

電磁気学の奥深さ（12）：電磁誘導の法則に学ぶ物理現象のからくり

唐沢 好男

電磁気学の根幹を支える法則の一つに電磁誘導の法則が有り、筆者の技術レポート：YK-039 [1]の中でも詳しく述べている。法則と名がつくとおり、あくまで経験則であってその現象が正しいことを証明できる人は誰もいない。例外がないから法則として成立している、我々はそれが正しいと信じて受け入れているだけである。でも、そこにどのようなからくりがあるかについては、思考を巡らすことによって理解することができる。電磁誘導の法則には、パラドックスに見えるような不思議な振る舞いもある。ここでは、電磁誘導の法則をいろいろな角度からつついて、そのからくりに迫ってみたい。これによって、電磁気学が巧妙に組み立てられた理論であると感じ取ることができると思う。（尚、本稿 1,2,4 節の記述は、[1]の第 5 章の記述とかなり重複している）

1. 電磁誘導の法則

デンマークのエルステッドが電気（電流）の磁気作用を発見したのは 1820 年であった。その後、多くの研究者によって磁石から電気を生み出す試みがなされたがうまく行かず、ついに、その扉を開いたのはイギリスのファラデー、1831 年であった。図 1 のように、磁石のそばでコイルを動かす、あるいは、コイルのそばで磁石を動かすときだけ検流形が振れるのに気付いたのである。ファラデーの発見によるこの現象は**電磁誘導**と呼ばれる。その後、ドイツのレンツにより、コイルに発生する起電力の向きに関するレンツの法則、すなわち、「電磁誘導によって生じる電流（**誘導電流**）の向きは、変化する磁力線の密度の変化を妨げる方向になる」を発見した（1834 年）。さらに、イタリアのノイマンは、図 1 に示すループに生じる起電力（**誘導起電力**） V とループを貫く磁束 Φ_m の関係を、以下の式で示した。

$$V = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (1)$$

符号が負となるのは、レンツの法則による磁界の変化を妨げる方向に電圧が発生することを意味している。

後にファラデーは、導線の有る無しにかかわらず、磁界の変化時には空間に電界の渦ができていて、導線に起電力が発生するのは、導線がその渦電界の作用を受けるためという解釈を示した。そのため、(1)式を含んで磁気による電気現象全体を、**ファラデーの電磁誘導の法則**、あるいは、**電磁誘導の法則**という。

閉路を c 、その経路上の微小距離を $d\mathbf{l}$ 、経路上の電界を \mathbf{E} とすると、(1)式の左辺を書き換えて以下のように変形できる。

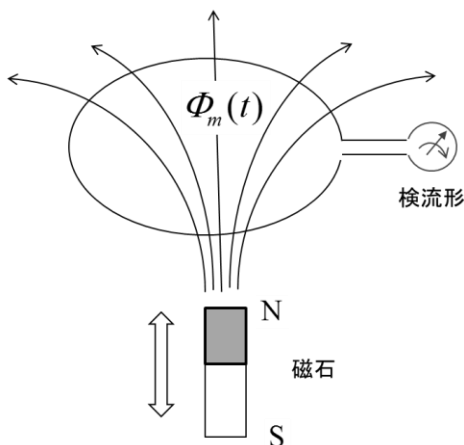


図1 電磁誘導

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \tag{2}$$

さらに、閉路 c を縁とする任意の面 S 上の磁束密度を \mathbf{B} とすると、面 S を貫く磁束（差交磁束） Φ_m は、磁束密度の面積分（面の単位法線ベクトル \mathbf{n} ）であるため、(2)式は以下に変形できる。

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \tag{3}$$

(3)式をストークスの定理を用いて、微分形に書き換えると以下の式になる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4}$$

