Technical Report YK-071
June 6, 2022
Y. Karasawa

電磁誘導の法則

ファラデー・マクスウェル・アインシュタインに聞いてみよう

電磁気学の根幹を支える法則の一つに電磁誘導の法則がある。法則だからあくまで経験則であってその法則が正しいことを証明できる人は誰もいない。例外がないから我々はそれが自然界のなせる業と信じて受け入れているだけである。でも、そこにどのようなからくりがあるかについては、思考を巡らすことによって理解を深めることができる。本レポートでは、電磁誘導による磁界中の起電力発生メカニズムについて、近接作用の視点で、すなわち、空間に置かれた導線ループの線上だけを見て、何が導線に作用しているかを、三人の大御所：ファラデー（F）・マクスウェル（M）・アインシュタイン（E）に聞いてみよう。現象を発見したファラデーは磁力線による直感的イメージで、マクスウェルは自らが纏め上げた方程式により、そして、アインシュタインは相対性理論で、それぞれ疑問に答えてくれるであろう。（注１、注２：注の説明は末尾に）

（聞き手 K）

K

電磁気学の基本である電磁誘導の法則を学びたいと思います。教えてくれませんか。

F

1820 年、エルステッドが電流の磁気作用、つまり、電気から磁気が生まれることを見出しました。私は、その逆に、磁気から電気を得る方法もあるはずと思って試行錯誤すること十年、ついに棒磁石を動かしているときだけそばにある導線に電気が生まれることを発見しました。その後、レンツやノイマンの努力によって、ループ状の導線に発生する電圧（起電力）V は次式で与えられることが分かりました。

$$V = -\frac{d\Phi_m}{dt} \tag{1}$$

式中の Φ_m はループ内を貫く磁力線の数（正確には磁束の総量）、負号がつくのは、磁力線の増加を防ぐ向きに電流が流れるように電圧が発生すると言う意味です。これはすばらしい式で、発生する起電力の大きさはすべてこの式で求められます。その後のあらゆる実験に対して例外なく成立し、ゆえに電磁誘導の法則と呼ばれるようになりました。

M

(1)式を数学的に書き表すと次式になります。

$$\oint_{\mathrm{c}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_{\mathrm{S}} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{2}$$

左辺は導線のあるなしに係わらず、空間に渦状の電界 $\boldsymbol{E}$ が現れ、それをループ１周分積分すると起電力 V になることを言っています。又、右辺は空間の磁束の密度 $\boldsymbol{B}$ の時間変化分をループ面内で積分したものが $-d\Phi_m/dt$ になることを言っています。

さらに、数学的に突き詰めてゆくと次式に至ります。電磁誘導の法則のエッセンスともいえる微分方程式です。

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3}$$

これは空間内の各場所の性質を表しています。磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は空間に広がる磁気的性質をもつ場を表しますが、その各点において磁束密度の時間変化があれば、その場所には“電界の回転（$\nabla\times\boldsymbol{E}$）”があるということです。電界の回転というと、電界の渦巻きをイメージしますがそうではありません。$\nabla\times\boldsymbol{E}$ は周囲に電界 $\boldsymbol{E}$ の渦巻きを作り出す源、回転しているドリルの歯みたいなものです（注３）。$\nabla\times\boldsymbol{E}$ はベクトル量で向きはドリルの回転軸方向です。

F

私は、現場に起きることは現場に直接の原因があるはずと考えます。置かれた導線ループに起電力が起きるということは、その場所に直接に働きかけている何かがある言うことです。式(1)や(2)の右辺は導線ループから離れた場所からの寄与を言っており、導線の場所に何が起きているかを説明しておらず不満です。(3)式も(2)式から生まれたものであり同じです。

私は磁力線の実在を信じています。私の目には磁力線が見えます。磁力線の一本一本が導線を切るたびにガリッと音がし、私には聞こえます。そのガリガリ音の発生密度が起電力に比例すると考えています。図１のように、棒磁石のそばに導線ループを置きこれを下側に動かしたと思ってください。そうすると、動かすことによって、導線が磁力線を切るでしょう。動いた部分にできる円筒形の側面部分（図の赤い矢印部分）です。このように、導線が磁力線を切ったときに起電力が発生します。電磁誘導の現象はこの考えだけで説明ができます。

