

電磁気学の奥深さ（20）：電磁気学のパラドックス「静電磁界において $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は電力の流れを生むか？」を考える【その2】

～エネルギー流動の描像～

唐沢好男

本レポートは、同タイトルの技術レポート（YK-051 [1]）の続編である。 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ で表されるポインティングベクトルはアンテナの放射界解析などに重要な働きを持つ。マクスウェルの方程式から導かれるエネルギー保存則（ポインティングの式）の中に、閉領域の表面から単位時間当たり流れ出すエネルギー（すなわち電力）の単位面積当たりの量として現れる。このポインティングベクトルは、閉領域内でのエネルギーが動的に変化する中でのエネルギーの出入りを表す式であるが、それがそのまま静電磁界でも通用する例があるため、静・動電磁界の全般に対しても適用できるのではないかとの期待もある。前レポートでは、前提を決めそこからの推論によって、静電磁界でもポインティングベクトルに従うエネルギーの流動があることを述べた。そして、そこで求めたエネルギーの移動速度の式が不思議な形になった。本レポートでは、静電磁界をエネルギーが光速で移動する基本成分の集まりと考えることにより、その式が辻褄の合う形で説明できることを示す。また、静電磁界におけるポインティングベクトルの性質が、動電磁界のポインティングベクトルの性質から、 $\sqrt{\epsilon} \rightarrow 0$ の極限として連続的なつながりになっていることを示す[2]。

1. はじめに

静電磁界におけるポインティングベクトル $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ がエネルギーの流れを示すかどうかは議論の分かれるところであり、その事情は前レポート[1]にまとめている。

前レポートでは以下の前提条件のもとで推論を進め、静電磁界においても、エネルギーの流動はある、という結論を導いた。

- ① 電磁界のふるまい（電磁現象）は電界と磁界によってのみ決まる
- ② 電界と磁界がそれぞれどのような仕組で生成されたかということ（原因）によらない
(要は、電界や磁界には生成原因が識別できる色がついていない。電界は電界、磁界は磁界、それ以上に違うところは何も無い。)

しかし、これによって得られたエネルギー流動の式は奇妙な形をしており、電磁界の振る舞い（メカニズム）が陽には見えてこない。本レポートでは、任意の電磁界を、光速で移動する基本電磁界成分の集まりと考えることにより、静電磁界、動電磁界（電磁波を含む）を問わず、辻褄の合う形で説明できることを示す。

2. 直流電力伝送に見られる静電磁界ポインティングベクトルの働き

前レポートでは、ポインティングベクトル $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ の性質を探るため、静電界と静磁界が直交して存在する環境を持つ直流電力伝送線路での電磁界を調べている。その説明のための伝送路として同軸円筒線路を用いた。このレポートはその続きをまとめたのであるが、この説明の題材とする伝送路としては、平行平板伝送路のほうが、よりイメージが掴みやすいので、内容的には前稿と重なってしまうが、本レポートではここから話を始めたい。

図1に示すように、自由空間に静電界 \mathbf{E} (y 軸方向に正の値をもつ成分: E_y) と静磁界 \mathbf{H} (z 軸方向成分: H_z) が直交して存在するケースを考える。図1の閉領域空間は単位立方体で、この静電磁界が立方体を含む十分広い空間に均一に存在しているとする。この単位立方体内のエネルギー、すなわち、エネルギー密度 u_{EM} [J/m^3] は次式である。

$$u_{EM} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E_y^2 + \mu_0 H_z^2) \quad (1)$$

この空間にもしエネルギーの流れがあるとすると、 x, y, z 面に対して $S_{x1}, S_{x2}, S_{y1}, S_{y2}, S_{z1}, S_{z2}$ の6つの面 (x 面に対する S_{x1}, S_{x2} のみ図中に表示) から法線方向に流出する単位時間当たり、単位面積あたりのエネルギー、すなわち電力密度 $P_{x1}, P_{x2}, P_{y1}, P_{y2}, P_{z1}, P_{z2}$ [W/m^2] は、立方体内部にエネルギーの発散がないことと、その構造の対称性により

$$P_{x2} = -P_{x1}, \quad P_{y2} = -P_{y1}, \quad P_{z2} = -P_{z1} \quad (2)$$

となるであろう。この値が決まれば、エネルギーの移動方向と速度 v_{EM} [m/s] も定めることができる。

電磁波に代表される動電磁界では、単位面を通過する電力密度とその方向はポインティングベクトルで表され

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = E_y H_z \mathbf{i} \quad (3)$$

となる。ここで、 \mathbf{i} は x 軸方向を表す単位ベクトルである。本レポートの目的は、静電磁界においても(3)式が成立するかどうかを明らかにすることである。

以下、これを具体的に調べてみよう。前節で述べた前提条件に立てば、図1と同じ静電磁界が現れる具体的な環境の一つを見つけ、そこで、エネルギー移動の有無を調べれば、その結果を図1の環境にそのまま適用して良いと言う理屈が成り立つ。任意の静電磁界が存在する環境は無数にあるが、解析の容易さと直感的な分かりやすさと言う点において図2の平行平板伝送線路が良いであろう。(前レポートではこの部分に円筒同軸線路を用いた。当然同じ結論が導かれる)

