

## 電磁気学の奥深さ（15）：動く電荷が作る電磁界

静止した電荷は電束の源（湧き出し）となって、その周囲に放射状の電界を作る。では、これが一定速度で動いている場合には、周囲にどのような電磁界を作るのか、この問題を考えてみたい。本内容は江沢洋らの科学啓蒙書[1]（「相対論と電磁場」の14章）に取り上げられ、定量的な解説がなされているが、それを筆者流に読み解いた形でまとめなおしたものである。江沢等の言葉を借りれば、「動く電気力線は磁場を生む」である。

### 【問題設定】

図1に示すように、電荷  $q$  が  $x$  軸方向に一定速度  $v$  で動いている。このとき、空間にできる電磁界はどうなっているのだろうか。電荷の速度が光の速度に近づくとどうなるのだろうか。この問題を通して電界と磁界の関係を考えてみたい。

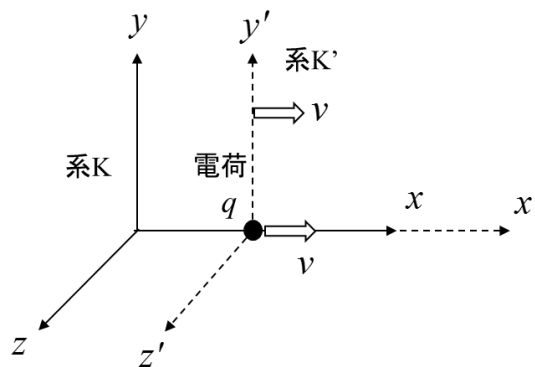


図1 速度  $v$  で動く電荷と座標系（系  $K$ : 静止系；系  $K'$ : 移動系（電荷と共に動く））

### 1. 静止系（ $K$ 系）でみるマクスウェルの方程式

この問題を定式化するために二つの座標系：電磁界を求めたい座標系（静止系  $K$ ）と電荷と共に動く人が見る座標系（移動系  $K'$ ）で考える。まず、 $K$ 系で、この現象をマクスウェルの方程式で表すと以下となる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 q \mathbf{v} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) \quad (1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1d)$$

ここで、 $\delta$  はディラックのデルタ関数である。

求めたい電磁界はこの方程式を解けばよいのであるが、直接に解くのは難しそうに見える。そこで、電荷と共に動く  $K'$ 系に置き換えて解くことを考える。なぜなら  $K'$ 系では磁界（磁束密度）が 0 となって、解きやすいであろうと考えるからである。

## 2. 電荷と共に動く系 ( $K'$ 系) でみるマクスウェルの方程式と電磁界

動きが伴う電磁現象には相対論効果が現れるため、慣性系  $K$  と  $K'$ の座標変換はローレンツ変換による。ローレンツ変換については、本シリーズの技術レポート[2] にまとめている。この問題に必要な変換は下記の 3 式である。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v/c^2 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \\ \frac{\partial}{\partial t'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma v/c^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma v & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \\ B'_x \\ B'_y \\ B'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & \gamma v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma v/c^2 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma v/c^2 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \quad (4)$$

ここで、 $\gamma$  はローレンツ因子と呼ばれ、次式で与えられる。

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \geq 1 \quad (5)$$

上式を用いて、 $K$  系のマクスウェルの方程式を  $K'$ 系に座標変換し、 $K'$ 系でのマクスウェ

ルの方程式を作ってみよう。この手順は(2)~(4)式に従って、(1)式を根気よく変換して行けばよく、結果として次式にたどり着く。

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} \tag{6a}$$

$$\nabla' \times \mathbf{B}' = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} \tag{6b}$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{E}' = \frac{q}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{x}') \tag{6c}$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{B}' = 0 \tag{6d}$$

文献[1]にはこの導出が詳しく示されている。しかし、本レポートではこの部分の説明は省略したい。なぜなら、よくよく考えれば、 $\mathbf{K}'$ 系でのマクスウェルの方程式は電荷が  $x'=0$  に止まっていて、かつ、電荷量  $q$  はローレンツ変換に対して不変 (=電荷保存の法則) であるのだから、いきなり(6)式からスタートしても良いと考えるからである。 $\mathbf{K}$ 系から  $\mathbf{K}'$ 系への(1)式から(6)式への変換はその出発点の妥当性を確かめただけと言えるからである。