式(1)~(4)はどれも電磁誘導の法則を表す方程式であり、同じ現象を違う言葉で表している。電磁誘導の原因から結果までを通して整理すると、

『(i) 磁束密度（磁界）が時間的に変化する→(ii) その場所に電界の回転（ $\nabla \times \mathbf{E}$ ）で表される場が生まれる（向きは磁界の変化を防ぐ方向）→(iii) その周囲に渦状の電界 \mathbf{E} ができる→(iv) 電界中にある導線に起電力 V が発生する』

となるであろう。これは一つの解釈であって、別の見方もあることは4節で示す。なお、[2]の1.2節（ストークスの定理の項）でも述べたとおり、電界の回転（ $\nabla \times \mathbf{E}$ ）は、その周囲に渦状の電界（ \mathbf{E} ）を生み出す種であって、電界の回転と渦状の電界は、物理量としての性質も存在する場所も違うものであると言う認識を持って欲しい。

2 導線は何を感じるか

電磁誘導の典型的な応用問題に以下の例題がある。

【例題】 図2に示すように、磁束密度 \mathbf{B} の一様な磁場がある。この中に、抵抗 R で結ばれた平行導線があり、この上を導線が接触したまま一定速度で動く。それぞれの辺を図のように a, b, c, d としたとき、 $abcd$ は矩形の閉回路を作る。辺 b, d の長さを l 、 a, c の長さを x 、 d の速度を v とする。このとき閉ループに流れる電流 I を求めよ。

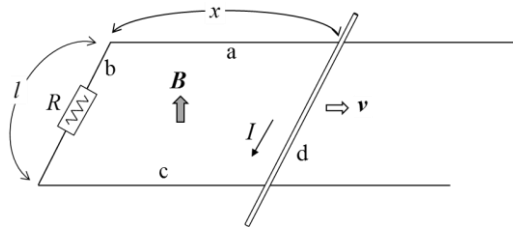


図2

これには解法が二つある。

【解法1】 電磁誘導の法則により、回路に発生する起電力 V は

$$V = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Blv$$

電流 I は、オームの法則より Blv/R 、向きは図の矢印方向（磁束密度の増加を防ぐ方向） ■

【解法2】 4つの辺のうち、電磁現象が起きそうなのはどれかを探す。辺 a, b, c は磁束密度も導線の位置も時間的に変化無く、何も起こりそうにない。一方、辺 d は磁束密度中を動いているので、何かあるとしたらここである。辺 d は導線なので、この中には、電荷が存在する（正負等電荷量だが、動くことができるのは負電荷を持つ電子の方）。この電荷密度を λ [C/m] とする。辺 d の導体棒に存在する荷電粒子（電荷）は磁界中の移動になり、ローレンツ力を受ける。長さ l にある電荷全体が受ける力 \mathbf{F} は

$$\mathbf{F} = \lambda l \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

であり、向きは導線の方向になる。一方、荷電粒子に加わる力はクーロンの法則の帰結 ($\mathbf{F}=q\mathbf{E}$) から、電界があるところにおいて

$$\mathbf{F} = \lambda l \mathbf{E}$$

であるので、

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

で与えられる電界が導線 d にかかっていることと等価になり、発生する起電力 $V=El=Blv$ 、電流 $I=Blv/R$ となって、解法 1 と同じになる。 ■

解法 2 から言えることは、閉路に起きることは閉路を構成する導線のところにその現象を引き起こす場が存在し、その作用によって導線に起電力が生まれるということである。近接作用の考え方からは、導線に起きることは、導線の場所に何かが無ければ起きないのだから、解法 2 はその精神に合致している。しかし、4 節で述べるように、解法 1 はすべてのケースに通用できるが、解法 2 はその適用が限定的である。

