Technical Report YK-039
Dec. 20, 2019
Y. Karasawa

電磁気学の奥深さ（１１）：マックスウェルの方程式ができるまで（その３）

唐沢 好男

内容目次

５． $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ ：電磁誘導の法則（⑯を種々の視点から眺める）

５．１　ファラデーの電磁誘導の法則 ⑯

エルステッドが電気（電流）の磁気作用を発見したのは 1820 年であった。その後、多くの研究者によって磁石から電気を生み出す試みがなされたがうまく行かず、ついに、その扉を開いたのはイギリスのファラデー（囲み記事）、1931 年であった。図５．１のように、磁石のそばでコイルを動かす、あるいは、コイルのそばで磁石を動かすときだけ検流形が振れるのに気付いたのである。ファラデーの発見によるこの現象は**電磁誘導**と呼ばれる。その後、ドイツのレンツにより、コイルに発生する起電力の向きに関するレンツの法則、すなわち、「電磁誘導によって生じる電流（**誘導電流**）の向きは、変化する磁力線の密度の変化を妨げる方向になる」を発見した（1834 年）。さらに、イタリアのノイマンは、図５．１に示すループに生じる起電力（**誘導起電力**）V とループを貫く磁束 Φ_m の関係を、以下の式で示した。

$$V=-\frac{d\Phi_m}{dt} \tag{5.1}$$

符号が負となるのは、レンツの法則による磁界の変化を妨げる方向に電圧が発生することを意味している。(5.1)式を、**ファラデーの電磁誘導の法則**、あるいは、**電磁誘導の法則**という。

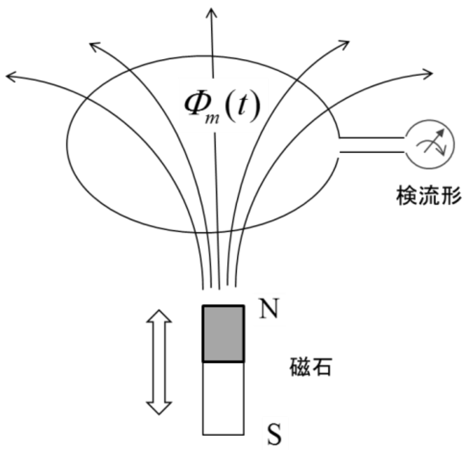


図５．１　電磁誘導

閉路 c、それを縁とする任意の面を S とするとき、(5.1)式の両辺は、それぞれ以下のように変形できる。

$$\text{左辺}=V=\oint_c \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S \nabla\times\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

$$右辺=-\frac{d\Phi_m}{dt}=-\int_S\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

これより、電磁誘導の法則は、次式の微分形で表される。

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{5.2}$$

この式から、電磁誘導は以下のように読み解ける。「磁束密度（あるいは磁界）の時間的変化があるところでは、その場所に電界の回転というベクトル場を生み出す」。さらに、ストークスの定理によって次のように展開できる。「そのようにして生み出された場の周囲には渦状の電界が現われる。その中に、導線を置くと、その導線はその場の電界を感じ取って起電力を生む」。１．２節でのストークスの定理の説明でも強調したとおり、上述の「電界の回転（$\nabla\times\boldsymbol{E}$）」と「渦状の電界（$\boldsymbol{E}$）」はその存在する場所も物理量も異なるベクトル場である。

電磁誘導の原因から結果までを通しで整理すると、
『(i) 磁束密度（磁界）が時間的に変化する→(ii) その場所に電界の回転（$\nabla\times\boldsymbol{E}$）で表される場が生まれる（向きは磁界の変化を防ぐ方向）→(iii) その周囲に渦状の電界 $\boldsymbol{E}$ ができる→(iv) 電界中にある導線に起電力 V が発生する』。繰り返しになるが、電界の回転（$\nabla\times\boldsymbol{E}$）は、その周囲に渦状の電界を生み出す種であって、電界の回転と渦状の電界は異なる物理量（ベクトル場）と言う認識を持って欲しい。

５．２　導線は何を感じるか

電磁誘導の法則は(5.2)式が全てである。これを、いろいろな視点から眺めてみたい。

電磁誘導の典型的な応用問題に以下の例題がある。

【例題５．１】 *図５．２に示すように、磁束密度 B の一様な磁場がある。この中に、抵抗 R で結ばれた平行導線があり、この上を導線が接触したまま一定速度で動く。それぞれの辺を図のように a, b, c, d としたとき、$abcd$ は矩形の閉回路を作る。辺 b, d の長さを l、a, c の長さを x、d の速度を v とする。このとき閉ループに流れる電流 I を求めよ。*