さらに、 $\mathbf{K}'$ 系では電荷は止まっているので、電磁界に時間変化は無く時間微分項は全て0になるので、電磁界は、電磁気学の教科書が教えてくれるように(すなわち電界に関するガウスの法則により)、以下のように整理できる。

$$\mathbf{E}' = \frac{q\mathbf{r}'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \tag{7a}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{0} \tag{7b}$$

### 3. 静止系 ( $\mathbf{K}$ 系) における電磁界

$\mathbf{K}'$ 系で得られた電磁界を  $\mathbf{K}$ 系に変換するには、式(2)~(4)の変換の逆変換をすればよいのであるが、その変換式は、同式両辺のベクトルで表されている量を入れ替え、かつ、行列要素の中の  $v$  を  $-v$  にすればよい[2] ( $\mathbf{K}'$ 系を静止系と見れば、 $\mathbf{K}$ 系が  $x$  軸の負方向に速度  $v$  で動いているのと等価であるので)。すなわち、電磁界の座標変換式は以下である。

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & \gamma v \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & -\gamma v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma v/c^2 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \gamma v/c^2 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \\ B'_x \\ B'_y \\ B'_z \end{pmatrix} \tag{8}$$

式(7)を(8)に代入すると

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'_x \\ \gamma E'_y \\ \gamma E'_z \\ 0 \\ -(\gamma v / c^2) E'_z \\ (\gamma v / c^2) E'_y \end{pmatrix} \quad (9)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} E'_x &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(x-vt)}{(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E'_y &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y}{(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

などにより、(9)式を整理してまとめると

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0 (\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x-vt \\ \gamma y \\ \gamma z \\ 0 \\ -(\gamma v / c^2) z \\ (\gamma v / c^2) y \end{pmatrix} \quad (10)$$

となり、これが求めたかった答えである。電界と磁束密度の関係は次式である。

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{v}{c^2} \begin{pmatrix} 0 \\ -E_z \\ E_y \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad (11)$$

#### 4. 速度と共に変わる電界と磁界

式(10)により求める解が得られたので、電磁界が速度と共にどう変わるかを見てみたい。電磁界は電荷を中心とする一定の範囲に集中して存在し、この形を保ったまま電荷と共に  $x$  軸方向に動いてゆくの、 $t=0$  すなわち、電荷が  $x=0$  を通過した瞬間を調べてゆきたい。この時、電磁界は

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0 (\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ \gamma y \\ \gamma z \\ 0 \\ -(\gamma v / c^2) z \\ (\gamma v / c^2) y \end{pmatrix} \quad (@ t=0) \quad (12a)$$

である。これでもまだイメージがわきにくいので、 $x=0$  面 ( $yz$  面@ $x=0$ ) と  $z=0$  面 ( $xy$  面@ $z=0$ ) での電磁界分布を図2に示す。式で表すと以下である。

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{\gamma^2 q}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \\ 0 \\ -(v / c^2) z \\ (v / c^2) y \end{pmatrix} \quad (@ t=0, x=0) \quad (12b)$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0 (\gamma^2 x^2 + y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ \gamma y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\gamma v / c^2) y \end{pmatrix} \quad (@ t=0, z=0) \quad (12c)$$

単一電荷であるから、電荷に近いほど電界の強度は大きくなる、すなわち、 $v=0$  の場合は等高線が球面で、大きさは距離の2乗に反比例し、 $0 < v < c$  では  $x$  軸方向に扁平な楕円球面になる。

