

電磁気学の奥深さ（16）：電磁誘導の法則に学ぶ物理現象のからくり（続）

唐沢 好男

電磁気学の根幹を支える法則の一つに電磁誘導の法則が有り、筆者の技術レポート：YK-045 [1]（以下、前レポートと呼ぶ）の中で、そのからくりについて詳しく述べている。そこでは、起電力が発生するループ上の導線に直接作用する電磁界を探ったが、まだ、掘り下げが十分ではなかったと感じている。

本レポートでは、前レポートで行った議論の整理を行うと共に、導線ループに起電力を生み出す電磁誘導の現象を徹底した近接作用の考え方で見直してみた。近接作用の考え方とは、何が導線に直接作用しているかと言う目で見ることである。そしてその結果として、磁場がある空間に生まれているベクトルポテンシャルに着目するのが本質的ではないかという結論を得た。

1. 近接作用で見る電磁誘導の法則

議論の始めに、クーロン力を例に、**近接作用**の考え方をおさらいしたい。距離が離れた位置に二つの電荷 Q と q がある。一方の電荷 q に着目すると、電荷 q は Q 方向に力 F を受ける（クーロン力：電荷の極性が同じ場合は反発力、異なる場合は引力）。このとき、電荷 q に Q が直接に力を及ぼしている（すなわち、引っ張っている、あるいは押し返している）と見るのが**遠隔作用**の考え方である。それに対して、電荷 Q が周囲に電氣的な歪をもつ場（すなわち電界 E ）をつくり、電荷 q の置かれている場所にもその場が広がっていると考える。電荷 q はその場所にできている電界 E の作用で $F=qE$ の力を受ける、と考えるのが近接作用の考え方である。現場に起きることは原因も現場にある、ということである。

1831年、磁石のそばでコイルを動かす、あるいは、コイルのそばで磁石を動かすときだけ検流形が振れる現象をイギリスのファラデーが発見した（アメリカのヘンリーもほとんど同時に発見している）。この現象は**電磁誘導**と呼ばれる。その後、ドイツのレンツにより、コイルに発生する起電力の向きに関するレンツの法則、すなわち、「電磁誘導によって生じる電流（誘導電流）の向きは、変化する磁力線の密度の変化を妨げる方向になる」を発見した（1834年）。さらに、イタリアのノイマンは、ループに生じる起電力（**誘導起電力**） V とループを貫く磁束 Φ_m の関係を、以下の式で示した。

$$V = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (1)$$

符号が負となるのは、レンツの法則による磁界の変化を妨げる方向に電圧が発生すること

を意味している。後にファラデーは、導線の有る無しにかかわらず、磁界の変化時には空間に電界の渦ができていて、導線に起電力が発生するのは、導線がその渦電界の作用を受けるためという解釈を示した。そのため、(1)式を含んで磁気による電気現象全体を、ファラデーの電磁誘導の法則、あるいは、電磁誘導の法則という。

閉路を c 、その経路上の微小距離を $d\mathbf{l}$ 、経路上の電界を \mathbf{E} とすると、(1)式の左辺を書き換えて以下のように変形できる。

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (2)$$

さらに、閉路 c を縁とする任意の面 S 上の磁束密度を \mathbf{B} とすると、面 S を貫く磁束（鎖交磁束） Φ_m は、磁束密度の面積分（面の単位法線ベクトル \mathbf{n} ）であるため、(2)式は以下に変形できる。

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3)$$

(3)式の左辺をストークスの定理を用いて面積分に変換し、書き換えると以下の式になる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4)$$

式(1)~(4)はどれも電磁誘導の法則を表す方程式であり、同じ現象を違う言葉で表している。電磁誘導の原因から結果までを通して整理すると、

- ① 磁束密度（磁界）が時間的に変化する
- ② その場所に電界の回転（ $\nabla \times \mathbf{E}$ ）で表される場が生まれる
（向きは磁界の変化を防ぐ方向）
- ③ その周囲に渦状の電界 \mathbf{E} ができる（脚注）
- ④ その電界中に置かれている導線に起電力 V が発生する
となるであろう。

