかで判断される。真実が距離の2.001乗あるいは1.999乗などの2に近い値であるかどうかは分からないが、2乗と置いて、その後に例外が無く、故にそれが法則として定着しているのである（自然は美しい形を好むと信じて）。

図2. 1に示すように点電荷が複数ある場合 (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) には、点電荷 Q に対する力 \mathbf{F} はベクトルでの重ね合わせの原理が成り立ち、以下になる。

$$\mathbf{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3} \quad (2.3)$$

電荷が連続的に線上に並んでいる場合には線積分で、面上に並んでいる場合には面積分で、また、3次元に分布している場合には体積積分により求められる。

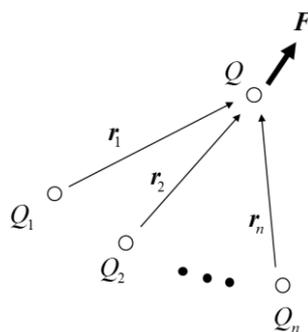


図2. 1

2. 3 電界 ③

(2.2)式のクーロンの法則を、電荷 Q_2 が受ける力として近接作用の目で見よう。ここで、場を作る Q_1 を Q に、力を受ける Q_2 を q に置き換える。 Q と q を結びつけるベクトル量を \mathbf{E} とすると、(2.2)式は、以下のように書き表される。

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.4b)$$

このベクトル場 \mathbf{E} を電界と呼ぶ。電界の大きさ E は次式のように距離の2乗に反比例する。

$$E = |\mathbf{E}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.4c)$$

電荷 Q が Q の外側に電氣的歪の場、すなわち、電界をつくり、 q の位置では $Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ の大きさになる。この場所に存在している電界が電荷 q に力を及ぼしていると解釈される。

複数の点電荷がある場合には、図 2. 4 の力 \mathbf{F} と同じように電界も重ね合わせの原理が働き、次式となる。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3} \quad (2.5)$$

電荷が線上や面上に連続的に分布する場合は、電界は積分で求められるが、ここでは二つの例を示す。ここで示す例は、後に学ぶガウスの法則を利用することによってたちどころに求めることができるが、解法の比較の意味も含めている。

【例題 2. 1】 線電荷密度 λ の一様な無限直線上電荷が作る電界を求めよ。

図 2. 2 のように座標系をとり、 z 軸からの距離 r の点 P の電界を求める。対称性より、電界の z 軸方向成分は 0 である。 z 軸上の線要素 dz にある電荷が P 点に作る電界 dE は

$$dE = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)}$$

dE の r 方向成分 dE_r は図より

$$dE_r = dE \sin \theta = \frac{\lambda r dz}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}}$$

となる。これより、求める電界は上記の積分により以下になる。

$$E = \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \blacksquare$$

【例題 2. 2】 半径 a の球の表面に、電荷 Q が一様の密度で分布しているとき、球の外部及び内部の電界を求めよ。

図 2. 3 に示すように、幅が $a d\theta$ 、半径が $a \sin \theta$ の円形リングを考える。この部分の電荷が z 軸上で中心から r の距離の点 P に作る z 方向の電界 dE は次式となる。

$$dE = \frac{Q \sin \theta (r - a \cos \theta)}{8\pi\epsilon_0 (a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)^{3/2}} d\theta$$

P 点の電界 E は、上式を $\theta=0 \sim \pi$ で積分することによって求まるが、以下のように、変数を θ から u に変換すると積分が容易になる。

$$u = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta$$

$$du = 2ar \sin \theta d\theta, \quad (a-r)^2 \leq u \leq (a+r)^2$$

これより、

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q}{32\pi\epsilon_0 a} \int_{(a-r)^2}^{(a+r)^2} \frac{u + r^2 - a^2}{u^{3/2}} du \\ &= \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 ar^2} \left(2a - |a-r| - \frac{a^2 - r^2}{|a-r|} \right) \end{aligned}$$

球の外部では、 $a-r < 0$ であるので、

$$E = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 ar^2} (2a + (a-r) + (a+r)) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

球の内部では $a-r > 0$ なので

$$E = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 ar^2} (2a - (a-r) - (a+r)) = 0 \quad \blacksquare$$

球の外部から見れば、電界は球の中心に点電荷 Q があるのと同じである。内部では至るところ 0 であるのも興味深い。この性質が、後に学ぶガウスの法則の下敷きになっている。

