

電波の送受信の仕組み

～フリスの伝達公式にみる電磁気学的からくり～

無線通信回線においてアンテナは電波の送受信を担う。アンテナから放射された電波を遠方で受信する際の受信電力を算定する方法には2つの方法がある。一つは、フリスの伝達公式であり、もう一つは、アンテナによる送受信をマクスウェルの方程式を用いて算定する方法（電磁気学的算定）である。前者は式の意味を直感的に理解しやすく計算も容易であるのに対し、後者はその手順が複雑である。その場合でも、当然両者の結果は等しくなるのであるが、なぜ同じになるかの仕組みが陽に見えないところがある。本レポートでは、半波長ダイポールアンテナの場合について両手法による算定法を述べ、両者が一致するからくりを示す。

1. 半波長ダイポールアンテナ対向無線回線の受信電力

半波長ダイポールアンテナが対向する無線回線（波長に比べて十分大きい距離がある自由空間回線）における受信電力を電磁気学的に求めてみよう。

（1）半波長ダイポールアンテナの基本特性

半波長ダイポールアンテナ（ダイポールの向きを z 軸；波長に比べて十分細い導線）の特性については、理論解析（マクスウェルの方程式）により、以下のように求められている（電波工学の一般的な教科書、例えば[1]参照）。

$$\bullet \text{ 素子上の電流分布 } I = I_0 \sin k \left(\frac{\lambda}{4} - |z| \right) e^{j\omega t} \quad \left(0 < |z| \leq \frac{\lambda}{4} \right) \quad (1)$$

・アンテナの実効長（受信アンテナにおいて、電界強度を端子電圧に変換する実効的な長さ）

$$l_e = \lambda / \pi \quad (2)$$

$$\bullet \text{ 入力インピーダンス } Z (= R + jX) = 73.13 + j42.55 \text{ } [\Omega] \quad (3)$$

$$\bullet \text{ 遠方界 } E = j60I_0 \frac{\cos \left(\left(\pi / 2 \right) \cos \theta \right) e^{j(\omega t - kr)}}{\sin \theta r} \quad (4)$$

$$\bullet \text{ 利得（効率1を仮定） } G = \frac{\cos^2 \left(\left(\pi / 2 \right) \cos \theta \right)}{\sin^2 \theta} G_{HDP} \quad (5)$$

$$\text{最大利得（}\theta = \pi/2 \text{方向） } G_{HDP} = 1.64 \text{（} = 2.15 \text{dBi）} \quad (6)$$

(2) 受信電力

式(4)より、最大利得方向 ($\theta=\pi/2$) にある受信点 (距離 r) での電力密度 p_{r_HDP} は次式となる。

$$p_{r_HDP} = \frac{1}{2Z_0} |E|^2 = \frac{1}{2Z_0} \left(\frac{60I_0}{r} \right)^2 \quad \left(Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 [\Omega] \right) \quad (7)$$

受信アンテナの端子電圧 V は、正面 ($\theta=\pi/2$) 方向の入射に対して

$$V = |E| l_e = \frac{60\lambda I_0}{\pi r} \quad (8)$$

となる。

このアンテナから最大の電力を取り出すためには、負荷抵抗 R_L は、アンテナのインピーダンスの実数分、すなわち、アンテナ抵抗 R と等しい負荷 (整合負荷) : $R_L=R$ としなければならない。

これより、受信電力 P_{r_HDP} は次式で算定される。

$$P_{r_HDP} = \frac{V^2}{4R} = \frac{1}{8R} \left(\frac{60\lambda I_0}{\pi r} \right)^2 \quad (9)$$

2. フリスの伝達公式による算定

送信アンテナに給電される電力を P_t 、受信点方向に対する送信アンテナの利得を G_t 、送受信点間距離を r とすると、遠方受信点における電力密度 p_r は次式になる。

$$p_r = \frac{1}{4\pi r^2} G_t P_t \quad (10)$$

この電磁界をアンテナの実効面積 A_r で受け止めると、受信電力 P_r は

$$P_r = p_r A_r = \frac{1}{4\pi r^2} A_r G_t P_t \quad (11)$$

となる。アンテナの実効面積 A とアンテナ利得 G には、次式の関係がある。

$$A = \frac{\lambda^2}{4\pi} G \quad (12)$$

ゆえに、受信アンテナ利得 (送信点方向の利得) を G_r とすると、受信電力 P_r は次式になる。

$$P_r = \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 G_r G_t P_t \quad (13)$$

(13)式はfrisの伝達公式と呼ばれ、直感的にも理解しやすい簡易な公式である (frisの伝達公式の詳細は、例えば[2])。アンテナの特性は、送受信アンテナのそれぞれの利得のみが用いられていて、特定のアンテナに限定されるものではない。送受信アンテナが共に半波長ダイポールアンテナの場合には $G_r=G_t=1.64$ であり、この時、式(9)と(13)の結果は一致するはずである。

3. フリスの伝達公式に隠されたからくり

受信電力を算定した(9)式と(13)式のそれぞれに矛盾がないことを見てみよう。

二つの式は、送信アンテナについての出発点が異なっている。(9)式はアンテナに流れる電流 I_0 から、(13)式は送信電力 P_t からスタートしている。アンテナの入力インピーダンス Z の実数分（抵抗 $R(=73.13\ \Omega)$ ）を用いると、 I_0 と P_t の関係は以下になる。

$$P_t = \frac{\text{Re}\{Z\}I_0^2}{2} = \frac{RI_0^2}{2} \rightarrow I_0^2 = \frac{2P_t}{R}$$