3. 静磁場の中の導線が感じること（電界と磁界は見方によって変幻自在）

解法 2 をもう少し見てみよう。図 3 に示すように、磁束密度 \mathbf{B} (y 軸方向成分: B_y) の一様な静磁界の中に長さ l の導線が z 軸方向に置かれていて、 x 軸方向に速度 v で動いている。この導線には、ローレンツ力によって $V=Blv$ の起電力が発生していることを前節の解法 2 で述べた。では、この現場を、導線と同じ速度で動く観測者（視点が図 3 の K' 系で動く）にはどう見えるであろうか？観測者には、静磁界中に動かない導線が置かれているだけであるから、すなわち $v=0$ であるから、起電力は 0 のはずである。同じ物理現象が、見る人の動きによって異なるのは不合理である。ではこれはパラドックスなのだろうか？この問題の答えとして、電磁気学は以下のことを教えてくれる。

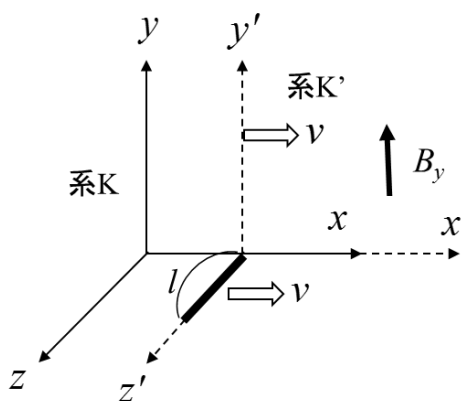


図 3 一様磁界の中を一定速度で動く導線の起電力を異なる慣性系で見る（系 K : 静止系；系 K' : 移動系（観測系））

電界と磁界（注 1）は、それぞれが独立な物理量として空間にあるのではなく、異なる慣性系（＝一定速度で動く系）においては、同じ電磁界が、変幻自在に移り変わるのである。ある観測者には電界だけしか見えないものが、別の観測者には電界と磁界の両方が見

えると言ったようにである。ではどう移り変わるか、それは、異なる慣性系間においてローレンツ変換に従う、という規範（原理）である。ローレンツ変換と聞くと、アインシュタインの相対性理論を思い浮かべると思うが、そう、それである。ニュートン力学の規範であるガリレイ変換でなく、ローレンツ変換なのである。電磁界のローレンツ変換については[3]にまとめているので、導出等はそれを見て欲しいが、結果のみ示すと以下である。静止系 K に磁束密度 B_y があるとすると、図3に示した移動系 K' では

$$E_z' = \gamma v B_y, \quad B_y' = \gamma B_y$$

となり、静止系では見えていなかった電界の z' 軸方向成分 E_z' が見えてきたことになる。式中の γ はローレンツ因子と呼ばれ次式で与えられる。

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

ここで、 c は光速である。ここで考えている移動速度 v は光速に比べて十分遅く $v \ll c$ であるので、 $\gamma \approx 1$ であり、

$$E_z' \approx v B_y, \quad B_y' \approx B_y$$

である。導体棒には電界 E_z' が作用して起電力 $v B_y$ が生まれ、慣性系 K と K' での起電力に関するパラドックスが解消されたことになる。また、解法2の結果とも一致している。

このように、電磁気学理論を構成するマックスウェルの方程式（式(4)を含む）は慣性系に対してローレンツ変換の下で不変であり、後の時代に吹き荒れた相対性理論による力学の大変革を無傷で乗り越えることができたのである。

[注1：電磁気学では、磁界と磁束密度はそれぞれに定義があり別の物理量であるが、磁氣的性質の強さと言う意味では共通である。本レポートでは、この広い意味で磁界と言う言葉を使い、磁束密度も含んでいる。]

4. 電磁誘導は電界も磁界もないところにも起きる(解法2の限界)

電磁気学の授業では、図4に示す無限ソレノイド（単位長さ当たりの巻数： n ）の内外の磁界を求める問題を扱う。これはアンペアの周回積分の法則をつかって意外に簡単に解けて以下の性質が知られている。