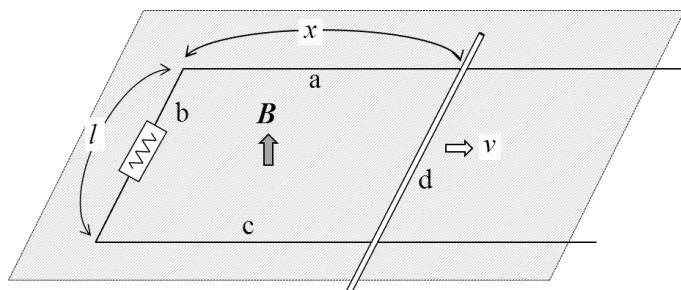
この整理の中では近接作用の考え方は③、④に現れている。式の上ではそうなのであるが、磁界の存在場所とループ状導線の位置の関係が異なる3つのケース（ケース1：完全に重なる、ケース2：部分的に重なる、ケース3：重なりがない）を個別に見てゆくと、電界の存在が必ずしも明確に見えない場合がある。これを調べてゆきたい。（なお、本レポートでは、それが磁束密度 \mathbf{B} であっても磁界と呼ぶことが多い）。

注：[2]の1.2節（ストークスの定理の項）でも述べたとおり、電界の回転（ $\nabla \times \mathbf{E}$ ）は、その周囲に渦状の電界（ \mathbf{E} ）を生み出す種（渦巻きを作る力、モーターの回転軸）であって、“電界の回転”と“渦状の電界”は、物理量としての性質も存在する場所も違うものである（ $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ の場所にも \mathbf{E} はあるというように）、と言う認識を持って欲しい。

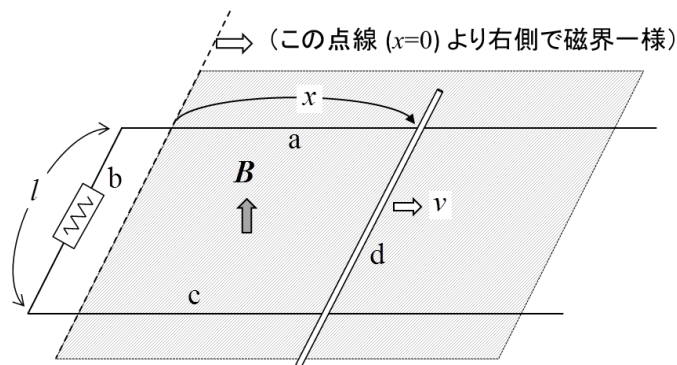
図1に示す3つのケースを考える。同図(a)と(b)で示すケース1とケース2では、均一磁界中を、辺dで表す導線が間隔 l の平行な辺a, cと接触を保ちながら一定速度 v で動いていることは共通であり、違いは磁界が存在する範囲(図で影をつけて描いた範囲)である。(図中ループの途中に抵抗を入れているが、これは起電力によって生まれるループ電流を抑えて磁界を乱さなくするためのもので、起電力算定には大きな意味は無い)。ケース3を表す同図(c)は、導線ループの中にループを貫くように磁界が存在し、かつ、導線部分には磁界は無い場合である。具体的には無限ソレノイドの外側(電界も磁界も存在しない)を導体ループで囲んだような場合である。この場合は、ソレノイドの誘起電流 I を制御し、電磁誘導が起きるよう中心の磁界を時間的に変化させる。

この3つについて、式(1)を用いて、ループに発生する起電力 V を求めると、ケース1、2では $V=-Blv$ と、その値がたちどころに求められる(前レポートの例題)。ケース3も具体的に磁束密度の時間変化率を与えれば、同様に求められる。このようにして、(1)式は万能である。でも、これで、めでたしめでたしと終わらせないのが、本レポートである。

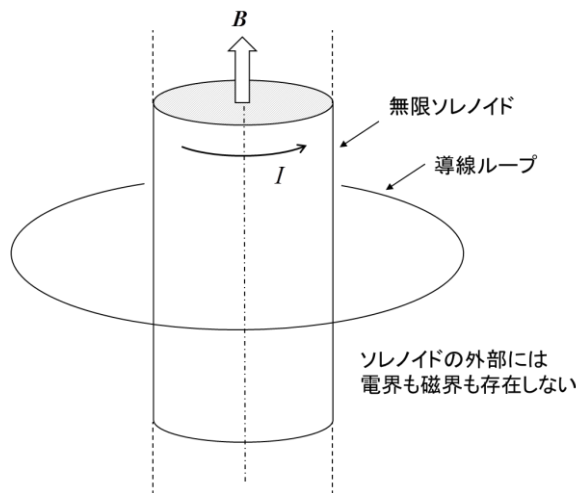
(1)式は、導線に現れる起電力が、すなわち、導線ループに起きることが、導線から離れた部分の磁束密度変化を含んでおり、直接に導線に作用する近接作用を読み取りにくい。(3)式も同様であり、導線の現場である線積分が、現場から離れた面積分で得られている。これが電磁誘導の法則だと言われれば、納得せざるを得ないが、導線と場との直接的な作用が見えず、何かもやもや感が消えない。