1/2の係数が付いているのは、尖塔値である I_0 を実効値に変換するためである。この関係を用いて(9)式を P_t を出発点にして書き直すと次式である。

$$P_{r_HDP} = \frac{1}{4R^2} \left(\frac{60\lambda}{\pi r} \right)^2 P_t$$

送受信アンテナを半波長ダイポールアンテナとし、すなわち、 $G_r=G_t=1.64$ として (9)式と(13)式が等しいとすると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 G_r G_t P_t &= \frac{1}{4R^2} \left(\frac{60\lambda}{\pi r} \right)^2 P_t \\ \rightarrow G_r G_t &= \frac{4 \times 60^2}{R^2} \rightarrow R = \frac{120}{1.64} \approx 73.1\ [\Omega] \end{aligned}$$

となる。アンテナインピーダンスの抵抗分 R の値が未知であるとする、フリスの伝達公式が73.1 Ω を求めているというようにも読める。そしてその値は、起電力法によってアンテナ解析で求められている(3)式の R そのものなのである。この一致は、奇跡のように思えないだろうか？フリスの伝達公式は、直感的に導かれていて、どこにも電磁気学の力を借りていないように見える。それなのに、両方式は辻褄が完全に合っている。

マクスウェルの方程式に基づく(9)式は、その正しさを無条件に認めて良いであろう。一方、直感的推論に基づいているように見えるフリスの伝達公式のどこに電磁気学的からくりが有るのだろう。

実は、フリスの伝達公式は、直感的推論のみでは決して導くことができない公式なのである。もとになる(11)式までは素直に追うことができるであろう。では、何が難しいのだろう。その正体は、アンテナ利得と実効面積の関係を与える(12)式にある。式の形を見ると、 $G=1$ 、すなわち無指向性アンテナの実効面積は、丁度、円周1波長の円の面積になっていて、何か理屈付けができそうに思うであろう。しかし、それが簡単にはできないのである。

フリスの伝達公式の詳細は文献[2]に述べているので、同式の導出はそこを見てほしい。(12)式の導出は、以下の2段階の手順が採られている。

- ① 無線回線の相反定理を用いアンテナの利得と実効面積の比 G/A は、アンテナのタイプによらず一定値をもつことを証明する
- ② アンテナのタイプによらないのであるから、理論的に解析できるアンテナ一つを選んで、そのアンテナの G/A を求める。そのアンテナとして、微小ダイポールアンテナが選ばれる。それによって(12)式が得られる。

その導出過程を調べてゆくとわかるように、微小ダイポールアンテナのインピーダンスが組み入れられている。式(12)は電磁気学的手法により得られた式なのである。ゆえに、フリスの伝達公式にも、しっかりと電磁界理論の理屈が組み込まれているのである。異なる方法と示した二つの方法は、根本において同一であり、故に、同じ結果になるのである。

図1は、本レポートで述べた受信電力算定の二つの方法を対比して示している。

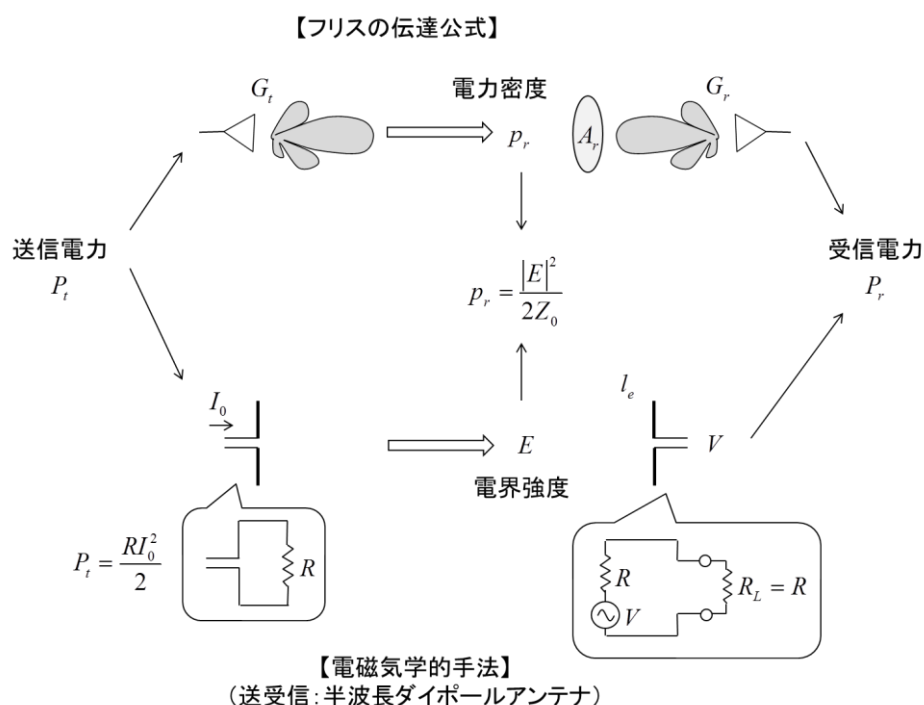


図1 二つの受信電力算定法の仕組みと相互の関係（電磁気学的手法では、半波長ダイポールアンテナを送受信に用いた場合を示している）

参考文献

- [1] 長谷部 望, 電波工学, コロナ社, 1995.
- [2] 唐沢好男, 無線通信物理層技術へのアプローチ, コロナ社, 2021.

読者の皆さんへ。

本内容のより詳しい解説は、私製本「[謎解き電磁気学](#)」の[第11章](#)にあります。