

電磁気学の奥深さ (11) : マックスウェルの方程式ができるまで (その2)

唐沢 好男

内容目次

(その1)

1. 準備

2. $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$: 電束密度に関するガウスの法則

..... (本レポートはここから)

(その2)

3. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$: 磁束密度に関するガウスの法則

3. 1 電流と電流密度

3. 2 電荷保存則

3. 3 電流に働く力

3. 4 磁束密度

3. 5 磁束密度に関するガウスの法則

4. $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}$: アンペアの法則

4. 1 ビオ・サバールの法則

4. 2 ベクトルポテンシャル

4. 3 磁界

4. 4 アンペアの周回積分の法則

..... (ここまで)

(その3)

5. $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$: 電磁誘導の法則

6. $\mathbf{i}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$: 変位電流

7. マックスウェルの方程式

8. 電磁気学の奥深さ

(既存レポートを整理して紹介)

3. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$: 磁束密度に関するガウスの法則 (⑦~⑩を経て⑪に至る*)

(* 番号は登山地図の地点。本資料の最後に再掲)

3. 1 電流と電流密度 ⑦

電流と電流密度を学ぶ。電気回路の授業では、電流は電圧と共に回路網表現の主役であった。電磁気学では、電流は磁氣的性質を持つ場(磁束密度や磁界)を生み出す役割を担い、電気と磁気の主役を支える位置づけになる。

電流は、媒質中の電荷の動きを与える量で、1秒あたりに通過する電荷の量で定義される。単位は [C/s] であるが、アンペア [A] が用いられる。アンペアは電気代表として国際単位系の基本単位になっている。単位面積を流れる電流は**電流密度**と呼ばれる。電流密度は向きと大きさを持つベクトル量、単位は [A/m²] である。電流は I 、電流密度は \mathbf{i} の記号が用いられる。

物理的には電流は電子の移動であり、電子の電荷量は負であるので、電子が左に動くとき、電流は右に流れると定義される。電流の向きが実体である粒子(電子)の動く方向と反対になるのは感覚に合わないが、電磁気学構築の過程における歴史的都合として受け入れられている。

電気回路では、抵抗 R [Ω] を流れる電流 I は電圧 V [V] に比例し、 $I = V/R$ で与えられる。この関係は**オームの法則**と呼ばれる。抵抗 R は長さ l に比例し、断面積 S に反比例するので、以下の式で表される。

$$R = \eta \frac{l}{S} \quad (3.1)$$

比例係数 η は**抵抗率**と呼ばれ、単位は [Ωm] である。抵抗率の代わりに、その逆数で定義される**導電率** σ も用いられる。単位は [Ω⁻¹m⁻¹] である

$$\sigma = \frac{1}{\eta} \quad (3.2)$$

図 3. 1 に示すように、抵抗体中に流れる電流を、 Δl , ΔS , ΔV , ΔI の範囲に限って微視的に見る。この微小領域の中では

$$\Delta V = \eta \frac{\Delta l}{\Delta S} \Delta I$$

である。ここで、 $\Delta V/\Delta l \rightarrow E$ (電界), $\Delta I/\Delta S \rightarrow \mathbf{i}$ と置くと、上式は $E = \eta \mathbf{i}$ となる。これをベクトルで表すと

$$\mathbf{E} = \eta \mathbf{i} \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.3)$$

となる。(3.3)式は、損失がある媒質中の電磁波の解析に大事な式である。

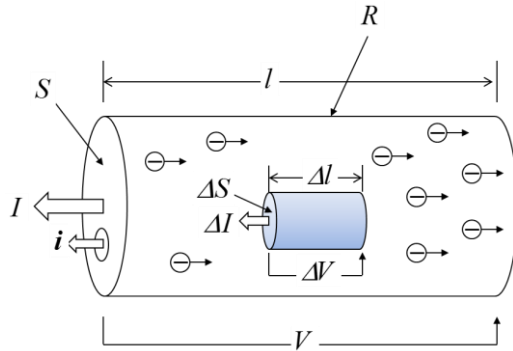


図 3. 1

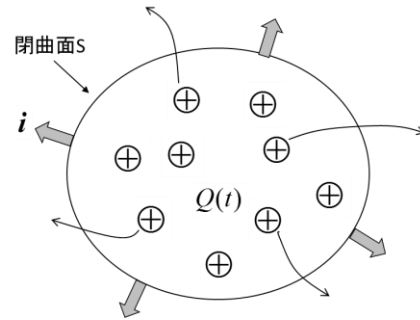


図 3. 2

3. 2 電荷保存則 ⑧

2. 1節でも述べたように、電荷には「発生や消滅は、必ず正・負等量の電荷で起こり、正あるいは負の電荷が単独で発生したり消滅したりすることは無い」、すなわち、閉じられた系における総電荷量は常に一定であるという**電荷保存則**が成り立つ。電流は電荷の動きで表される量であり、かつ電荷の動きも連続的であるため、電流も不連続に変化することはない。分岐や合流、あるいは反射などにおいて、一見不連続に見えるが、全体としてみれば、その大きさに不連続はない（例えば、 I_1 が I_2 と I_3 に分岐する場合は $I_1=I_2+I_3$ が保たれ）。故に、電荷保存則は**電流連続の法則**と読み替えることができる。