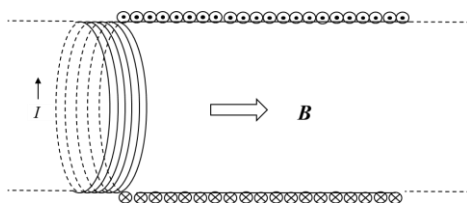


図4 無限ソレノイド（電流 I が流れる無限に長い螺旋コイル状の筒）

- 1) ソレノイドの内部では軸方向に一樣な磁界ができ、磁束密度 B の大きさは $B = \mu_0 n I$ (μ_0 : 真空の透磁率、 I : 外周コイルの電流) である。
- 2) ソレノイドの外側は、磁界は 0 である。
- 3) ソレノイドの内外において電界は 0 である。（電流は電子（負の電荷）の動きで作られるが、それと同量の静止した正の電荷で電気的には中和している）。

1) から、ソレノイド内には一樣の磁界が、2)、3) からソレノイドの外側は電界も磁界もない空間になる。電界も磁界もないということは電磁気現象に寄与するものは何もないといってよいのであろうか。

断面積 S_0 の無限ソレノイドを図5に示すように紙面に垂直に置く。その外側に半径 r の円形ループ（閉路 c ）があり、これに誘起される電圧を考える。ソレノイドの電流を時間的に変化させれば、ソレノイド内の磁束密度 B も時間的に変化する。その影響もソレノイドの外側には現れないはずである。

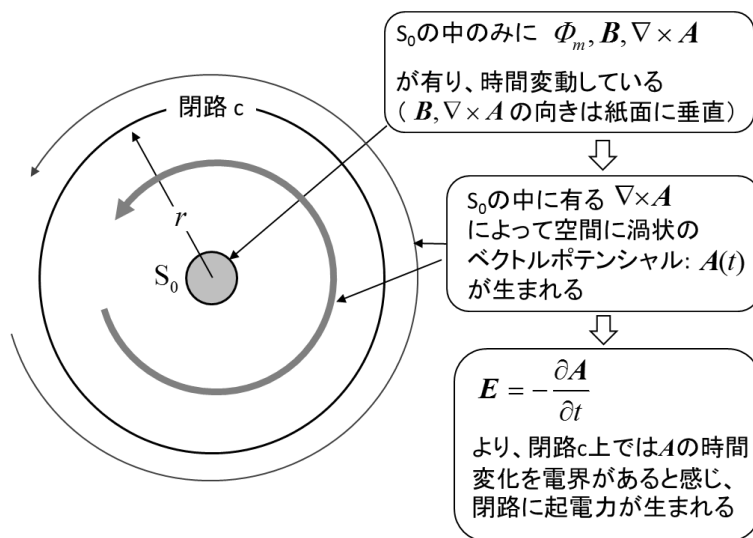


図5 断面積 S_0 の無限ソレノイドを紙面に垂直に置いた図（ソレノイド内の磁束が時間と共に変化する）

電磁誘導の法則（すなわち解法1）により、閉路 c に発生する起電力は $V = -2\pi r(d\Phi_m/dt)$ と直ちに求められる。一方、導線のある場所には磁界が存在せず、かつ導線に動きもないのだから、解法2で用いたローレンツ力を使っての起電力算出はできない。でも、導線に起きることは、導線の場所に何かが無ければ起きないのだから、その何かを探してみたい。まさに、近接作用の考え方である。ソレノイドの外側には電界も磁界もないが、では、電磁気的場は本当に何もないのであろうか？電磁気学で学んだベクトルポテンシャル \mathbf{A} を思い出して欲しい（[4]では4.2節）。 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ の定義式と電磁誘導の法則の式(4)より

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A})$$

であるので、電界 \mathbf{E} とベクトルポテンシャル \mathbf{A} には以下の関係が有る。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

上式の右辺第1項は微分方程式から出る積分定数であり、静電界の話であって、ここでの議論には関係しないので、第2項のみに着目し、

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{5}$$

である。 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ という定義式で導入されたベクトルポテンシャルが、物理量として本当に存在するのかという疑いを受けてきたが、結論として、存在するものと認められている【コラム参照】。磁束と磁束密度の関係、及び、ベクトルポテンシャルの定義より

$$\Phi_m = \int_{S_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_0} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