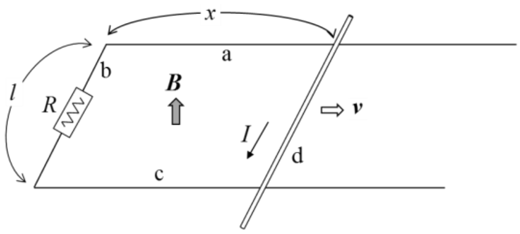


図５．２

これには解法が二つある。

【解法１】　電磁誘導の法則により、回路に発生する起電力 V は

$$V = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Blv$$

電流 I は、オームの法則より Blv/R、向きは図の矢印方向（磁束密度の増加を防ぐ方向）■

【解法２】　４つの辺のうち、電磁現象が起きそうなのはどれかを探す。辺、a, b, c は磁束密度も導線の位置も時間的に変化無く、何も起こりそうにない。一方、辺 d は磁束密度中を動いているので、何かあるとしたらここである。辺 d は導線なので、この中には、電荷が存在する（正負等電荷量だが、動くことができるのは負電荷を持つ電子の方）。この電荷密度を λ [C/m]とする。辺 d に存在する荷電粒子（電荷）は磁界中の移動になり、ローレンツ力（注１）を受ける。電荷全体が受ける力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = \lambda l \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

であり、向きは導線の方向になる。一方、荷電粒子に加わる力はクーロンの法則の帰結（$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$）から、電界があるところにおいて

$$\boldsymbol{F} = \lambda l \boldsymbol{E}$$

であるので、

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

で与えられる電界が導線 d にかかっていることと等価になり、発生する起電力 $V=El=Blv$、電流 $I=Blv/R$ となって、解法１と同じになる。■

同じ結論になる二つの解法を比較してみると、導線 d に直接電磁界が作用する解法２の方が電磁誘導を知らなくても解けることもあり、感覚的に受け入れやすい（計算自体は解法１の方が直接的ではあるが）。

【注１】ローレンツ力 : 磁界中を動く荷電粒子に働く力。磁界中を流れる電流に働く力（フレミングの左手の法則）については(3.11)式で学んでいて、$d\boldsymbol{F}=Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$ である。電荷 q の荷電粒子が速度 $\boldsymbol{v}$ で動く場合は $Id\boldsymbol{l}$ の部分が $q\boldsymbol{v}$ に置き換えられ $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ で与えられ、この力がローレンツ力。電界 $\boldsymbol{E}$ がある場合には、クーロン力を含めた $\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ もローレンツ力と呼ばれる。

解法２からいえることは、閉路に起きることは閉路を構成する導線のところにその現象を引き起こす場が存在し、その作用によって導線に起電力が生まれると言うことである。近接作用の考え方からは、導線に起きることは、導線の場所に何かが無ければ起きないのだから、解法２はその精神に合致している。しかし、以下で述べるように、解法１はすべてのケースにおいて通用するが、解法２はその適用が限定的である。それを図５．３のケースで見て行きたい。なお、図５．３には種々の説明が入っているが、ここでは、中央の S_0 にある磁界と円形閉路（ループ）c だけを見て欲しい。

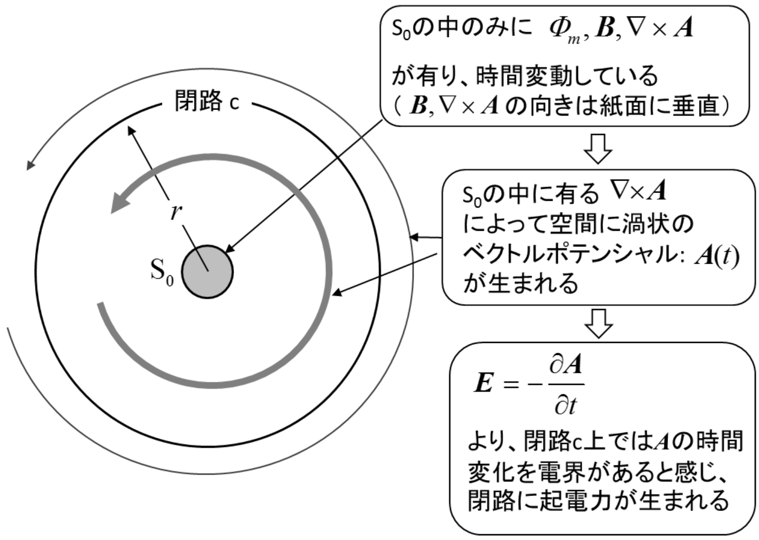


図５．３

中央部の円形領域 S_0 に磁界が一様に分布していて（方向は紙面に垂直）、その強さが時間的に変化している。ループの中央を紙面垂直に無限ソレノイドが貫いていると言うような状況（例題４．４）である。（無限先の磁束の行方が気になる場合は、例題４．５で示した円環ソレノイドの半径が十分大きくして、その一部を見ていると考えても良い）。この外側に半径 r の円形ループがあり、これに誘起される電圧を考える。