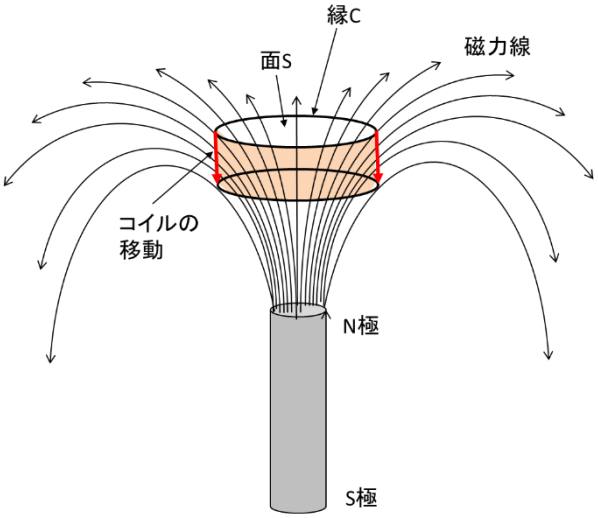

図１　起電力は導線が磁力線を切るときに発生する

K

具体的なケースで教えてください。図２は、電磁誘導の起電力を求めるときの典型的な例です。「紙面上向きに一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ があり、辺 abcd で結ばれる導線の矩形ループがあります。このうちの辺 d は間隔 l 離れた平行な辺 a と c 上を電気的接触を保ったまま速度 v で右方向にスライドしています。抵抗 R を入れたループに流れる電流を求めなさい」と言う問題です。どこにどのような起電力が発生するのでしょうか？

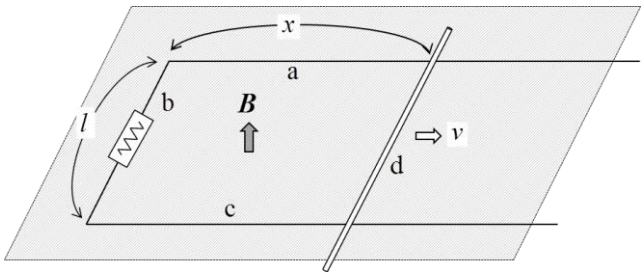

図２　電磁誘導発生の例

F

ループ内の磁力線の量は Blx、すなわち、$Blvt$ なので、式(1)を用いれば、起電力 V は Blv になります。電流は Blv/R で、流れる向きは辺 d を図面の手前側（左下方）です。どこに起電力が生まれているかと言えば、磁力線を切っている音が聞こえる辺 d です。

M

私にはガリガリ音は聞こえないですが、基本的に、ファラデーさんの説明でよいと思います。辺 d に生まれる起電力は次のようにも説明できます。辺 d を構成する導線内には自由に動ける電子があり、この電荷密度を λ [クーロン/m]とします。磁界中を直交して動く電荷にはローレンツ力が働き、その力の合計 F は λlvB、力を受ける向きは導線の方向（負の電荷なので電流の方向と反対方向）です。一方、電界 E 中の電荷 λl は $F=\lambda lB$ のクーロン力を受けるので、辺 d は等価的な意味で $E=vB$ の電界を感じています。ゆえに、この電界によって、辺 d に $V=vlB$ の起電力が生まれていると解釈できます。

（この会話を黙って聞いていたアインシュタインが、突然口を開いた）

E

物理法則が法則と認められるには異なる慣性系（一定速度で直線上を動く座標系）のすべてで成り立たなくてはいけません。この性質は共変性と呼ばれています。お二人の説明には共変性のことに触れられていません。もし、動く辺 d と一緒に右方向に動いている人がこの現象を見れば、辺 d は止まっているのだから、磁力線は切らないし、ローレンツ力も働かない。ゆえに、辺 d に起電力が起きるという説明は、必ずしもそうとはいえないのではないでしょうか。

F と M が口をそろえて

その場合は、もう片方の辺 b が反対方向に動いているのだから、その辺に反対向きに起電力が生まれ、ループ全体で考えれば、式(1)や(2)に変わりなく、問題はおきません。

E

しかし、視点を変えるだけで、起電力が発生する場所が変わるというのは納得できません。図２は、たまたま、辺 b と d で、同じ磁界があったからそういうことがいえるのだろうけれど、辺 b 上には磁界が無い図３のケースではどうでしょう。この場合は、辺 d と一緒に動く人から見れば、どこにも起電力が生まれず、電磁誘導は起きないのではないでしょうか？