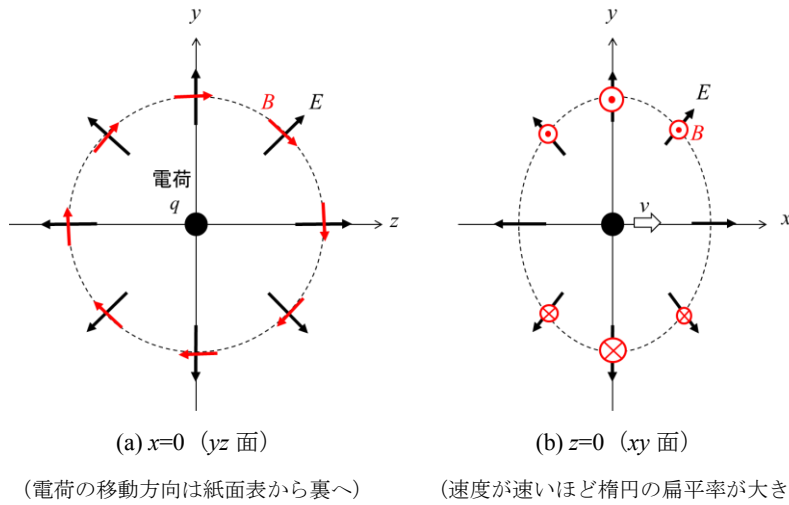


図2 動く電荷が作る  $t=0$  における電磁界 ( $0 < v < c$ ) (点線は電界強度の等高線をイメージ)

以上より、電荷が静止している状態 ( $v=0$ ) では、径方向に球面状に広がる電界成分のみであったものが、動くことにより、動く方向に扁平な楕円球面状に広がる形に変わる（扁平度はローレンツ因子で決まる）。それに伴い、静止状態では存在しなかった磁界（磁束密度）が  $yz$  面上に渦状に現れてくる。動く電束（あるいは電界）が磁界を生み出す様が理解できる。磁界は電界の相対論的効果とも言えよう。

本資料での設定では電荷が動くとしたが、相対的な意味で、静止している電荷の近くを動く観測者が感じる電磁界でもある。

ではこの速度が光速 ( $v=c$ ) になったらどうなるであろうか。式(5)よりローレンツ因子  $\gamma$  が無限大になるから楕円球の短軸が 0 になり、電磁界は  $yz$  平面の中に閉じ込められる（電界および磁束密度の等高線は円）。この時、 $E_y$  と  $B_z$  の比を見ると、(11)式より

$$\frac{E_y}{B_z} = c \rightarrow \frac{E_y}{H_z} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \equiv Z_0 \quad (@ v = c) \quad (13)$$

となり、電界と磁界 ( $H$ ) の比に換算すると、自由空間のインピーダンス  $Z_0 (=377\Omega)$  に等しくなっている。本来は波動方程式の解から得られる電磁波の空間インピーダンスが、このような道筋からも現れてくるのが興味深い。

本資料では単一電荷が動く場合を対象とした。この電荷が連続的に  $x$  軸上に数珠つなぎに存在し、かつ、これが光速で動いている場合を想像してみよう。これはすなわち導線を通る電流である（ただし、導線を通る電荷の速度は等価的な意味であって、実際に電荷を運ぶ電子がこの速度で導線内を動いているわけではない（この解説は[3]に））。技術レポート[3]にまとめている通り、導線を通る電流は  $VI$ （電圧×電流）の電力を運ぶが、周囲の電磁界（電界と磁界できるポインティングベクトル  $\mathbf{E} \times \mathbf{B} / \mu_0$ ）が運んでいると考えてもよい。

さらに、上記の数珠つなぎの電荷においてその強度を  $x$  軸方向に周期的に変化させ、かつそれを光速で動かせば、その周囲の微小領域には  $x$  軸方向に進む平面波（周波数は空間長周期で決まる）があるように見えるのではないだろうか。平面波は遠方のアンテナから放射された電波と理解するのが普通であるが、このように、想像をたくましくしていろいろなことを考えてみると面白いだろう。電磁現象には不思議なこと（＝好奇心が湧くこと）が多いが、それらもお釈迦様の手のひらのうち、いや、マクスウェルの方程式のうちのことではあるのだけれど。

#### 参考文献

- [1] 江沢洋, 上條隆志 (編), *相対論と電磁場*, 江沢洋選集 II, 日本評論社, 2019.
- [2] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ (4) : マクスウェル方程式のローレンツ変換,” 技術報告 (私報), TR-YK-026, 2019.07. [http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-026\\_EM-4.pdf](http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-026_EM-4.pdf)
- [3] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ (5) : 電線に流れる電流は光の速さで進む?” 技術報告 (私報), TR-YK-027, 2019.07. [http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-027\\_EM-5.pdf](http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-027_EM-5.pdf)