であり、磁束の存在は、周囲に渦状のベクトルポテンシャルの場を作り、これは磁束密度 \mathbf{B} が無いところ（図5では S_0 の外側）にも存在する。その時間変化は、

$$\frac{d}{dt} \Phi_m(t) = \oint_c \frac{\partial \mathbf{A}(t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}$$

であるので、ループ内の磁束変化は、周囲に時間変化するベクトルポテンシャルを作ることになる。そこに置かれた導線は、(5)式より、ベクトルポテンシャルの時間変化を電界と感じ、

$$\oint_c \frac{\partial \mathbf{A}(t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r \frac{dA_\phi}{dt} = -2\pi r E_\phi \rightarrow -V$$

の起電力を生み出すのである。導線の場所にはベクトルポテンシャルがあり、それが時間的に変化するときの導関数が電界に見えると言うメカニズムによって、現場の問題が現場で解決された（注2）ことになる。[注2：「現場の問題を現場で解決」と言う言い回しは[5]の中で良く使われている。]

本稿 1 節の最後で整理したことを、ベクトルポテンシャルの働きとして見直せば、電磁誘導のからくりは以下のものであるとも言える（図 5 の右側枠内の説明書き参照）。

『(i)磁束がある空間全体（磁束がないところも含めて）にはベクトルポテンシャル \mathbf{A} がある。ゆえに、閉路(c)の回りもベクトルポテンシャル \mathbf{A} の場がある。→(ii) 磁束が時間的に変化するとベクトルポテンシャルも変化する。→(iii) ベクトルポテンシャルの時間微分値は電界の働きをする（等価電界）→(iv) 等価電界中にある導線に起電力 V が発生する』。

【コラム：ベクトルポテンシャルって実在するの？】

無限ソレノイドの例で示したように磁界（磁束密度）がないところにもベクトルポテンシャルが存在するケースがある。そこでは、磁束密度 \mathbf{B} ($=\nabla\times\mathbf{A}$) がいないのにベクトルポテンシャル \mathbf{A} だけはある、ということになる。電界も磁界もない場においては、電磁気現象は何も起こらないはずである。それでは、ベクトルポテンシャルは、単なる数学のお遊びであって、物理的に存在するのだろうかと言う疑問が湧いてくる。これに答え（＝存在すると言う）を与えてくれたのが量子力学である。

量子力学の世界に、Y. Aharonov と D. J. Bohm が 1959 年、その存在を指摘したアハラノフ・ボーム効果（AB 効果）というのがある。詳しくは、解説記事[6]を見て欲しいが、一言で言うと、ベクトルポテンシャルがある場では、電子を P 点から Q 点に移動させるとその位相変化（電子波の位相：量子力学的な物理量）が経路に依存する、と言うものである。これを確認する実験は大変難しくなかなかできなかったが、日立製作所の外村彰博士が、1986 年、電子線ホログラフィーの手法を用いて、その存在を実証した（漏れの無い磁場を作ることの難しさ等の苦労話が[6]に）。これによって、ベクトルポテンシャルが単なる数学上の表現ではなく、実在する物理量であることが明らかになったのである。

5. 誘導起電力を測る（ここにもある不思議）

電磁誘導を学ぶ過程において、以下のような疑問が湧いたことはないであろうか？図 6 に示すように、時間に比例して磁界が強くなっている場があり、ここに抵抗体で構成される円形ループが置かれている。ループを貫く磁束を $\Phi_m(t) = \Phi_{m0} + \Delta\Phi_m t$ とすると、ループには $V = -\Delta\Phi_m$ の起電力が発生し、ループ一周分の抵抗を R とすると $I = -\Delta\Phi_m/R$ の電流が流れる。このループの任意の場所 P と Q 間の電位差 V_{PQ} を電圧計で計ったらどういう値を示すであろうか？と言う問である。