以下、個々の電荷がばらばらに動いている環境（**非定常電流界**）における電荷保存則を数式で表す。図 3. 2に示すように、閉曲面 S の内部に多数の電荷があり、それらが動き回って、内部から外部に出て行く状態を考える。ある時点 t での内部の電荷量を $Q(t)$ とし、微小時間 dt の間に dQ が外部に出たとする。このとき、面から流れ出た電流は以下の式で表される。

$$I = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{dQ}{dt}$$

ここで、

$$Q = \int_V \rho dV \quad (\rho: \text{電荷密度 [C/m}^3\text{)})$$

より、

$$\int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho dV \right) \rightarrow \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

ガウスの発散定理より、上式の左辺は

$$\text{左辺} = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{i} dV$$

であるので、電荷保存則は以下の微分形式にまとめられる。

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.4)$$

(3.4)式で表される性質（すなわち電荷保存則）は、6章で述べるように、アンペアの法則の不備を顕在化し、マックスウェルが変位電流を導き出す動機を与える重要な意味を持つ。

3. 3 電流に働く力 ⑨

古代ギリシャの時代より、鉄を引き寄せる石として磁石はすでに知られていた。中世には磁石の性質を利用した羅針盤も発明されている。これらの時代においては、磁石は磁気の本質として理解され、電気の性質と結び付けられることは無かった。

1820年、デンマークのエルステッド（H. C. Oersted, 1777-1851）は電流が永久磁石と等価な働きをすることを発見した。この発見を契機としてフランスのアンペア（A. M. Ampère, 1775-1836）は、二つの電流間に働く力を定量的に調べてその関係を明らかにした。

アンペアの実験によれば、図3.3に示すように、十分長い直線導線2本を距離 r 離して平行に置き、それぞれに電流 I_1, I_2 を流すと、長さ l の導線部分に以下の力 F が働くことを見出した。

$$F = 2k_m \frac{I_1 I_2 l}{r} \quad (3.5)$$

力 F には向きがあり、電流が同じ向きでは引き合い、反対向きでは反発する。比例係数 k_m は媒質によって異なるが、真空中では、

$$k_m = 10^{-7} \text{ [N/A}^2\text{]} \quad (\text{真空中})$$

となる。係数 k_m は測定によって決まった値ではなく、電流の定義に使われた値である。すなわち、「真空中で、距離1m離れた十分長い2本の平行導線に等しい大きさの電流を流したとき、導線の長さ1mあたりに働く力が $2 \times 10^{-7} \text{ N}$ となる電流を1Aにする」と。

さらに後の便宜のために（=最終的な式が美しい形になるように）、

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

で定義される μ_0 を導入する。 μ_0 は真空の透磁率と呼ばれ、

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ [H/m]} \quad (3.6)$$

となる。単位を構成するHはインダクタンスの単位ヘンリーであり、物理的意味は表1.

1（本テキストの最後に再掲）の組立単位で確認して欲しい。

(3.5)式で表される力 F を透磁率 μ_0 を用いて表すと次式に整理できる。

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r} \quad (3.7)$$

真空中のクーロンの法則に出てきた比例係数 k_e ((2.1)式) と k_m は、以下の関係式で結ばれる。

$$\frac{k_e}{k_m} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2 \quad (c: \text{光速}) \quad (3.8)$$

$1/\epsilon_0 \mu_0$ が c^2 となることは、マックスウェルの方程式を解いた結果として明らかになることではあるが、電気と磁気の係数が光の速度に関連するという性質は、非常に興味深い。

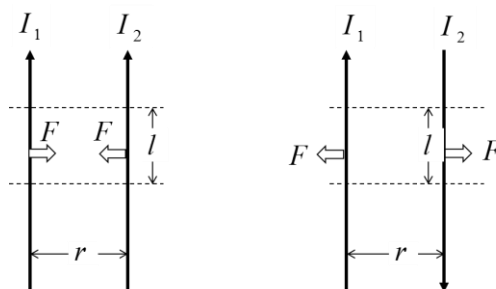


図 3. 3

3. 4 磁束密度 ⑩

(3.5)式の電流に働く力を、電流 I_2 が受ける力として近接作用の目で見よう。ここで、場を作る I_1 を I_0 に、力を受ける I_2 を I に置き換える。 I_0 と I を結びつけるベクトル量を \mathbf{B} とするとき、そのスカラー量で表した(3.5)式は、以下のように書き表される。

$$F = IBl \quad (3.9a)$$

$$B = |\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \quad (3.9b)$$

エルステッドの発見から明らかなように。電流によって作り出される場は磁気的な性質を持つ場であり、ここではこれを**磁束密度**と呼ぶ。磁束密度の単位は[N/Am]であるが、テスラ[T]と呼ばれる。なぜ磁界と言わず磁束密度と言うかについては、単位のことも含めてこの節の最後に説明する。

直線上に流れる電流に対して、コンパス(磁針)で磁場の向きを調べると、電流方向を軸として円形になる。これより、ベクトル場:磁束密度 \mathbf{B} は、電流にも力にも直交する向きを持ち、次式で表される。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_0 \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}}{2\pi r^2} \quad (3.10)$$

電流の流れる向きは、磁束密度の回転方向に対して右ねじが進む方向になる。この \mathbf{B} と電流 I が流れる長さ $d\mathbf{l}$ 当たりに働く力 $d\mathbf{F}$ は