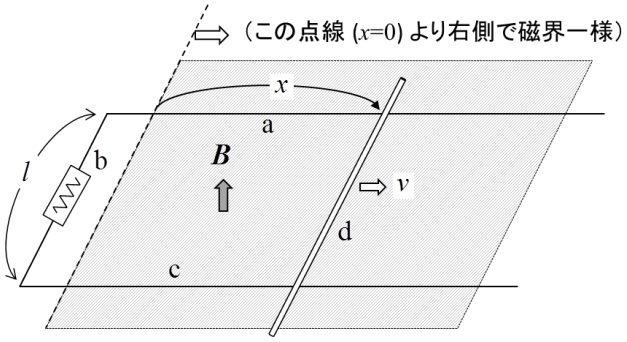

図３　辺 b が磁界の無いところにある場合

（しばらく、沈黙が続いた後）

E

私が編み出した相対性理論なら、図２や図３のケースについて、矛盾無く説明できます。静止している人が見る電磁界の景色と動いている人が見る景色は違ってきます。動いている人の視点での物理現象の説明には、その違った景色から説明されなければならないということです。すなわち、静止している人の座標系（K 系）と動いている人の座標系（K’系）は異なり、その変換には相対性理論が採用しているローレンツ変換を用いないといけないのです。ローレンツ変換を詳しく述べることはできませんが、ニュートン力学で規範としているガリレイ変換のように空間と時間が切り離された座標変換ではなく、時間と空間が関連しあう４次元空間の変換法なのです。動く人から見れば、ものの長さが縮み、時間の進みが遅れると言う相対性理論ではお馴染みの変換です。そのローレンツ変換に従って、電界や磁界も変換することができ、動いている人には次式のような電界 E' と磁界 B' が見えているのです（注４）。

$$E' = -\gamma v B$$

$$B' = \gamma B$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \approx 1 \quad (v << c) \qquad \text{（ローレンツ因子）}$$

静止系 K では、先ほど説明が有ったように、図２も図３も辺 d に起電力が起きると言うのはよいでしょう。一方、辺 d と共に動く K'系では辺 d には上の式より γvB の電界 E'が生まれていることになり、これによって、辺 d にγvlB の起電力が起きるのです。辺の動く速度 v は光の速さ c に比べて十分遅いので、$\gamma \approx 1$とみなすことができ、起電力は vlB となって、K 系と同じになります。図２の場合、反対側の辺 b にも E'によって同じ起電力が生まれますが、こちらはローレンツ力による起電力が逆方向に生まれて打ち消され、起電力はありません。このようにして、図２と図３のケースの双方において、静止している人も動いている人も、すなわち、いかなる慣性系で見ても、起電力が生まれるのは辺 d であるということがいえるのです。

M

私が、電磁気学の方程式を纏め上げたとき、共変性の概念はありませんでしたが、結果として、そのような性質を具備していたと言うことは幸運でした。そのお蔭で、電磁気学はアインシュタインさんが作り上げた相対性理論による力学の大変革を無傷で乗りきることができました。

E

私が相対性理論を生み出すとき、この電磁気学（マクスウェルの方程式）のからくりが大きなヒントになったのです（注５）。

K

電磁現象は電界や磁界があるところに起きるものだと思っています。逆に言うと、電界も磁界もないところには電磁現象は起きないのではと思うのです。例えば、図４に示すような無限長ソレノイドの場合、磁界がソレノイド内にできるのみで、ソレノイドの外側は、電界も磁界もない空間と学んできました。しかし、その場合でも、ソレノイドの励磁電流を時間的に変化させれば、その外側に置いたループには電磁誘導により起電力が起きます。この場合、導線は、何を感じて起電力を生み出すのでしょうか？