電磁誘導の法則（すなわち解法１）により、閉路に発生する起電力は $V=-2\pi r(d\Phi_m/dt)$ と直ちに求められる。一方、解法２では、導線のある場所には磁界が存在せず、かつ導線に動きもないのだから、ローレンツ力を使っての起電力算出はできない。でも、導線に起きることは、導線の場所に何かが無ければ起きないのだから、その何かを探してみたい。まさに、近接作用の考え方である。ソレノイドの外側には電界も磁界もないが、では、電磁気的場は何もないのであろうか？４．２節で学んだベクトルポテンシャルを思い出して欲しい。（注：４．２節ではベクトルポテンシャルの話はそこだけと記したが、再登場してもらった）。
$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ と電磁誘導の法則より

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\boldsymbol{A}\right)$$

であるので、電界 $\boldsymbol{E}$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ には以下の関係が有る。

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$$

上式の右辺第１項は微分方程式から出る積分定数であり、静電界の話（式(2.7)）であって、ここでの議論には関係しないので、第２項のみに着目し、

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{5.3}$$

である。ベクトルポテンシャルが物理量として存在するかどうかの議論は４．２節で述べたが、結論として存在するものと認められている。磁束と磁束密度の関係、及び、ベクトルポテンシャルの定義より

$$\Phi_m=\int_{S_0}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_{S_0}\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS=\oint_{c}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$$

であり、磁束の存在は、周囲に渦状のベクトルポテンシャルの場を作り、これは磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が無いところ（図５．３では S_0 の外側）にも存在する。その時間変化は、

$$\frac{d}{dt}\Phi_m(t)=\oint_{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}(t)}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{l}$$

であるで、ループ内の磁束変化は、周囲に時間変化するベクトルポテンシャルを作ることになる。そこに置かれた導線は、(5.3)式より、ベクトルポテンシャルの時間変化を電界と感じ、

$$\oint_{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}(t)}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{l}=2\pi r\frac{dA_{\varphi}}{dt}=-2\pi rE_{\varphi}\ \rightarrow\ -V$$

の起電力を生み出すのである。これによって、導線の場所にはベクトルポテンシャルがあり、それが時間的に変化するときの導関数が電界に見えると言うメカニズムによって、現場の問題が現場で解決されたことになる。

５．１節の最後で整理したことを、ベクトルポテンシャルの働きとしてみれば、電磁誘導の法則は以下のようにもまとめられる（図５．３の右側枠内の説明書き参照）。
『(i) （時間的に変化する）磁束がある→(ii) その周囲に（時間的に変化する）渦状のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が生まれる（向きは磁界の変化を防ぐ方向）→(iii) ベクトルポテンシャルの時間微分値は電界の働きをする（等価電界）→(iv) 等価電界中にある導線に起電力 V が発生する』。繰り返すが、５．１節で述べたことも含めて解釈はいろいろできるが、電磁誘導現象の本質は式(5.2)が表していることであって、それが全てである（我々は、原因と結果の関係やそこに媒介する物理量に拘るため、等号で結ばれた式があった場合、例えば、右辺で表される現象が左辺の現象を生み出すというような捕らえ方をするが、数学的には、右辺

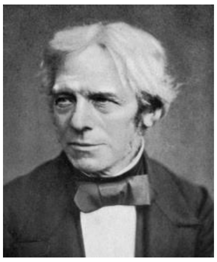
と左辺は等しい（＝同じものである）と言っているだけである）。

まとめると、電磁誘導の法則は

$$\boxed{\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}}$$

で表され、これがマックスウェルの方程式のうちの三番目である。

（コーヒータイム）　ファラデーの生き様



マイケル・ファラデー（Michel Faraday: 1791-1867）は、電磁誘導の法則やベンゼンの発見など、19 世紀にノーベル賞が有ったら６つは取れただろうと言われる科学者である(*)。ロンドン近郊の貧しい家庭に生まれ、まともな教育を受けることなく、製本屋に奉公していた。その傍ら、ロンドン市が主催する協会の講演を聞いては科学者になる夢を膨らませていた。意を決したある行動が報われて、英国王立研究所の助手になることができた。アンペアやマックスウェルなど電磁気学の創成期には早熟の天才が活躍するが、ファラデーは努力の人であった。研究者仲間からは常に格下に見られながら、天性の洞察力で電気力線や磁力線など場の概念（近接作用）を生み出し、物理学の改革者となった。