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (3.11)$$

となり、 F, B, I の向きの関係はフレミングの左手の法則に従う。(フレミングの左手の法則：左手の親指、人差し指、中指をそれぞれ直角方向に向け、上記の順で F, B, I (FBI：アメリカの連邦捜査局) に対応させ、 \mathbf{B} と I の向きを与えたときの力 F の向きを示す)。図3. 4はこれらの関係をまとめている。

磁束密度の単位は[N/(Am)]であり、表1. 1より組立単位は[0,1,-2,-1]である。上述の経緯で名づけられた物理量であるならば、電流の周りに磁界が発生する、すなわちこの磁氣的歪を、あえて磁束密度と呼ばずに、素直に磁界と呼びたい気持ちになる(筆者が電磁気学を学生に教えていたときはそう思った)。しかし、残念ながら、使いたい用語である「磁界」が後述するように既に別の定義で使われているため、違う名前「磁束密度」にしたわけで、電磁気学構築の過程における歴史的都合と言わざるを得ない。

磁束密度に対して、このような入り方をすると、磁氣的な場を表す \mathbf{B} の用語としての磁束密度 (=単位面積当たりの磁束) のイメージが湧いてこないと思う。しかし \mathbf{B} の単位を見ると[N/(Am)]=[0,1,-2,-1]であるが、磁荷(磁束)の単位[Wb]=[Nm/A]=[2,1,-2,-1]を使うと[Wb/m²]=[0,1,-2,-1]となって、なるほど、磁束密度と呼ぶことに納得できる。ずいぶん不親切な入り方であったが、これを知って納得でき、磁界とつけなくて良かったという気分になってくる(電磁気学は先人の知恵によってうまく組み立てられている)。

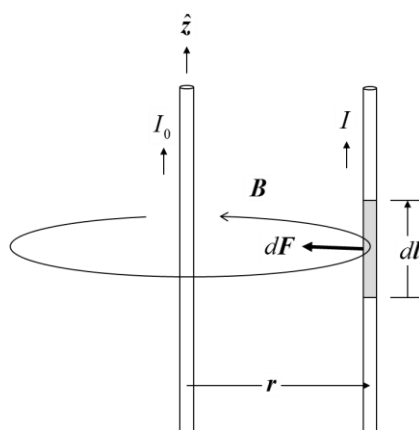


図3. 4

3. 5 磁束密度に関するガウスの法則 ⑩

前述のとおり磁束密度は電流によって生み出され、その磁束はループになっていて始まりも終わりもない。それゆえ、任意の閉曲面 S で囲まれる空間を考えたとき表面を出入りする磁束は等量となり、正味 0 である。空間内に単体の磁荷（単極磁荷）が無いのである。故に、磁束密度の閉曲面上の積分は 0 となり、

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (3.12)$$

である。ガウスの発散定理より、

$$\text{左辺} = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV$$

となり、左辺=0 であるので、

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.13)$$

である。この式が**磁束密度のガウスの法則**を表している。電束密度のガウスの法則から、電束の源は電荷であったが、磁束には磁荷という源が無いことを示している。

全ての磁気現象が電流起因であることに現時点で例外はない。永久磁石も原子レベルで見れば荷電粒子のスピンの存在があり磁気の原因（磁気モーメント）を内在する。地球や太陽などの磁気を持つ天体も内部の荷電流体運動によって大規模な磁場を生成・維持する働きをもつとされ、**ダイナモ効果**、**ダイナモ作用**と呼ばれている。

後の時代において、単独磁化（単極磁荷）が発見されれば、(3.13)式が崩れ、電磁気学理論に大変革をもたらすことになるが、そのようなことにはならないのではないかと筆者は思う。なぜなら、**磁界の発生メカニズムは全て電流によって説明できており、単独磁荷の存在を必要としないためである**。そう思うには別の理由もある。詳しいことをここでは述べないが、電界と磁界は独立に存在するものではなく、観測者（動いている観測者、異なる慣性系にある観測者）に依存し、物事の表と裏のような関係で、両者が姿を入替ながら見え隠れしていると言う印象である。このことは、ニュートン力学的には矛盾する電磁気学の力学現象が、相対性理論によって全て辻褃が合うよう説明できるからである。このためには、電界も磁界もその根源は電荷にあるということのみによって説明できるのではないかと筆者は確信している。この話題に興味があったら、是非、シリーズレポート（本レポートと同タイトル）の(3), (4), (7), (8)を見て欲しい。

ここまで、磁氣的性質を長々説明してきたが、これによって、マックスウェルの方程式の二つ目

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

を得ることができた。

4. $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}$: アンペアの法則 (⑫から⑮への道)

4. 1 ビオ・サバールの法則 ⑫

ビオ・サバールの法則は、電流素辺が、それに対応する磁場（磁束密度やこの後出てくる磁界）を作ることを示す法則である。この法則から、磁場の全体は、電流の領域全体の積分になると言う描像を与えてくれる。

電荷が作る電界についておさらいをする。図 4. 1 (a)で、 z 軸上の微小区間 dz に電荷が電荷密度 λ [C/m] で分布している。このとき、図の P 点における電界の z 軸と直交する方向成分 dE_x は、クーロンの法則より、

$$dE_x = \frac{\lambda dz \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

である。同図(b)に示す微小区間 dz を流れる電流素片 I により、P 点に発生する磁束密度 dB は、同じように、

$$dB = \frac{\mu_0 I dz \sin \theta}{4\pi r^2} \quad (4.1)$$

と推定してもよいであろう。この二つの式より、電気と磁気の間には $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{B}$, $\lambda \leftrightarrow I$, $1/\epsilon_0 \leftrightarrow \mu_0$ の対応関係が有る。