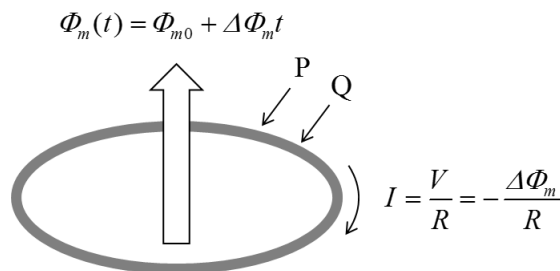


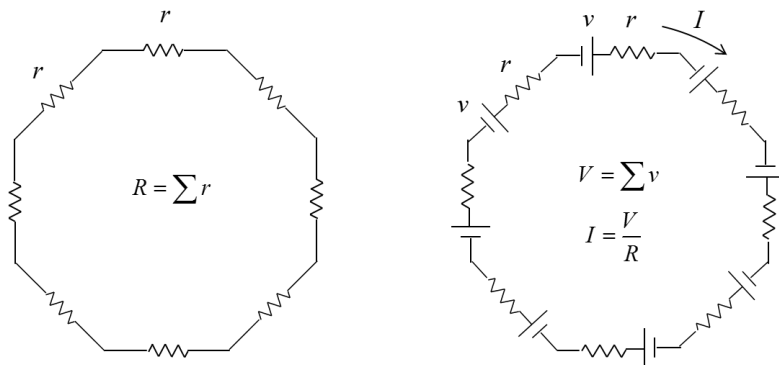
図6 磁界の時間変化によって発生する誘導起電力と抵抗体ループに流れる電流 (PQ間の電位差は?)

電気回路的に考えると、抵抗体に電流が流れているのだからその部分で $I\Delta R$ (ΔR は PQ 間の抵抗) 電圧降下するわけだから $|V_{PQ}| = I\Delta R$ と予想される。しかしこの答えはすぐ破綻していると気がつくであろう。PQ の間隔を広げて行くとやがて反対方向に回って Q が P 点に届いたとき、電圧計は IR なのか 0 なのかと。あるいは、 V_{PQ} を時計方向に測るのか、反時計方向に測るのかで値が違うぞと。このパラドックスはどう考えればよいのだろう。

これに対しては以下の説明でよいのだろうと考える。

図7の抵抗でつながれた輪を考える。説明の分かりやすさから8角形の絵にしているが、実際は無限大多角形、すなわち円である。同図(a)は誘導起電力がない場合、電流は流れていない。 $\sum r = R$ である。同図(b)は電磁誘導によって誘導起電力がループ内に一様に発生した状態を示す。 $\sum v = V$ である。これによって電流は $I = V/R$ 流れる。同図(b)を見ると、各部分部分で、誘導起電力 v と抵抗 r による電圧降下がペアになって打ち消し、PQ間の電位差は、P, Q をどのようにとっても $V_{PQ} = 0$ になる。これが答えである。

一方、図2のケースを見ると、動いている棒の任意の2点間には棒の長さに比例する電位差があり、両端 (a, c の交点間) では求めた V になる。動く棒以外の導線部分の任意の2点間では電位差は 0 である。これなら矛盾はない。



(a) 磁界の時間変化がない場合 (b) 電磁誘導による生まれた誘導起電力

図7 円形ループに対する電磁誘導の等価回路 (8角形の例で)