ファラデーは実験を好み、その記録を詳細に残していた。彼の最後の実験は、光源（ナトリウムの気体から出る光）を磁場の中に置いての光のスペクトル変化の観察であった。結果、何も変化は現れず、失敗を記してノートを閉じた。それから３５年後、ゼーマンがファラデーの失敗実験に再挑戦した。当時の最新装置を用いることによって、スペクトル幅が僅かに広がる現象を見出した。後にゼーマン効果と呼ばれ、ノーベル賞に輝いた。ゼーマンは、「あのファラデーが何かあると睨んで行ったことには、再挑戦してみる価値がある」と語って、敬慕の情を示したと言う。

晩年、物理学の第一人者となったファラデーに対して、英国王立協会会長職の就任要請が来た。このとき、ファラデーは、“I must remain plain Michel Faraday to the last” と言って断った。彼の信念・人生哲学を物語っている。

*) 小山啓太、光と電磁気：ファラデーとマックスウェルが考えたこと、ブルーバックス、2016.

６． $\boldsymbol{i}_d = \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ ：変位電流 ⑰

イギリスのマックスウェル（７章末に囲み記事）は、それまでに得られている種々の法則から電磁気学理論の構築を目指していた。しかし、これらをどのように組み合わせても、そこから電磁波は出てこなかった。既存の法則だけでは何かが足りなかったのである。それは何であろうか。

これまでにでてきた法則を見ると次の関係に矛盾が見られる。

・アンペアの法則： $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}$ (6.1)

・電荷保存則： $\nabla \cdot \boldsymbol{i} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ (6.2)

なぜなら、(6.1)式の両辺の発散をとると、左辺は、ベクトル公式より、$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} = 0$ となって、$\nabla \cdot \boldsymbol{i} = 0$ が導かれてしまうためである。これは(6.2)式を満たさない。これより、アンペアの法則には足りないものがあるということが予想されるのである。

マックスウェルは、このとき、電流とは何かと言うことを突き詰めていった。以下、図６．１に示す RC 回路に流れる電流を考えてみたい。コンデンサの電荷 0 の状態でスイッチを入れるとコンデンサを充電するために導線を電流が流れ、やがて電荷の飽和に至る。この電流を $I(t)$ と置く（図の回路では電流は解析的に求まるが、今はその必要はない）。図で導線に流れている電流 I は**伝導電流**と呼ばれている。コンデンサの電極間には電荷の移動がないが、それゆえ、ここには電流（１秒間に通過する電荷量で定義されている）が流れていないといってよいかどうかという問題である。

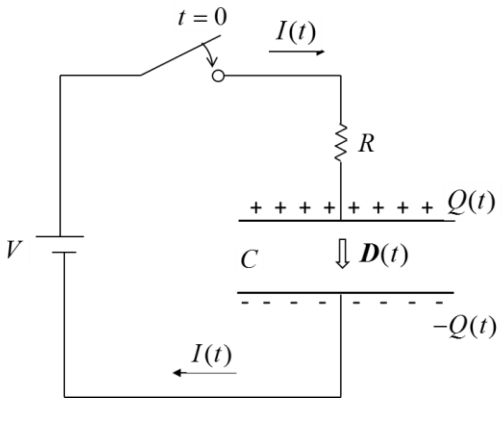


図６． １

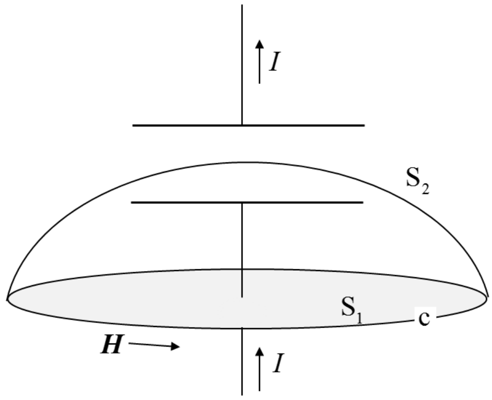


図６． ２

もし、電流を伝導電流だけだとするとアンペアの法則は以下の矛盾をはらんでいる。図６．２に示すようなコンデンサを含む回路にアンペアの法則を適用する。アンペアの法則の積分形は以下で表される。

$$\oint_{\mathrm{c}} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

閉路 c を図のような位置にとって、それを固定とする。それを縁とする任意の面 S に対して上式は常に成立する。図のように、導線と差交する面を S_1、コンデンサの電極間を通る面を S_2 とする。そうすると

$$\int_{\mathrm{S}_1} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_{\mathrm{S}_2} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

が求められるが、

$$左辺 = \int_{\mathrm{S}_1} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}dS = I, \qquad 右辺 = \int_{\mathrm{S}_2} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}dS = 0$$