ビオ・サバールの法則は実験で確認することが困難である。それは連続で流れる電流の微小部分だけを取り出すことができないためである。しかし、(4.1)式が正しいとして、理論値が得られる設定（例えば無限直線状導線（例題 4. 1））から積分等で求めた結果が、理論値や測定値に一致すれば、その正しさの確認にはなる（証明ではないことに注意）。そのような種々の検証の結果、(4.1)式による推定を誤りとする事例は無く、故に法則と認められ、発見者（J. B. Biot; 1774-1862、F. Savart ; 1791- 1841）に因んで**ビオ・サバールの法則**と呼ばれている。この法則は、任意の形状に流れる電流（時間的に変化しない定常電流）に対して、磁束密度を積分で計算できる（通常は数値計算）ので、非常に有用な式である。ビオ・サバールの法則をベクトルで表すと以下である。

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (4.2a)$$

電流の方向は任意なので、 $d\hat{\mathbf{z}} \rightarrow d\mathbf{l}$ として、一般的に表すと、

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (4.2b)$$

となる。

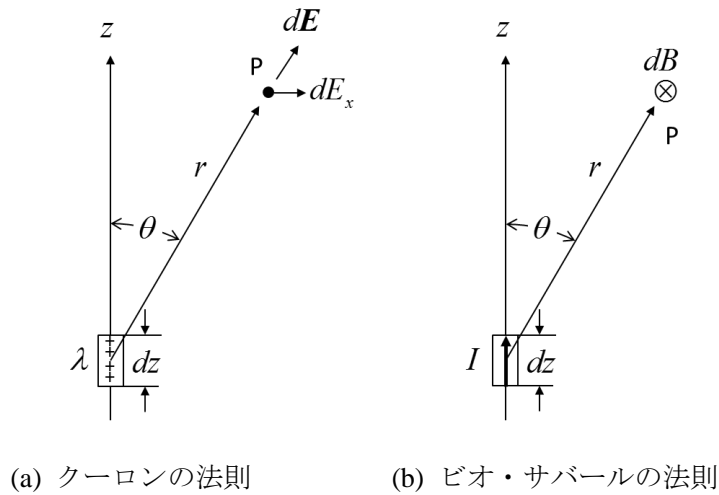


図 4. 1 電界と磁束密度の発生の類似性

以下、ビオ・サバルの法則が適用できる典型的な二つの例題を示す。

【例題 4. 1】 図 4. 1(b)の座標系においてz 方向無限直線状導線に流れる電流I がP 点 (z 軸からの距離 a) に作る磁束密度を求めよ。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 a I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} dz \\
 &= \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right]_0^{\infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}
 \end{aligned}$$

この結果は(3.9b)式に一致している。

【例題 4. 2】 図 4. 2 に示すように、半径 a の円形線状導体に電流 I が流れている。このとき、円の中心軸上で、中心から距離 x 離れた点 P における磁束密度を求めよ。

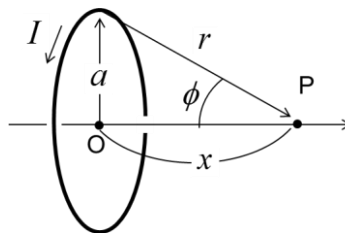


図 4. 2

$$B_x = \frac{\mu_0 a I}{4\pi(x^2 + a^2)^{3/2}} \oint_c dl$$

$$= \frac{\mu_0 a^2 I}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

中心点 O では、

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

■

4. 2 ベクトルポテンシャル ⑬

本テキストでは、マックスウェルの方程式ができるまでを一直線に進むことを目的にしている。そういう意味ではこの節は無くて良い。なぜなら、マックスウェルの方程式を整理して4つの方程式に集約したヘビサイドとヘルツが、マックスウェル自身のベクトルポテンシャルを含んだ複雑な方程式群から、不要なものとしてこれを消してしまい、陽に現われてこないからである。では、避けて通ってよいかというとそうではない。マックスウェルの方程式は電界と磁界の振る舞いとしてまとめられているが、もっと本質は、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルで表現するべきではという議論があるからである。筆者のレポートでは、シリーズの(2)を見て欲しい。そういう意味もあり、また、面白い性質が見られるので、ここに取り上げる。繰り返すが、本テキストの中では、この節以外には出てこない。

電磁気学では、ポテンシャルという言葉が二つ出てくる。スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルである。スカラーポテンシャルは、2. 4節で学んでいる。スカラーポテンシャルは、静電界の説明の中で、電位という言葉で読みかえられ、電荷 q を電位 ϕ_1 のところから電位 ϕ_2 のところまで運んでゆくためには $q(\phi_2 - \phi_1)$ の仕事(エネルギー)が必要と学んで、ポテンシャルという言葉が分かる。

一方、これから学ぶベクトルポテンシャル \mathbf{A} は、以下のように天下りの的に定義される。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{4.3}$$

「磁束密度 \mathbf{B} は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ だから、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ と表すことができる。なぜなら、ベクトル公式により $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ であって、 \mathbf{A} は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を自動的に満たしているからである。このベクトル場 \mathbf{A} をベクトルポテンシャルと呼ぶ。」と。感覚的には、磁束密度 \mathbf{B} は何か渦のようなものから生み出され、その渦の元がベクトルポテンシャルだと。