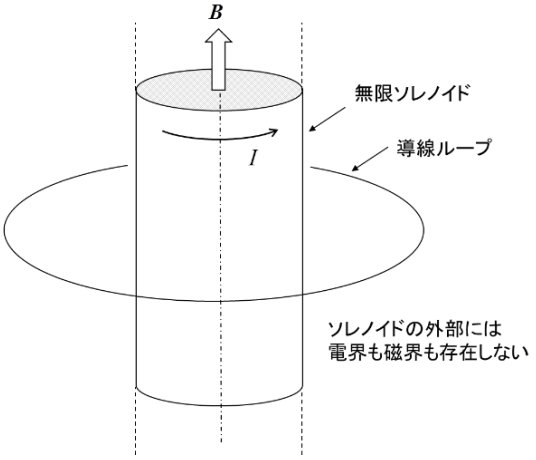

図４　無限ソレノイドの外側の導線ループに起きる電磁誘導（励磁電流 I が時間とともに変化する場合）

（アインシュタインはこの話には興味が無いとみえて、いなくなってしまった）

M

導線が磁力線を切ると言う発想に拘るファラデーさんには無理と思いますが、私ならできます。

一定電流が流れているソレノイドの外側には何も電磁界がないと言うのは間違いです。ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の場が周方向にできているのです。ベクトルポテンシャルは、電磁的な計測において何も感じるものが無いので透明人間と思われています（注６）。でも、見えないだけで透明人間はいるのです。私がまとめた方程式からは、ベクトルポテンシャルが時間的に変化するとき、同じ方向に電界が生まれるという性質が出てきます。次式です（注７）。

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

励磁電流が変化してソレノイドの中の磁束が変化すると、ソレノイドの外にある（もちろん中にもあるが）ベクトルポテンシャルも時間変化し、その結果として、上式により導線の周りに、それまで見えなかった電界が現れます。導線はこの電界の作用を受けて起電力を生み出すのです。その起電力の大きさは、式(1)で求められる値と同じになります。図４の場合も、導線に対する近接作用で説明できるのです。

F

マクスウェルさん、私にはできないだろうと思うのは間違いですよ。私は以下のように考えます。

私には磁力線が見えると言いました。その磁力線が増えると言う場合、無から生まれてくるわけではなく、どこからかその場に集まってくるのです。電荷保存の法則と言うのがありますが、磁力線だって同じだと考えるのです。磁界がないからと言って磁力線が無いとは限りません。反対方向に向く磁力線がペアになって磁界を打ち消していることも考えられます。磁界として見えないだけです。この視点で図４を見てみましょう。

確かに、ソレノイドの外側には磁界はありません。しかし図５のように反対向きがペアになっ

て密集していると考えてみましょう。まったく何も無い電磁界ではなく、磁界由来のベクトルポテンシャルが有るとマクスウェルさんが教えてくれましたが、それなら、このようなペアが隠れていてもおかしくないでしょう。さて、電流が増えてソレノイドの中の磁力線の数が増えてゆきます。それらはどこから来たのでしょう。ソレノイドの外側から内部の磁界と同じ向きの磁力線がソレノイドの壁をすり抜けて中に入ってきたのではありませんか。外の磁力線は動くだけなので、磁界は中和されたままで相変わらず０です。そのようにして、磁力線が外からどんどん中に入ってきます。そうすると、導線ループによって切られるときの音が聞こえてきませんか？ガリッガリッと。