となって矛盾する。矛盾を解消するためには、コンデンサの電極間にも I と等価な電流が流れていなければならない。マックスウェルは電束密度の時間変化量（時間微分値）も電流の働きをすると考え、この電流を**変位電流**と呼んだ。（変位電流が伝導電流と同じように磁界を生み出すことは、その後の実験により確認されている）。

図６． １のコンデンサの例で見てみよう。コンデンサに蓄積される電荷 Q は

$$Q(t) = \int_0^t I(t')dt'$$

コンデンサの電極面積を S とすると電荷密度 σ は

$$\sigma(t)\left(= D\right) = \frac{Q(t)}{S} = \frac{\int_0^t I(t')dt'}{S}$$

変位電流 i_d は

$$i_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{I(t)}{S}$$

となる。電極間に流れる変位電流の総量は $i_d S = I(t)$ となり、導線を流れる伝導電流とコンデンサの電極間を流れる変位電流の総量が同じ大きさとなり、電荷保存則、すなわち連流連続の法則がコンデンサの電極間も含めて成立していることになる。伝導電流がコンデンサのところで変位電流に姿を変え、しかし電流としては連続に流れているということである。

変位電流は電流密度でありベクトル量であるので

$$\boldsymbol{i}_d = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{6.3}$$

である。($\boldsymbol{i}_d$ は電流密度なので変位電流密度と呼びたいが変位電流の呼び名で定着している)

伝導電流も変位電流も電流として対等とみなしてよいことが分かったのでマックスウェルは(6.1)式のアンペアの法則を表す式の電流密度 $\boldsymbol{i}$ に変位電流の $\boldsymbol{i}_d$ を加え

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{6.4}$$

を得た。これにより、本章冒頭で述べた矛盾も

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \cdot \boldsymbol{i} + \frac{\partial \nabla \cdot \boldsymbol{D}}{\partial t} \rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

となって、解消している。

(6.4) 式で表される拡張されたアンペアの法則は、**アンペア・マックスウェルの法則**と呼ばれている。

以上まとめると、マックスウェルが考え出した以下の変位電流

$$\boxed{\boldsymbol{i}_d = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}}$$

をアンペアの法則の電流項に加えることで、アンペア・マックスウェルの法則

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}}$$

を得、これが、マックスウェルの方程式の 4 番目になる。これにて全方程式が出揃ったことになる。

Technical Report YK-039
Dec. 20, 2019
Y. Karasawa

７．マックスエルの方程式

７．１　山頂踏破：マックスウェルの方程式

これまでの説明によって、以下の４つの方程式を得ることができた。

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad\text{（電磁誘導の法則）}\tag{7.1a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\qquad\text{（アンペア・マックスウェルの法則）}\tag{7.1b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\qquad\text{（電束密度に関するガウスの法則）}\tag{7.1c}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\qquad\text{（磁束密度に関すガウスの法則）}\tag{7.1d}$$

上記の表記は微分形であり、積分形の表記では

$$\oint_{\mathrm{c}}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS\left(=-\frac{d\Phi_m}{dt}\right)\tag{7.2a}$$

$$\oint_{\mathrm{c}}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}dS+\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}dS\left(=I+\frac{d\Phi}{dt}\right)\tag{7.2b}$$

$$\int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_{\mathrm{V}}\rho dV\left(=Q\right)\tag{7.2c}$$

$$\int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS=0\tag{7.2d}$$

この４つの方程式が**マックスエルの方程式**と呼ばれ、マックスウェル山の山頂に御神体として祭られているのである。個々の式の意味については、それぞれの章で説明してきたので、ここで繰り返すことはしない。重要なことは、この４つの連立方程式が力を合わせることによって、電磁現象として起こるおよそ全ての動作を説明できるようになったことである。ただし、なぜ（why）ではなく、どのように（how）の意味である。

電磁気学はマックスウェルによって 1873 年に電気磁気論（Treatise on Electricity and Magnetism）として集大成されたが、非常に雑多な連立方程式群であったらしい。これを、上記４つの方程式に整理したのは、ドイツのヘルツとイギリスのヘビサイドであり、そのおかげで、今日、我々が学ぶのに非常にすっきりした形になっている。

マックスウェルの方程式は、電磁界 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}$ とそれを生み出す電荷密度ρと電流密度 $\boldsymbol{i}$ の関係を与えている。また、連立方程式を解くためには、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ の関係を与える以下の式（**構成関係式**と呼ばれる）も必要である。