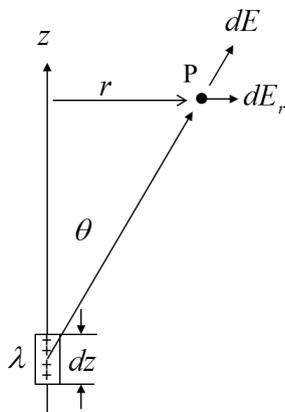


図 2. 2

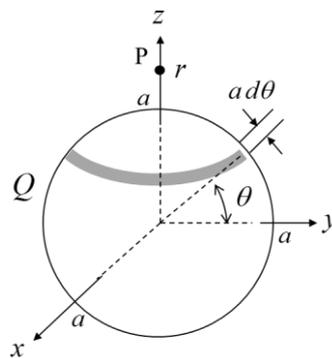


図 2. 3

なお、電磁気学が難しいと言われる理由の一つに、この例のように、解法の途中に出てくる積分がなかなか解けない（あるいは面倒な）ことにある。しかしそれは電磁気学が難しいのではなく、微分・積分学の問題である。原因を切り離して考えると、電磁気学そのもの（最初の積分の式と最後の結果）は極めてすっきりとした学問に見えてくる。

最後に、点電荷が作る電界の発散を調べる。点電荷の場合の発散の計算には、(1.2c)式の球座標が良い。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\partial}{\partial r} (1)\end{aligned}$$

となるが、右辺の偏微分は定数 (1) の微分なので、この部分だけ見れば 0 である。故に式全体を 0 と置きたいが、そう置けない唯一の例外がある。すなわち $r=0$ である。この場合は $0/0$ の形で、何も言えない。数学的にはこの部分がデルタ関数（3次元空間を張るデルタ関数なので $\delta^{(3)}$ と表記）になり、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(r) \quad (2.6)$$

となる。電荷が置かれている原点以外は発散は 0 であるが、原点を含む任意の領域で体積積分すると Q/ϵ_0 になることを意味している。これも、後に学ぶガウスの法則の下敷きになっている。

2. 4 電位 ④

空間に電界という電氣的歪の場があるのと同じように、**電位**と言う別の物理量で満たされる場を考える。電位はスカラー量であり、**スカラーポテンシャル**とも呼ばれる。文字は V あるいは ϕ が使われる。単位はボルト[V]である。電位 ϕ は電界（ただし、時間的に変化しない静電界） \mathbf{E} と以下の関係で結ばれる。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (2.7)$$

すなわち、電界は電位の勾配（空間微分、傾き）になる。2点 P_1 と P_2 の電位をそれぞれ ϕ_1 , ϕ_2 とするとき、電位の差（電位差） ϕ_{21} は以下の線積分で表される。

$$\phi_{21} = \phi_2 - \phi_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.8)$$

電荷 q を P_1 から P_2 に運ぶとき、電界によって力を受けるので、エネルギー（仕事）が必要になり、その大きさ W_{21} [J]は

$$W_{21} = -q \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow \phi_{21} = \frac{W_{21}}{q} \quad (2.9)$$

右側の式より、電位差 ϕ_{21} はそのときの1クーロン当たりの仕事を表す量であることが分かる。この意味で、ポテンシャル（後で出てくるベクトルポテンシャルと区別して、スカラーポテンシャル）という言葉が使われている。

点電荷に対して距離 r にある点での電位は、無限遠方の電位を0とし、次式となる。

$$\phi = -\int_{\infty}^r E_r dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.10)$$

電位も重ね合わせの原理が成立しており、複数の点電荷が有る場合には、個々の電位の和（スカラー量の和）となる。

(2.8)式は線積分が積分経路によらないことを示しているが、そのことは以下の論理で確認できる。電界は複数の電荷に対する重ね合わせの原理が成立するので、点電荷が作る電界の回転を調べればよい。(1.3c)式に(2.4b)式の電界を入れると $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ であること、すなわち、時間的に変動の無い電界（静電界）では回転成分は無いことが容易に導かれる。ストークスの定理より、

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \rightarrow \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \rightarrow \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} (\equiv \phi_0) = 0 \rightarrow \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \text{constant}$$

(variable route) (fixed route) (variable route)