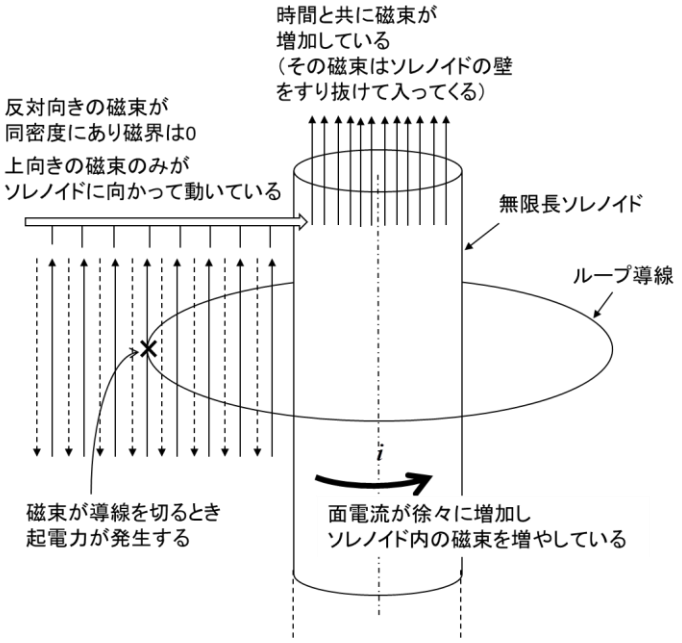

図５　図４に対するファラデー流電磁誘導の説明

M

ファラデーさん、失礼しました。近接作用に基づく場の概念そのものですね。このようにして議論を楽しんでもらえれば電磁気学の理解者も増えそうで、ありがたいです。ただ、注意してほしいことがあります。この種の議論は、現象の解釈の問題で、新たなことは何も生み出していません。電磁誘導の法則は基本式 (3)ですべて言い尽くされているのです。しかも、(3)式の右辺と左辺は原因と結果ではありません（磁界の時間変化（原因）が電界の回転を生み出す（結果）というような）。式が言っていることは、両辺は同じこと（イコール）である、なのです。

K

皆さん、ありがとうございました。電磁誘導の法則一つを取ってもこれだけの議論ができ、理解を深めることができました。

本文中の（注）の説明

注１）本稿は同内容を扱った下記レポートを会話調に仕立て直したものです。本文中の F, M, E 氏の発言は、筆者の想像に基づくフィクションです（間違っていることを言っていたとしたら筆者の所為です）。

○　唐沢技術レポート：近接作用で見る電磁誘導の法則
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/Chap_5_EM_Induction_Law.pdf

注２）本内容のまとめ方については、下記文献から多くのヒントをもらっています。

○　江沢洋, 上條隆志 (編), *相対論と電磁場（江沢洋選集 II）*, 日本評論社, 2019.

又、以下の本もファラデーやマクスウェルを身近な人にしてくれます。

○　小山慶太, *光と電磁気, ファラデーとマクスウェルが考えたこと*, ブルーバックス, 講談社, 2016.

○　N. Forbes, B. Mahon（米沢富美子他訳）, *物理学を変えた二人の男*, 岩波書店, 2016.

注３）「回転」演算はベクトル解析で学ぶ空間微分の一つです。 (2)式から(3)式への変換はストークスの定理を用います。詳しくはベクトル解析の本で学んでください。

注４）電磁界のローレンツ変換については、例えば、下記の 1.3 節に

唐沢好男, *無線通信物理層技術へのアプローチ*, コロナ社, 2021.

下記の技術レポートでも解説しています。

○　唐沢技術レポート：電磁気学と相対論
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/Chap_6_EMT_and_Theory_of_Relativity.pdf

注５）アインシュタインは、電流のそばを走る電荷に対する力のパラドックスを考えている中で相対論を生み出すヒントを得たと言われています。その内容は、ファインマンの本の 13.6 節（図 13-10）に取り上げられています。

○　R. P. ファインマン, R. B. レイトン, M. L. サンズ:（宮島龍興訳）, *ファインマン物理学 III 電磁気学*, 岩波書店, 1969.

注４）で上げた筆者の技術レポートの 6.4.2 項でも取り上げています。

注６）ベクトルポテンシャルを感知する電磁気学的測定法は知られていません。ゆえに透明人間に例えました。一方、量子力学の世界に、Y. Aharonov と D. J. Bohm が 1959 年、その存在を指摘したアハラノフ・ボーム効果（AB 効果）というのがあます。詳しくは、以下に示す解説資料を見ていただきたいが、一言で言うと、ベクトルポテンシャルがある場では、電子を移動させるとその位相変化（電子波の位相：シュレーディンガーの波動方程式で与えられる量子力学的な物理量）が経路に依存する、と言うものです。これを確認する実験は大変難しくなかなかできなかったのですが、日立製作所の外村彰博士が、1986 年、電子線ホログラフィーの手法を用いて、その存在を実証しました（漏れの無い磁場を作るために超伝導の壁の中に閉じ込める等の難題克服の苦労話が解説記事に）。これによって、ベクトルポテンシャルが単なる数学上の表現ではなく、実在する物理量であることが確かめられたのです。

○　解説資料：外村彰, “電子波で見る電磁界分布（ベクトルポテンシャルを感じる電子波）,” 信学会誌, vol. 83, no. 12, 99. 906-913, 2000.　https://www.ieice.org/jpn/books/kaishikiji/200012/20001201-1.html

注７）正確には $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ ですが、関係しない項を省いています。