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}\tag{7.3}$$

このようにして、マックスウェル山の山頂を踏破し、電磁気学問題を何でも解決できる武器：マックスウェルの方程式を手に入れたのである。

（コーヒータイム）マックスウェルとキャベンディッシュ

（マックスウェル）

電磁気学を完成させた**マックスウェル**（James Clerk Maxwell、1831- 1879）は、英国エジンバラの大地主の跡取りとして生まれ、ケンブリッジ大学を卒業した。前述のファラデーは貧困層の出で、教育がまったく受けられなかった環境に育ったのとは対照的である。マックスウェルはこのような恵まれた環境の中で、その才能を十分伸ばすことができた。マックスウェルの神童ぶりを表すエピソードは数多くあるが以下はその一つである。１４歳のとき父親に連れられてエジンバラ王立協会の会合に出席した。美術と数学のかかわりについての講演を聴き、そこで提起された問題（卵形曲線の描き方）に、自分ならできると、家に帰ってそのアイデア（多焦点作図法）を論文にまとめた。その論文を父親がエジンバラ大学の教授に紹介したところ、それを見た教授がデカルトの方法を越えていると感心し、大学の紀要に掲載してくれたと言う。「栴檀は双葉より芳し」である。

マックスウェルの偉業は電磁気学を完成させた（それまで知られていたことをまとめ上げただけではなく、足りないものを論理的に補って完成させた）ことにあるが、ここでは、晩年に取り組んだ別の偉業：壮大な発掘作業を紹介する。１００年間人知れず埋もれていたイギリスの**キャベンディッシュ**（Henry Cavendish, 1731-1810）の電気学研究を５年間かけて掘り起こしたのである。キャベンディッシュは大富豪の家に生まれたが、人嫌いな性格から実験室にこもりきってひたすら科学実験を行った。しかしその結果を発表することはほとんど無く、彼の膨大なノート（手稿）の中に眠っていた。一族から先祖が残した未発表の遺稿を預かったマックスウェル（当時、キャベンディッシュ研究所の初代所長）はそのノートを読み解きながら彼の実験を次々と追試していった。そして驚いたことに、電磁気学の初期段階の重要な発見、例えば、クーロンの法則（力の距離２乗に反比例）も、クーロンより１０年以上前に見つけていたのである。生理学的検流形（電流を自分の体に流してその痺れ具合で電流の強さを判定：精度は結構確かだったらしい）を用いたオームの法則も然りである。もし、彼が結果を世に発表していたら、いくつかの法則はキャベンディッシュの法則となっていただろうと言われている。マックスウェルは物理学だけでなく、科学史の領域においても大きな貢献をしたのである。

参考文献：小山啓太、光と電磁気：ファラデーとマックスウェルが考えたこと、ブルーバックス、2016.

７．２　山頂から見える景色 ⑱

電磁現象に関する問題を何でも解決できる武器：マックスウェルの方程式と書いたが、その武器を使いこなすのがまた難しく、電磁波工学（電波工学）という学問に発展している。電波を空間に送り出すアンテナ、種々の複雑媒質中の電波伝搬、高周波機器を構成するマイクロ波回路への応用などである。ここでは、その最も基本となる真空中での平面波の伝搬の式（**波動方程式**）を、マックスウェルの方程式から導き出してみたい。

真空中では、

$$\varepsilon \to \varepsilon_0,\ \ \mu \to \mu_0,\ \rho = 0,\ \ \boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$$

である。このとき、(7.1)式のマックスェルの方程式を、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ だけを用いて表すと以下になる。

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{7.4a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{7.4b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{7.4c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{7.4d}$$

簡単のため、電界の変化が z 方向のみに起きる（＝電磁界が xy 平面状では一定で、それが z 方向に進む、すなわち平面波）として、電界と磁界を以下の式で表す。（この仮定が間違っていれば最終的に解が得られないことによってその間違いに気付くことができる）

$$\boldsymbol{E}(z,t) = E_x(z,t)\boldsymbol{i} + E_y(z,t)\boldsymbol{j} + E_z(z,t)\boldsymbol{k} \tag{7.5a}$$

$$\boldsymbol{H}(z,t) = H_x(z,t)\boldsymbol{i} + H_y(z,t)\boldsymbol{j} + H_z(z,t)\boldsymbol{k} \tag{7.5b}$$

これを(7.4a), (7.4b)式に代入すると、それぞれの成分より、

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t},\quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t},\quad 0 = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t},\quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t},\quad 0 = \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

となり、上記それぞれの行の最後の式より、H_z, E_z は時間変動をしないこと（静電界・静磁界）になるが、ここでは、時間変動する波動を扱っているのであるから、その波動成分に関して言えば

$$E_z = H_z = 0 \tag{7.6}$$

となる。これは、進行方向に成分を持たない波動、すなわち電波は横波であることを意味している。

(7.4a)式の両辺に、回転、すなわち∇×を作用させ、そこに、(7.4b)式を代入して、$\boldsymbol{E}$ のみの式にすると

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E} = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