となり、最後の式より、電界の線積分は積分経路に依存しないこと、すなわち、 P_1 と P_2 の2点の電位のみで定まることが分かる。

2.5 電束密度 ⑤

電界と共に電氣的歪を表す場に重要な概念が**電束密度**である。**電束**とは電荷から発生しているもので正の電荷から始まり負の電荷で終わる。単位は電荷と同じクーロン[C]である。同じイメージを与えるものに**電気力線**がある。電荷 Q からは Q 本の電気力線が、他に電荷が無い場合には、放射状に、かつ角度的に均一に出ている。 Q 本といっても、通常の電荷は1[C]より小さいので、実際に目に見える本数とは意味が違って、仮想的なものである。電束と電気力線は、単位は違うが同じものと思ってよい。電束密度は単位面積当たりの電束の量であり、方向を持つので、ベクトル量である。これを \mathbf{D} と書き、単位は[C/m²]である。

点電荷 Q では電束の総量は Q であるので、半径 r の球面上での電束密度は

$$\mathbf{D} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (2.11)$$

である。真空中での電界（(2.4b)式）と比べると

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (\text{真空中}) \tag{2.12}$$

となり、向きを同じにする比例関係にある。

誘電体ではどういう関係になるかを調べる。本テキストでは、誘電体の物理的性質（電界に対する分極のメカニズムなど）や、コンデンサの静電容量についての説明は省略している。そのため、以下の説明で不足する部分は冒頭に挙げた教科書等で補って欲しい。

図2. 4に示すように、電極面積 S の平行平板コンデンサの内部に誘電率 ϵ の誘電体が挿入されている。上下の極板には $\pm Q$ の電荷が帯電している。面電荷密度 σ は $\sigma = Q/S$ である。誘電体が無い場合の極板間の電界は下向きに $E_0 = \sigma/\epsilon_0$ である。誘電体は電界によって分極が起き、図のように、上面に電荷密度 $-\sigma_p$ の、下面に σ_p の電荷（分極電荷）が誘起される。媒質内の電界 \mathbf{E} は分極電荷により、極板電荷の一部が相殺され以下となる。

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma - \sigma_p}{\sigma} \mathbf{E}_0 \tag{2.13}$$

誘電体の誘電率は、以下のように与えられる。

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \quad \epsilon_r = \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_p} \tag{2.14}$$

ここで、 ϵ_r は比誘電率と呼ばれ、媒質によって異なる1より大きい値を持つ。

一方、電束密度は、電極間の電荷（真電荷）がつくる電束の密度で定義され、誘電体の有無によらない。すなわち、

$$\mathbf{D} = \sigma = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 = \epsilon \mathbf{E} \tag{2.15}$$

電束密度は電界と同じ方向を向くベクトルであるので、誘電帯中での両者の関係は次式となる。

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \tag{2.16}$$

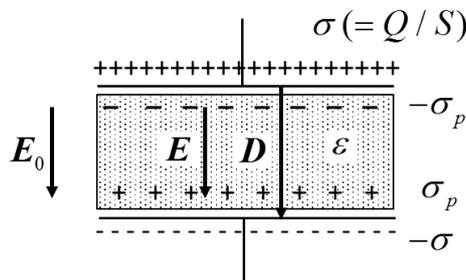


図2. 4

2. 6 電界及び電束密度に関するガウスの法則 ⑥

2. 4節において、電界に関する以下の性質を述べた。

1) 球の表面に電荷 Q が均一に分布する場合には、球の外では、原点に点電荷があるのと同じである。また、球の内部では、電界は至るところ 0 である。(例題 2. 2)

2) 点電荷が作る電界の発散は、原点のみにあり、それ以外のいたるところで 0 である。

((2.6)式)

これらから、電界に関して、以下の性質が予想される。

「任意の閉曲面 S を通って出て行く電界の総量 (面に垂直な成分の積分値) は、その閉曲面内に含まれる全電荷を ϵ_0 で割ったものに等しい」

同様なことが、電束密度についても言え、

「任意の閉曲面 S を通って出て行く電気力線の総数 (電束の総量) は、その閉曲面内に含まれる全電荷の総量に等しい」

これを式で表すと

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i \quad (\text{真空中}) \quad (2.17a)$$

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (\text{真空中}) \quad (2.17b)$$

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (\text{真空中、誘電体中共通}) \quad (2.18a)$$