(a) ケース1 (磁界内にループがある場合; 磁界の向きは面に垂直)



(b) ケース2 (ループが磁界外の領域を含む場合)



(c) 磁界がループの中にあつて、ループがある領域には無い場合

図1 電磁誘導を検討する3つのケース

2 ローレンツ力で説明できるか

本節の内容は前レポートでも議論しているので、手短かにまとめる。電磁誘導の現象を導線に起きる電気現象という目で見たい。

ケース1, 2について、4つの辺のうち、電磁現象が起きそうなのはどれかを探す。辺、a, b, cは磁束密度も導線の位置も時間的に変化無く、何も起こりそうにない。一方、辺dは磁束密度中を動いているので、何かあるとしたらここである。辺dは導線なので、この中には、電荷が存在する(正負等電荷量だが、動くことができるのは負電荷を持つ電子の方)。この電荷密度を λ [C/m]とする。辺dの導体棒に存在する荷電粒子(電荷)は磁界中の移動になり、ローレンツ力を受ける。長さ l にある電荷全体が受ける力 F は

$$F = \lambda l v \times B$$

であり、向きは導線の方向になる。一方、荷電粒子に加わる力はクーロンの法則の帰結($F=qE$)から、電界があるところにおいて

$$F = \lambda l E$$

であるので、

$$E = v \times B$$

で与えられる電界が導線dにかかっていることと等価になり、発生する起電力 $V=El=-Blv$ となつて、式(1)で得た結果と同じになる。

この解法から言えることは、閉路に起きることは閉路を構成する導線のところにその現象を引き起こす場が存在し、その作用によって導線に起電力が生まれると言うことである。近接作用の考え方からは、導線に起きることは、導線の場所に何かが無ければ起きないのだから、この解法はその精神に合致している。しかし、ケース3については、この解法は無効である。さらに、ケース2においても、この解法は以下の議論により適用が限定的である。

ケース1, 2では、導体棒を速度 v で移動させたが、移動する棒と共に動く観測者が見る現象を考える。この場合は、棒は止まっているのでローレンツ力は生まれない。ゆえにこの棒には起電力は生まれない。その場合、ケース1では、反対側の辺 b が磁界中を逆方向に動いているように見えるので、こちら側にローレンツ力が働き、結果として、生まれる起電力は変わらない。それに対して、ケース2では、反対側の辺 b は磁界中にないので、ここにも何もおきず、全体として起電力は 0 と言うことになる。ゆえに、電磁誘導の現象をローレンツ力で説明するのは、できる場合もあるが、全てをこれと言うには無理と結論せざるを得ない。さらに、ローレンツ力の議論は導体内の電荷への力を考えているので、単にループ状の経路があってその線積分の結果としての起電力と考えると、その実態が見えてこないと言う弱点もある。

なお、ケース2に対しては、相対論的視点で電磁界を考えると、座標系の変換をローレンツ変換で行うことによって説明が可能であることを前レポートで述べ、かつ、それをケース1に適用しても、矛盾無く起電力を求めることが可能である。しかし、ケース3に対しては無効であることに変わりないので、ここでは、この議論はやめにしたい。

3. 導線に起電力を生み出すものは何か

導線ループが置かれている経路上に電界があれば、その線積分として起電力が得られるわけで、次式である。

$$V = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (5)$$

電磁誘導の基本式である式(3)は、線積分と面積分との関係を与えるもので、導線に対する直接の作用が見えない。式(4)は電界の回転 ($\nabla \times \mathbf{E}$) と磁束密度の時間微分を点对点で結び付けているが、2 ページの脚注にも書いたように $\nabla \times \mathbf{E}$ と \mathbf{E} は異なる物理量であり、この式を変形しても(3)式以上のものは出てこない。図1の3つのケースについて、(4)式の \mathbf{E} の部分に共通に入る磁場関係の物理量は何であろうか？それがわかれば、本レポートが求める近接作用の問題がクリアになる。

そのためには、もうひとつ、新たな役者に登場してもらう必要がある。ベクトルポテンシャル \mathbf{A} である。ベクトルポテンシャルは磁束密度との関係で次式により定義されている。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (6)$$

ベクトルポテンシャルが単に数学的なものなのか、物理量として実態があるかの議論については、後者であること (=実在する物理量) を前レポートで紹介している。(6)式を(4)式に代入すると

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \quad (7)$$

であるので、電界 \mathbf{E} とベクトルポテンシャル \mathbf{A} には以下の関係が有る。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (8a)$$