を得る。上式の左辺はベクトル公式と(7.4c)式より、$-\nabla^2\boldsymbol{E}$ となるので、次式となる。

$$\nabla^2\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{7.7}$$

(7.5a)式で与えた電界が x 方向のみに成分を持つものに着目すると、(7.7)式は

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{7.8}$$

となる。この方程式を**1 次元の波動方程式**という。

上式で与えられる波動方程式の一般解は $f(z)$, $g(z)$を任意の関数として

$$E_x = f(z-ut) + g(z+ut) \quad \left(u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\right) \tag{7.9a}$$

で与えられる。右辺第 1 項は速度 u で z 軸の正方向に進む波、第 2 項は負の方向に進む波である。速度 u は光が進む速度と一致する。

磁界 $\boldsymbol{H}$ も得られた E_x を用いて(7.4b)式より求められ、その結果、y 方向成分のみになる。

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left\{f(z-ut) - g(z+ut)\right\} \tag{7.9b}$$

これにより、真空中を伝搬する電波（電磁波）に関して以下の性質が明らかになった。

1) 電波は電界と磁界で構成される
2) 電波は進行方向に成分を持たない横波である
3) 電波は光の速度で進む
4) 電界と磁界は進行方向と直交する面上にあり、かつ、電界と磁界も直交する

今日、電波も光も同じ電磁波の性質を持つと理解されている。

(7.9)式は、任意波形に対する伝搬を表しているが、正弦波（角周波数ω）の場合には、

$$E_x = E_1 e^{j(\omega t - kz)} + E_2 e^{j(\omega t + kz)} \quad \left(k \equiv \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\right) \tag{7.10a}$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left\{E_1 e^{j(\omega t-kz)} - E_2 e^{j(\omega t+kz)}\right\} \tag{7.10b}$$

となる。ここで、E_1, E_2 は任意の定数である。

図７．１は、本テキストのまとめとして、マックスウェルの方程式が表す電波の発生と電波の伝搬の関係、そして、上式で表される電界と磁界の関係を描いている。

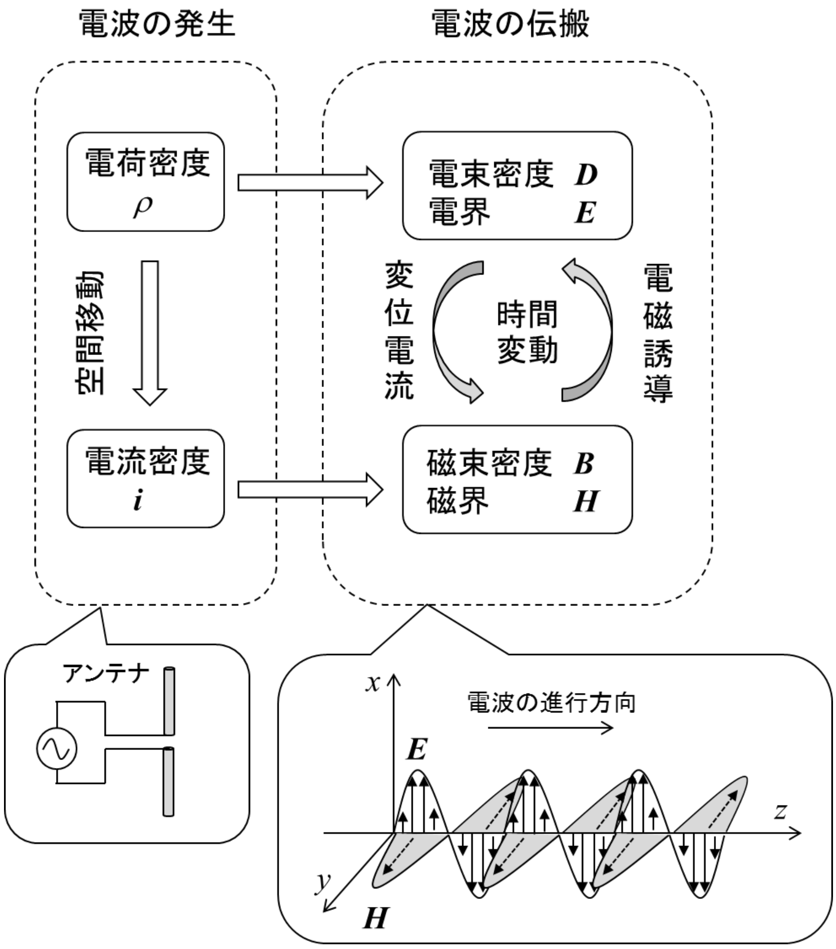


図７．１　マックスウェルの方程式が表す電波の発生と電波の伝搬の関係、および、平面波の電界と磁界の関係

８．電磁気学の奥深さ

本テキストは、マックスウェルの方程式が出来上がるまでをまとめたもので、公開技術レポートの「電磁気学の奥深さ」シリーズの第 11 報になる。それ以前の(1)～(10)は、一通り電磁気学（すなわちマックスウェルの方程式）を学んだ読者を対象にしていた。そして、本レポートを読了した人は、初めて電磁気学に触れた人であったとしても、その仲間に加わったわけである。以下に、シリーズレポートの出だしの部分（あるいはポイント部分）を紹介するので、興味が湧いたら当該レポートを見て電磁気学のイメージを膨らませて欲しい。