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho dV \quad (\text{真空中、誘電体中共通}) \quad (2.18b)$$

(2.17a)式と(2.18a)は点電荷の集まりである場合、(2.17b)式と(2.18b)式は、電荷が電荷密度 ρ [C/m³]で連続的に分布する場合である。この関係は、(電界及び電束密度に関する) **ガウスの法則**と呼ばれる。1. 1節でも述べたように、法則はその正しさが数学的に証明されるものではなく、物理現象に対して例外なくその仕組みが働いているとみなされたものに与えられる。今日までガウスの法則に例外は無いので、そのまま受け入れて欲しい。

ガウスの法則は直感的に受け入れやすい。式(2.18)の例で説明したい。閉曲面で囲まれた内部に二つの電荷 Q_1 と Q_2 を置く。図 2. 5において(a)は共に極性が正、(b)は Q_1 が正、 Q_2 が負 ($Q_1 > |Q_2|$) とする。同図(a)では、面から出て行く電気力線の数は $Q_1 + Q_2$ であって、閉曲面 S の形状や電荷がどの位置にあるかは関係ない。(b)では、面上での出入りはあるものの、正味に出て行く電気力線の数は $Q_1 - |Q_2|$ 、すなわち、こちらも $Q_1 + Q_2$ である。ガウスの法則が正しそうなのは至極当然と言う気分になってくる。

ガウスの法則の利点は、対称構造の荷電物体に対して、電界がきわめて容易に計算ができることである。これを先の例題 2. 1 と 2. 2 で味わってみたい。

まず、例題 2. 1。半径 r 、 z 方向長さ l の円筒で直線状電荷の一部を覆い、この円筒の表

面での電界を考える。円筒の底面と上面は、 z 方向の対称性から、そこから z 方向に向く電界は残らない、故にこの二つの面からの電界は 0 である。一方、側面からも最終的に残る電界は r 方向のみであり、大きさは面上均一である。(2.17b)式を適用すると、

$$\text{左辺} = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 2\pi r l E_r$$

$$\text{右辺} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

これより、

$$2\pi r l E_r = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \rightarrow E_r = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \quad \blacksquare$$

例題2はもっと容易に解ける。球の外側に半径 r の球を置くと、その内部に Q があるの
であるから、

$$\text{左辺} = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi r^2 E_r$$

$$\text{右辺} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

ゆえに、球の外部では、

$$E_r = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \quad (r > a)$$

球の内部では、半径 r の球内に電荷はないのであるから

$$E_r = 0 \quad (r < a) \quad \blacksquare$$

このように、対称構造の荷電物体からの電界、電束密度、電位はガウスの法則を適用することによって、複雑な積分を解くことなく簡単に求めることができるため、種々の形状での応用問題が、教科書や問題集に載っている。各自で、試して欲しい。

最後に、電束密度の関するガウスの法則((2.18b)式)を変形する。同式の左辺をガウスの発散定理で書き直すと、

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV$$

となり、同式の右辺と同じ積分になるので、それぞれの被積分関数が等しいと置いて

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.19)$$

が得られる。

ここまで、長々説明してきたが、これによって、マックスウェルの方程式の一つ

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

を得ることができた。

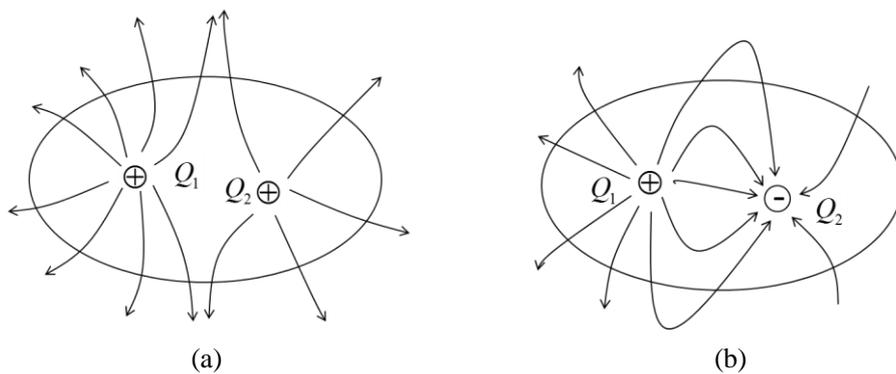


図 2. 5

(その 2) へ続く