このレポートを書いている時点で、筆者には、まだ、うまく説明できないことがある。数学の等式では、 $X=Y$ であれば、 X は Y であり、 Y は X であるということである、二つは対等である。式(3)より、電磁誘導では、 X : 空間に電界の渦がある、 Y : 磁束密度 (磁界)の時間変化がある、に対応する。図7 (b)のケースでは、 $Y \rightarrow X$ でそれがうまくいっている。 $X \rightarrow Y$ ではどうか? 図7 (b)の構成では、せっかく作った起電力のループを抵抗が消費してしまっ、全体としてみれば、電界の渦は発生していない。故に、このループでできることは磁束密度一定の場を作るのみである。時間的に磁界が変化する場を作りたかったら図7 (b)の起電力 v を徐々に上げてゆけば、電流が増えて行き、結果として磁界も強くなって行き Y の状態ができる。でも、これでは、 $X \rightarrow Y$ になっていない。なぜなら、起電力の変化は抵抗によって吸収されてしまい、結果として v 一定の場合と変わらず、電界の渦 (X の状態) ができていないからである。でも磁界は変化して Y の状態は作り上げられているのであるから、この構成の中のどこかに X の要素があるはずである。どこにあるのだろうか?

6. むすび：等式と因果律

教員として電磁気学を学生に教えるとき、不可思議でパラドックスの様相を示す場面に出会うとき、立ち往生しそうになる。そういう場面を電磁誘導の法則を題材に取り上げてみた。

法則は経験則であって、その正しさが数学的に証明されているわけではなく、これまでに例外がないからそれを受け入れているだけである。なぜそうなるか (why の問) に答えられる人はいない。(ファラデーだって、マックスウェルだって、アインシュタインだって、・・・、神様以外は)。これを武器に、我々教員は「それは自然の摂理 (物理) であり、無条件で受け入れなさい」と、学生からの why の質問を封じ込めることができる。一方、その仕組みの関連性 (からくり) やそこから演繹される動作に関する問 (how の問) については、教える立場上、知らないでは済まされない。そういう視点からこのレポートをまとめてみた。

電磁誘導の法則の本質は(4)式で表される関係で、それが全てである。式 (1)~(3)はその変形であり同じものである。我々人間は、結果に対する原因を求めたい性があり、因果関係に拘る。等号で結ばれた式があった場合、例えば、右辺で表される現象が左辺の現象を生み出すというような因果関係で捉えようとするが、数学的には、右辺と左辺は等しい (= 同じものである) と言っているだけである。故に、1節と4節のそれぞれの最後にまとめた因果関係は、こう解釈できると言うだけのことである。電磁誘導の法則は、その発見の経緯からも、また、電界が渦を巻く空間を磁界の変化以外で作りにくいことから、原因 (磁界の時間変化) から結果 (電界の渦ができる) への一方通行で説明されることが多いが、あくまで、この二つは同じ現象 (= どちらも原因になりえる) と理解すべきであると思う。

参考文献

- [1] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ (1 1) : マックスウェルの方程式ができるまで (その3),” 技術レポート (私報), YK-039, Dec. 20, 2019. http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-039_EM-11-3.pdf
- [2] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ (1 1) : マックスウェルの方程式ができるまで (その1),” 技術レポート (私報), YK-037, Dec. 10, 2019. http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-037_EM-11-1.pdf
- [3] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ (4) : マックスウェル方程式のローレンツ変換,” 技術レポート (私報), YK-026, July 10, 2019. http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-026_EM-4.pdf
- [4] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ (1 1) : マックスウェルの方程式ができるまで (その2),” 技術レポート (私報), YK-038, Dec. 13, 2019. http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-038_EM-11-2.pdf
- [5] 江沢洋, 上條隆志 (編), *相対論と電磁場*, 日曜評論者, 2019.
- [6] 外村彰, “電子波で見る電磁界分布 (ベクトルポテンシャルを感じる電子波),” <https://www.ieice.org/jpn/books/kaishikiji/200012/20001201-1.html>

読者の皆さんへ

このレポートには続編 ([TR-YK-060: 同タイトル \(続\)](#)) があります

さらに、TR-YK-045 と TR-YK-060 をまとめて整理した資料を
下記に公開しています。

Open Access Book: 電磁気学のからくり : [第5章 近接作用で見る電磁誘導の法則](#)