図2は幅 l 、間隔 d で $d \ll l$ の平行平板伝送線路を用いた直流電力伝送回路で、直流電圧 V 、負荷抵抗 R に対して、電流 I と負荷抵抗への供給電力 W は、次式である。

$$I = \frac{V}{R}, \quad W = VI = \frac{V^2}{R} \quad (4a,b)$$

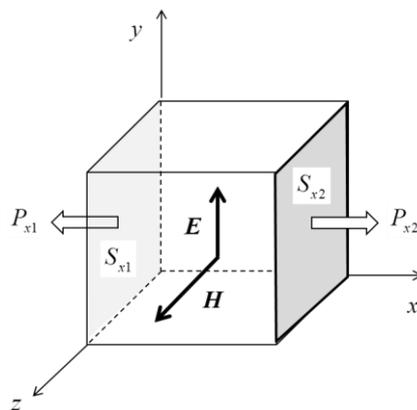


図1 静電磁界におけるエネルギーフローの関係 (図では $S_{y1,2}$, $S_{z1,2}$, $P_{y1,2}$, $P_{z1,2}$ は省略しているが、 x 面の $S_{x1,2}$, $P_{x1,2}$ と y, z 面について同じルールで)

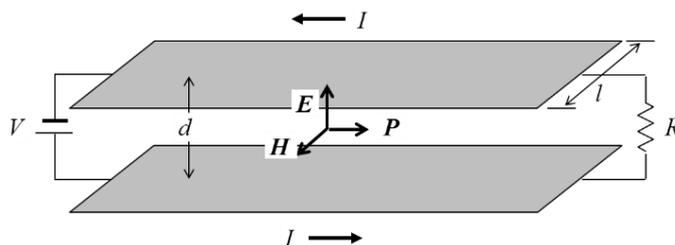


図2 平行平板伝送線路による直流電力伝送回路と内部に存在する静電磁界環境

伝送線路の単位長さあたりの自己インダクタンス L [H/m]、静電容量 C [F/m]、線路の特性インピーダンス R_0 [Ω]は、それぞれ、

$$L = \frac{\mu_0 d}{l}, \quad C = \frac{\epsilon_0 l}{d}, \quad R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{d}{l} Z_0 \quad \left(Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 [\Omega] \right) \quad (5a,b,c)$$

である。ここで、 Z_0 は自由空間の固有インピーダンスである。

この平板間の空間には直交静電磁界が存在しており、電界 E_y と磁界 H_z 、及び、その比で定義される電磁界の特性インピーダンス Z [Ω]の大きさは次式である。

$$E_y = \frac{V}{d}, \quad H_z = \frac{I}{l} = \frac{V}{Rl}, \quad Z = \sqrt{\frac{E_y}{H_z}} = \frac{Rl}{d} = \frac{R}{R_0} Z_0 \quad (6a,b,c)$$

これより、

$$E_y H_z l d = \frac{V^2}{R} = W \quad (7)$$

となる。この結果は、直流回路の電力伝送においては、電力は導線内を運ばれるのではなく、導線間の空間を電磁界が運ぶと言う描像の根拠となっている。これより、(3)式で示した P_{x2}, P_{y2}, P_{z2} に関しては

$$P_{x2} \mathbf{i} = \mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad P_{y2} = P_{z2} = 0 \quad (8)$$

としてよいことが分かった。この結果は周知の事実である。しかし、ここでこれを持ち出したのは、先前提条件に立てば、この結果を汎用的な性質として用いて良いと言う論理を貫きたいためである。ここでは静電磁界に限定してはいるものの、そのときの $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は、環境がどのようなものでも同じ性質を示すはずという主張である。

ここで P_{x2} を P_{EM} と置きなおすと、 $P_{EM} = E_y H_z$ なので、 x 方向へのエネルギーの流れる速度は次式で算定される。

$$v_{EM} = \frac{P_{EM}}{u_{EM}} = \frac{2E_y H_z}{\epsilon_0 E_y^2 + \mu_0 H_z^2} = \frac{2c}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} \quad (c: \text{光速}) \quad (9)$$

図2の回路のパラメータで書き換えると

$$v_{EM} = \frac{2c}{\frac{R}{R_0} + \frac{R_0}{R}} \quad (10)$$

である。負荷抵抗が線路の特性インピーダンスに等しい整合負荷 ($R=R_0$) の場合にはエネルギーの移動速度は光速となり、不整合負荷では、光速よりは遅くなることを意味している。

以上をまとめると、電界と磁界が直交する静電磁界環境において、

- エネルギーの移動がある
- 単位面を通過する電力 (すなわち電力密度) は $E_y H_z$ で与えられるポインティング電力である
- エネルギーの移動速度は式(9)で与えられ、 $Z=Z_0$ のとき光速になる