上式の右辺第1項は微分方程式から出る積分定数であり、静電界の話であって、ここでの議論には関係しないので、第2項のみに着目し、

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (8b)$$

と結び付けられる。

さらに、磁束と磁束密度の関係、及び、ベクトルポテンシャルの定義より

$$\oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{s_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \Phi_m \quad (9)$$

である。

このように見えてくると、電磁誘導の現象は以下のように解釈される。

- ① 空間内に磁場があるとき、空間全体がベクトルポテンシャルで満ちている
- ② ベクトルポテンシャルの時間変化量 (時間微分値) が電界の働きをする
- ③ その等価電界の中にループがあると、その線上の積分で起電力が生まれる

図2は関連する式も含めて上記の解釈をまとめている。

ケース3については、この考えで前レポートにまとめているので、詳しくはそちらを見てほしい。改めて、ケース1とケース2を見てみたい。扱いは両ケースで共通なのでケース1で説明する。磁場は静的なので、それによって生まれるベクトルポテンシャルも空間に静的な場を作っている。ただし、その大きさは周囲の全ての磁場の寄与によって成り立っている所以図の設定だけでは情報が不足していて確定はできない。しかしひとつだけ言えることがある。それは、ベクトルポテンシャルの経路に沿った周回積分はそのループを鎖交する全磁束に等しい、ということである (式(9))。すなわち、

$$\oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Phi_m \quad (\text{式(9)の再掲}) \quad (10)$$

である。

$$\oint_{abcd} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = Bxl = Bvlt \quad \rightarrow \quad -\frac{\partial}{\partial t} \left(\oint_{abcd} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right) = -Bvlt = V$$

より、 $V=-Bvl$ を得る。このように、ケース 1～3 の全てにおいて、ベクトルポテンシャルの近接作用とみると、首尾一貫した説明ができる。導線自体はベクトルポテンシャルそのものには何の感じる場所もないが、それが時間的に変化すると電界として感じられるのである。

前レポートにも書いたように、電磁誘導の法則の本質は(4)式で表される関係で、それが全てを言い尽くしている。また、この種の問題を解きたいだけなら(1)式で事足りるのである。ここで述べてきたことは、近接作用の考えの追求であり、導線に起きることは、その導線に何かが直接に作用しているのであろうからそれを見つけないと言った目的であった。ローレンツ力の働きに原因を求めることも有力であったが、それだけでは説明できないこともあった。そして行き着いたものが、ベクトルポテンシャルの場が空間を覆っていて、ループの位置にあるベクトルポテンシャルの時間変化にループが反応するということである。考えられる複数ケースにおいて、うまく説明できることがわかり、これを本レポートの結論としたい。

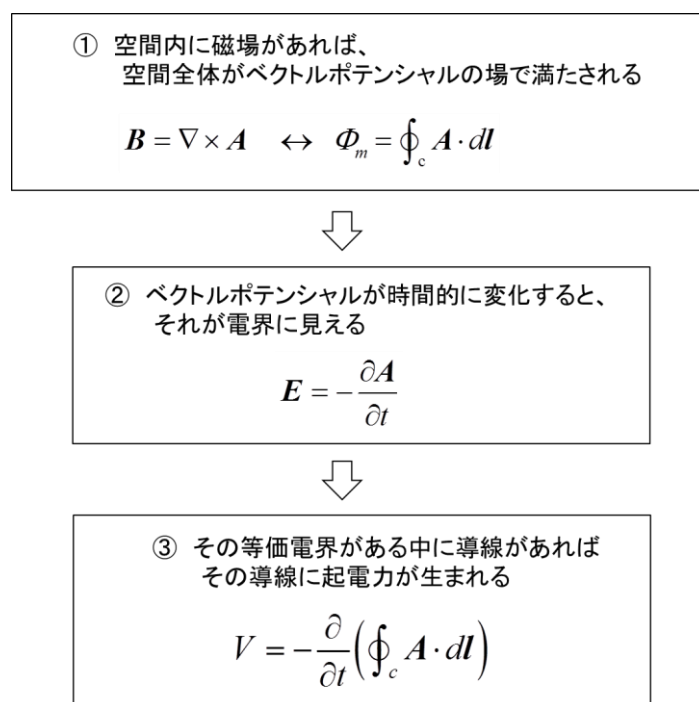


図 2 電磁誘導現象を近接作用的に捉えた一つの描像

参考文献

- [1] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ (1 2) : 電磁誘導の法則に学ぶ物理現象のからくり,” 技術レポート (私報), YK-045, April 01, 2020. http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-045_EM-12.pdf
- [2] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ (1 1) : マックスウェルの方程式ができるまで (その 1),” 技術レポート (私報), YK-037, Dec. 10, 2019. http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-037_EM-11-1.pdf