最もイメージしやすいケースを考えてみよう。直線状に流れる電流に対する磁束密度とベクトルポテンシャルである。図4. 3に、 z 方向に電流 I が流れている環境での電磁界の様子を示す。ベクトルポテンシャルの理解にはこのケースが一番適しているであろう。シリ

一ズレポート(6)の(6b)式より、ベクトルポテンシャルの向きは電流と同じ z 軸方向になり、 r が大きくなるほど、値が小さくなる。磁束密度は ϕ 成分方向に現われ、

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

であるので、ベクトルポテンシャルを図の点線の矩形経路 (z 軸方向の長さ: 1) で積分すると、

$$\oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = (A_z(a) - A_z(r))l = \int_S B_\phi dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a}$$

$$\rightarrow A_z(r) = A_z(a) - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a} \tag{4.4}$$

となる。図4. 3のように、 z 方向に向き、かつ、 r に対して徐々に弱くなるベクトル場では、 ϕ 方向を軸とする捩れが生じ、これがベクトルポテンシャルの渦になっている。(図では、 z 方向一直線で渦に見えないが、左右の強度差によって回転成分が発生している。紙面から垂直に指を入れるとこの強度差によって捻れを受ける)。

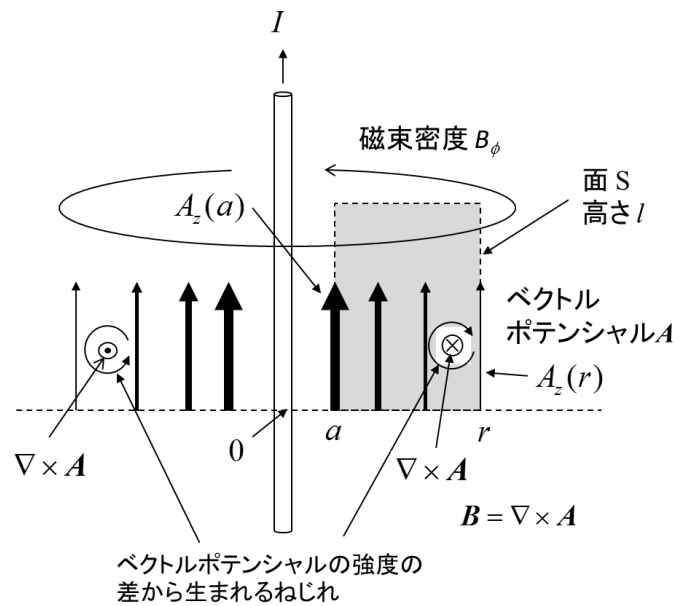


図4. 3 直線状電流に対する磁界とベクトルポテンシャル

ベクトルポテンシャルには以下の不思議がある。静電界における電界の相棒はスカラーポテンシャルである。 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ より明らかなように、スカラーポテンシャルがあるところには必ず電界がある。その逆もまた然りである。ところが、ベクトルポテンシャルに関しては、磁場(磁束密度)がないところにもベクトルポテンシャルが存在するケースがある。具

体的な例は、この後の例題 4. 4、4. 5 で示すようなソレノイドコイルの外側である。ここでは、磁束密度 \mathbf{B} ($=\nabla\times\mathbf{A}$) が無いのにベクトルポテンシャル \mathbf{A} だけはある、ということになる（詳しくはシリーズレポートの(6)）。電界も磁界もない場においては、電磁気的な現象は何も起こらないはずである。それでは、ベクトルポテンシャルは、単なる数学のお遊びであって、物理的に存在するのだろうかと言う疑問が湧いてくる。これに答え（＝存在すると言う）を与えてくれたのが量子力学である。

量子力学の世界に、Y. Aharonov と D. J. Bohm が 1959 年、その存在を指摘したアハラノフ・ボーム効果 (AB 効果) というのがある。詳しくは、解説資料[1]を見て欲しいが、一言で言うと、ベクトルポテンシャルがある場では、電子を P 点から Q 点に移動させるとその位相変化 (電子波の位相: 量子力学的な物理量) が経路に依存する、と言うものである。これを確認する実験は大変難しくなかなかできなかったが、日立製作所の外村彰博士が、1986 年、電子線ホログラフィーの手法を用いて、その存在を実証した (漏れの無い磁場を作ることの難しさ等の苦労話が解説記事[1]に)。これによって、ベクトルポテンシャルが単なる数学上の表現ではなく、実在する物理量であることが分かったのである。

ポテンシャルと呼ばれる理由は、単位からの考察をしてみると分かりやすい。ベクトルポテンシャルは何に対するポテンシャルであろうか。ベクトルポテンシャルの組立単位は [1,1,-2,-1] である。エネルギーの単位は [2,1,-2,0] である。これをつなぐものの単位は、[1,0,0,1] ($=[2,1,-2,0]-[1,1,-2,-1]$)、すなわち [m][A] である。電流が流れている導線の一定の長さ分の量である。図 4. 3 に示した例で考えると、磁束密度 \mathbf{B} の場の中で、その回転軸方向に電流 I を置く。これを r 方向に P 点から Q 点まで動かすには、長さ l 当たり $I l(A_Q-A_P)$ のエネルギーが費やされ (詳細はシリーズレポート(6)参照)、ベクトルポテンシャルと呼ばれる理由が理解できる。