１）マックスウェルの方程式の美しい形（シリーズレポート(2)）

マックスウェルの方程式は電界と磁界を主役にした連立方程式であるが、法則を並べただけで雑多な印象（美しさに欠ける印象）を持つ。これに対して、スカラーポテンシャルϕとベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$を主役にしてまとめると、以下の連立方程式で表される。

$$\left(\nabla^2-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{i} \qquad (8.1a)$$

$$\left(\nabla^2-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (8.1b)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \qquad (8.1c)$$

(8.1a)式が電流とベクトルポテンシャル、(8.1b)式が電荷密度とスカラーポテンシャルを関係付ける方程式、(8.1c)式は、両ポテンシャルを関係付ける条件式である。この式の導出にはゲージ変換と言う数学的技法が必要となる。得られた式は対称性に優れ、こちらに本質が現われているように見える。

２）電場と磁場の対応：***E-H*** 対応？***E-B*** 対応？（シリーズレポート(1)）

電気の場（フィールド）を表す物理量に電界 $\boldsymbol{E}$ と電束密度 $\boldsymbol{D}$ があり、磁気の場では磁界 $\boldsymbol{H}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ がある。電気と磁気にはかなりの部分で対称性があり、それらを表す物理量には対応関係がある。用語名を見れば、電界（$\boldsymbol{E}$）と磁界（$\boldsymbol{H}$）、電束密度（$\boldsymbol{D}$）と磁束密度（$\boldsymbol{B}$）であるのだから $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{B}$ が対応していると考えるのが当たり前そう。しかしことはそれほど単純ではない。理由は以下の点にある。

(i) 電気は単極電荷があるのに対して、磁気には単極磁荷がなく、この部分が非対称である
(ii) 電気の研究は摩擦電気から、磁気の研究は永久磁石から始まり、後者の方が歴史が古く、現在の電磁気学が更地に構築されたわけではない（歴史上の事情がある）
(iii) 電磁気学の教科書（あるいは授業）では、電気的な力を電荷と電荷が作用するクーロン力で、磁気的な力を電流と電流が作用する力（アンペアの力）とする説明から入るのが

主流で、電荷が作る場を電界、電流が作る場を磁束密度と呼び、***E*-*B*** 対応で説明されることが多い。

上記の視点から、対応関係を慎重に見るとどちらにも理屈があり、一方だけが正解と言う話にはならない。

３）見え隠れする相対論（シリーズレポート (3), (4), (7), (8)）

アインシュタインの書いた相対性理論の論文（特殊相対性理論、1905 年）の題名は「運動している物体の電気力学（Zur Elektrodynamik bewegter Körper）」である。なぜ電気と相対論が関係しているのだろうか？実は、相対性理論は電磁気学（マックスウェルの方程式）が醸し出す不思議な性質を突き詰める中から生れたと言われている。

一例を言うと磁界が絡む力学である。磁界は電流によって、すなわち動く電荷によって生まれる。観測者が電荷の速度と同じに動けば、そこには電流は流れていないのと等価なので、磁場は見えてこない。そうすると、磁場からの力で動いていた力学のバランスが崩れ、パラドックスに思える。しかし、これは、磁場が見えなくなってその力が無くなれば、電場が生まれて作用し、その力学的バランスは観測系によらないことが示される。相対性理論では、異なる慣性系から見たときの物理現象はローレンツ変換に対して不変であるが、マックスウェルの方程式もローレンツ変換に対して不変が保たれている。故に、相対性理論によって、物理学に革命が起こったときでも、電磁気学はそれを無傷で乗り切れたのである。

４）電線に流れる電流の速さ（シリーズレポート (5)）

電線に電圧をかけて電流を流し、相手にエネルギーを送る仕組みは電気回路の授業で学ぶ。しかし、電気回路で扱うスケールは地球規模に比べて十分小さいので、エネルギーが届く時間についてはあまり気に留めることはなかったと思う。一方、電磁気学において、空間を伝搬する電波の速さは光の速さになること、すなわち、電波も光も同じ電磁波であることを学ぶ。では、電線を流れる電流の速さはどのくらいなのであろう。電流も光の速度に近いという話がある一方で、それを運ぶ電子の移動速度はカタツムリの歩み程度しかないとも言われている。電磁気学的視点からこの疑問に答えるには。