4. 3 磁界 ⑭

電磁気学は単極磁荷の存在を認めていない。しかし、永久磁石の一方だけを見て、実効的な意味での単極磁荷とみなすようなことはイメージできる。電磁気学が今の形になる以前、磁荷を用いた力学ができていて、単極磁荷 Q_m と別の単極磁荷 q_m (単位[Wb]) の間には電荷に対するクーロンの法則と同じように力が働き、磁荷 q_m に対し

$$F = \frac{Q_m q_m}{4\pi\mu_0 r^2} = q_m H \quad (4.5a)$$

$$H = \frac{Q_m}{4\pi\mu_0 r^2}, \quad \mathbf{H} = \frac{Q_m \mathbf{r}}{4\pi\mu_0 r^3} \quad (4.5b)$$

の関係を定め H (向きがあるのでベクトル \mathbf{H}) を磁界と呼んだ。単位は[N/Wb]であり、[Wb]=[Nm/A]なので[A/m]である。(この \mathbf{H} を「磁界の強さ」と呼ぶ教科書もあるが、 $|\mathbf{H}|$ が「磁界の強さの強さ」になってしまい、落ち着きが悪い。)

磁界と磁束密度の関係を見てみる。磁束密度は電流に働く力を生み出す場として定義したが、単極磁荷を認めるならば、磁荷から距離 r にある磁束密度は

$$\mathbf{B} = \frac{Q_m \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (4.6)$$

である。(4.5b)式と(4.6)式の比較から、真空中においては、磁束密度と磁界は

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (\text{真空中}) \quad (4.7)$$

で関係付けられる。

上記では、電磁気学ではその存在が否定されている単極磁荷を用いた説明をしたが、図 4.4 に示す双極磁荷（微小磁気ダイポール）と微小ループ電流の磁気モーメントの等価性より(4.7)式の関係を導くことができる。ここではその詳細は述べないが、両者の磁力線の形を遠方から見れば、その等価性が感覚的に理解できると思う。

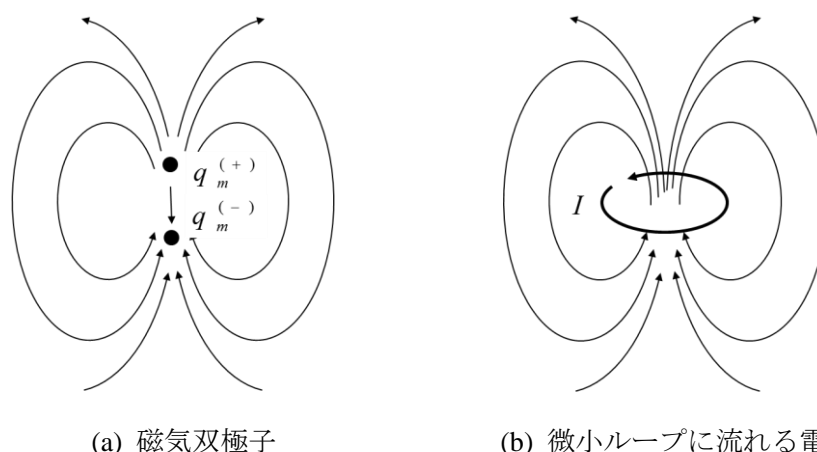


図 4.4 磁気双極子と微小ループ電流が作る磁場の等価性（遠方から見たときの）

磁界中で、 \mathbf{B} と \mathbf{H} の関係が変わる媒質は**磁性体**と呼ばれる。全ての物質は強弱の差はあれ磁性体の性質があるが、通常、磁性体と言えば、磁界中で磁石の性質を持つ**強磁性体**（鉄、コバルト、ニッケルなど）を言う。本テキストでは、磁性体が磁化するメカニズム（分極、磁化電流など）や磁性体の性質の説明は割愛する。

以下では、磁性体中の電束密度と磁界の関係を、図 4.5 に示す無限長ソレノイドの場合で説明する。単位長当たりの巻数を n 、電流を I とすると、次節で示す例題 4.4 より、ソレノイド内では磁界は一様になり、磁性体の有無によらず次式で与えられる。

$$\mathbf{H} = nI \quad (4.8)$$

磁界は真電流、すなわち実際に流れている電流 I 、によって生み出される。一方、磁束密度は磁性体内の磁化によって、内部に均一に渦電流が発生する。そしてその内部の渦は隣同

士で打ち消され、見かけ上、磁性体の表面のみに電流が残ることになり、**磁荷電流**と呼ばれる。磁性体内部の磁束密度は外部のコイルに流れる電流（真電流）に磁荷電流が加わったものが作り出す。

磁性体が無い場合は、ソレノイド内の磁束密度は $B = \mu_0 H$ であったが、磁化電流により

$$B = \mu n I = \mu H \quad (\mu = \mu_r \mu_0) \quad (4.9)$$

となる。 μ は磁性体の透磁率、真空中の透磁率との比を表す μ_r は**比透磁率**と呼ばれる。強磁性体に分類される磁性体では、比透磁率は 1 よりかなり大きな値を持つ（例えば、純鉄で 5000 程度）。

異方性を持つ特殊な磁性体を除き、磁界と磁束密度は同じ方向を向き、以下となる。

$$B = \mu H \quad (\text{磁性体}) \quad (4.10)$$

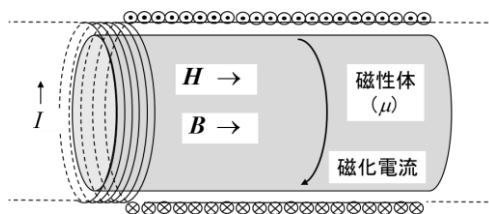


図 4. 5

4. 4 アンペアの周回積分の法則 ⑮

無限直線状電流 I に対する、距離 r における磁界は、(3.9b)式より、

$$H = B / \mu_0 = \frac{I}{2\pi r}$$

である。半径 r の円周に沿って磁界の経路方向成分の積分を行うと I になる。この値は、半径 r の大きさによらない。ここから、電流を中に含む任意の閉路 c を考え、その経路で磁界の経路方向成分に対して周回積分を行えば、 I になるのではないかと推測できる。重ね合わせの原理から、さらに一般化し、複数の電流に対して以下の仮説が立てられる。

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n I_n \quad (4.11a)$$

この仮説は、時間的な変動のない静磁界において成立しており、**アンペアの周回積分の法則**、あるいは**アンペアの法則**と呼ばれる。言葉で表すと、「静磁界において、任意の閉路 c を考えるとき、経路上の磁界の経路方向成分を経路に沿って周回積分を行うと閉路 c の内部に存在する電流の和になる」である。電流が面内に連続的に分布している場合には、閉路 c で囲まれる任意の曲面 S において、以下の式が成り立つ。

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.11b)$$

ストークスの定理より左辺は

$$\text{左辺} = \oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS$$

であるので、(4.11b)式は

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}$$

と微分形で表記できる。一切の無駄が無いエッセンスと感じられる。

アンペアの法則は、電界を求めるときのガウスの法則と同様、対称構造の電流に対する磁界を求めたいときにその有用性が発揮される。以下典型的な例題を三つ示す。

【例題 4. 3】 例題 4. 1 (図 4. 1(b)) をアンペアの法則を使って磁界を求めよ。

z 軸を中心に半径 a の円を考え、これを積分経路とする。(4.11b)式の左辺は $2\pi rH$ 、右辺は I なので、 $H=I/(2\pi r)$ となる。 ■

【例題 4. 4】 図 4. 6 に示すような単位長さ当たりの巻数 n の無限ソレノイドに電流 I が流れているときの磁界を求めよ。

対称性より、磁界の方向はソレノイドの中心軸方向であり、大きさは軸方向に一定である。ソレノイドの内部と外部をつなぐ形で、図のような軸に平行な矩形 ABCD よりなる閉路 c をとると、 c 上で

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_{AB}l - H_{DC}l = nIl$$

である。ここで、 l は辺 AB、CD の長さ、 H_{AB} 、 H_{DC} は、それぞれの辺上の磁界の大きさを表している。図で、辺 DC を固定し、矩形を保ったまま辺 AB をソレノイドのどの位置に動かしても上式に変化は無いため、 H_{AB} はソレノイド内で均一である。次に、辺 AB を固定した状態で辺 CD を動かしても上式に変化が無く、ゆえに、 H_{DC} はソレノイドの外で均一である。さらに、辺 CD をソレノイドから無限に遠方に移しても、上式は変わらないが、 H_{DC} は空間的に広がりによって弱くなるはずで、無限遠では 0 である。以上のことを論理的にまとめると、次の結論になる。

$$\mathbf{H} = n\mathbf{I} \quad (\text{ソレノイド内部、向きは軸方向})$$

$$\mathbf{H} = 0 \quad (\text{ソレノイド外部}) \quad \blacksquare$$

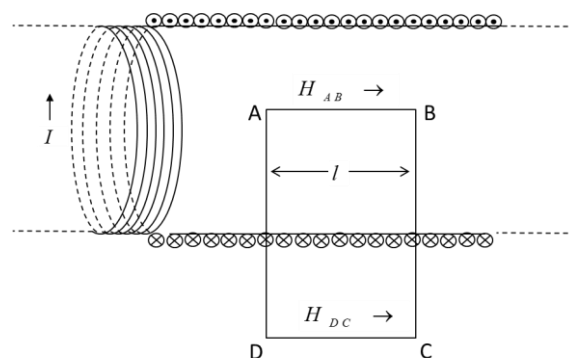


図 4. 6

【例題 4. 5】 図 4. 7 に示すような環状ソレノイド（半径 a 、巻数 N ）に電流 I が流れているときの円環中心路 c 上の磁界を求めよ。

対称性より、閉路 c では、閉路が作る面内を NI の電流が流れているので、

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi a H = NI \rightarrow H = \frac{NI}{2\pi a}$$

である。ちなみに、同じ面で、閉路 c をソレノイドの外側（中心から遠い方向）にとれば、中を流れる電流は $NI - NI = 0$ となって磁界は 0 である。同様に、ソレノイドの外側で中心に近い側でも、電流は 0 であるので、磁界は 0 である。 ■

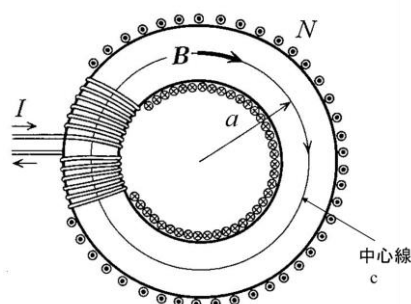


図 4. 7

なお、ここでは磁界 H を求める問題としているので、媒質が真空であるか磁性体であるかを問わない。磁束密度 B を求める問題であれば、真空中では $B = \mu_0 H$ 、磁性体中では $B = \mu H$ と置き換えればよい。

これらの例題により、アンペアの周回積分の法則（アンペアの法則）の有用性が体感でき

たと思う。同じことは、ビオ・サバールの法則を用いても行えるが、特に例題 4. 5 については、式もその解法も複雑になり、コンピュータを用いた数値計算に頼らざるを得ない。

以上述べてきたようにして、大事な方程式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}$$

を導いたが、この式はマックスウェルの方程式にある形ではない。その理由については 6 章まで待つて欲しい。

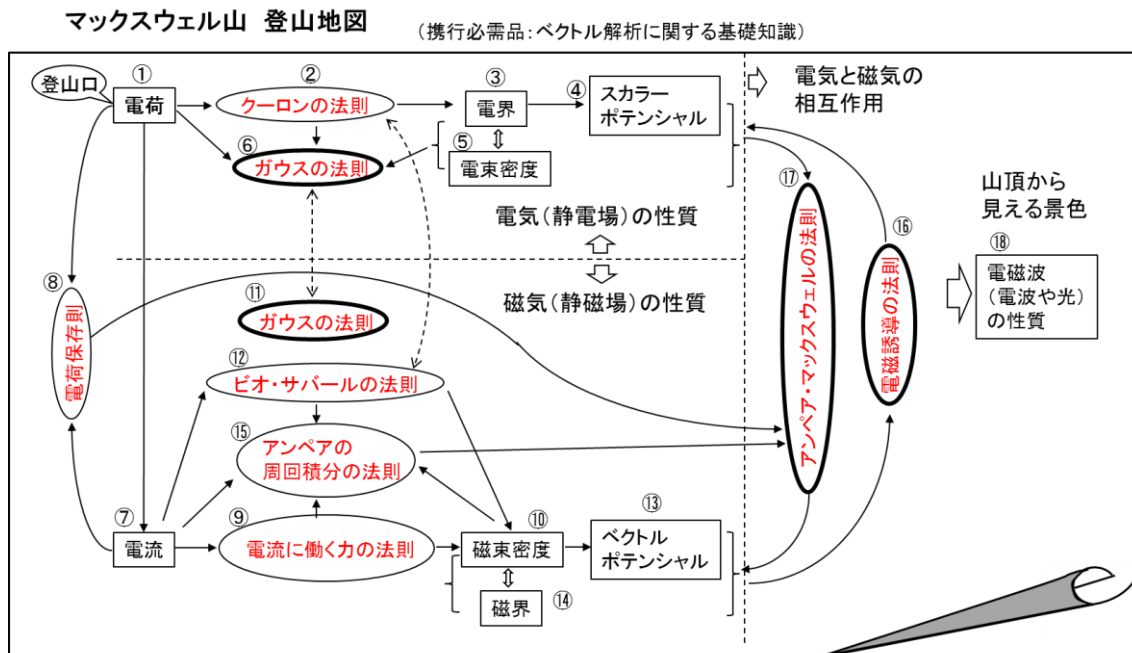
参考文献

[1] 外村彰, “電子波で見る電磁界分布 (ベクトルポテンシャルを感じる電子波),”
<https://www.ieice.org/jpn/books/kaishikiji/200012/20001201-1.html>

【再掲】 表 1. 1 電磁気関連物理量の MKSA 単位系での次元 (組立単位)

(4 つの基本単位の並び順にはいくつかの流儀があるが、本資料では MKSA [m, kg, s, A] の順で並べている。)

名称 (物理量)	代表的表記	単位名称	物理単位	組立単位			
				M (m)	K (kg)	S (s)	A(A)
力	F	N(ニュートン)	J/m, kgm/s ²	1	1	-2	
エネルギー(仕事)	U	J(ジュール)	Nm	2	1	-2	
電力	P	W(ワット)	J/s, VA	2	1	-3	
電圧	V, ϕ	V(ボルト)	J/C, W/A	2	1	-3	-1
電流	I	A(アンペア)	C/s, W/V				1
電流密度	i		A/m ²	-2			1
抵抗(インピーダンス)	R	Ω (オーム)	V/A	2	1	-3	-2
導電率			1/ Ω m	-3	-1	3	2
静電容量	C	F(ファラド)	C/V	-2	-1	4	2
インダクタンス	L	H(ヘンリー)	J/A ²	2	1	-2	-2
誘電率	ϵ		C ² /Nm ² , F/m	-3	-1	4	2
透磁率	μ		H/m	1	1	-2	-2
電荷・電束	Q, q	C(クーロン)	As			1	1
磁荷・磁束	Q_m, q_m	Wb(ウェーバ)	Nm/A, Tm ² , Vs	2	1	-2	-1
電束密度	D		C/m ²	-2		1	1
磁束密度	B	T(テスラ)	N/Am, Wb/m ²		1	-2	-1
電界	E		V/m	1	1	-3	-1
磁界	H		A/m	-1			1
ベクトルポテンシャル	A		Tm	1	1	-2	-1
周波数	f	Hz(ヘルツ)	1/s			-1	



【再掲】 図1. 5 マックスウェル山登山地図

(マックスウェル山 (電磁気学) の頂にあるもの: 太字で囲った4つの法則 (⑥、⑪、⑯、⑰) を表す連立方程式 (マックスウェルの方程式))