ここまでは、電界と磁界が直交する環境について述べた。直交しない環境については、図2のような解析のお手本になる環境がないが、電界と磁界を挟む角度を θ とするとき、以下のようななるだろうことは容易に推測できる。

$$P_{EM} = E_y H_z = |\mathbf{E}| |\mathbf{H}| \sin \theta \quad (11)$$

$$v_{EM} = \frac{2 \sin \theta}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c \quad \left(Z \equiv \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} \right) \quad (12)$$

以下、次節では、この非直交を場合も含めてこのような振る舞いする静電磁界のメカニズムを推察する。

3. 電磁エネルギー流動のメカニズム

3.1 電界と磁界が直交している場合

式 (9)~(12)から、どのような電磁界のメカニズムが見えてくるかを示したい。前節にならって、まずは直交する静電磁界について考える。唐突であるが、以下のような仮説を立ててみよう。番号は先の①、②に続けて、

- ③ 電界と磁界が直交し、その大きさの比率の絶対値 $|Z|$ が Z_0 であるものを基本成分とする。基本成分は2種類あり、 $Z=Z_0$ では、エネルギーは x 軸正方向に光速で動く。もう一つの基本成分は $Z=-Z_0$ で、エネルギーの移動方向は反対になる。ここでは、便宜上、前者を正の基本成分、後者を負の基本成分と呼ぶ。
- ④ 任意の直交電磁界は2つの基本成分(=正負の基本成分)に分解される。この電磁界でのエネルギーの動きは、反対方向に動く二つの成分の合成である。

図3は直交静電磁界を正負の二つの基本成分(添字1,2を付している)に分けたものである。二つの基本成分が生まれる環境の例として xz 面下部に電荷面密度 σ_1, σ_2 [C/m²]の無限大シートを置き、それぞれが x 軸の正負方向に光速で動いている様子を示している。二つの成分への分解には、電荷シートの移動の話を加えるのは余計なものであるが、エネルギーが光速で動くと言う理解には役立つのではと思つてのことである。

二つの基本成分 E_1, H_1 と E_2, H_2 は

$$E = E_1 + E_2, \quad H = H_1 + H_2, \quad E_1 / H_1 = -E_2 / H_2 = Z_0 \quad (13a,b,c)$$

より、次式のように定まる。

$$E_1 = \frac{1}{2}(E + Z_0 H), \quad H_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{E}{Z_0} + H\right) \quad (14a, b)$$

$$E_2 = \frac{1}{2}(E - Z_0 H), \quad H_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{E}{Z_0} - H\right) \quad (14c, d)$$

これより、両成分のエネルギーを求めて足し合わせると次式となって不合理は無い。

$$\begin{aligned} u_{EM,1} + u_{EM,2} &= \frac{\epsilon_0}{4} \left\{ (E + Z_0 H)^2 + (E - Z_0 H)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = u_{EM} \end{aligned} \quad (15)$$

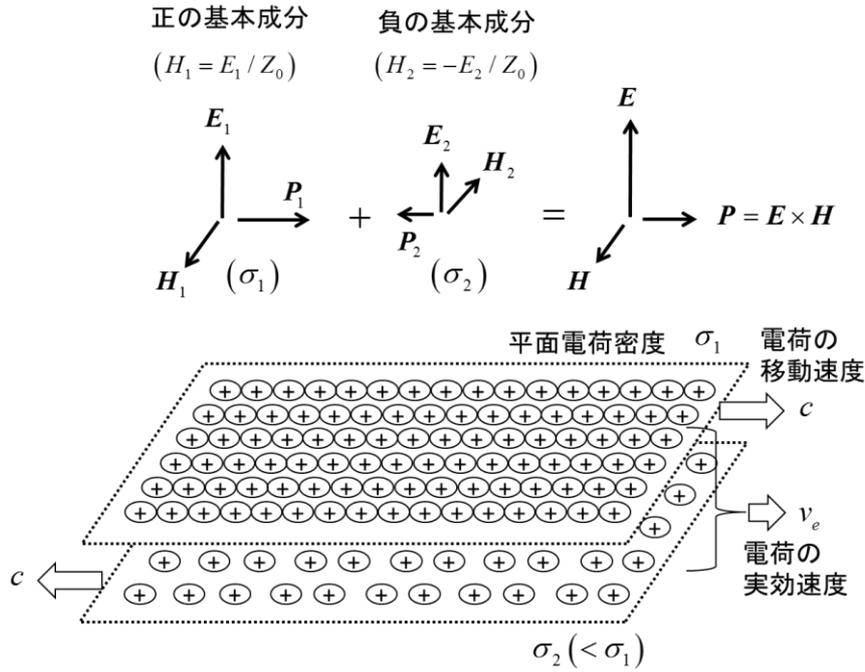


図3 直交静電磁界の二つの基本成分への分解

同様に、単位面積を通過する電力（単位時間当たりのエネルギー）も2成分合わせて

$$\begin{aligned}
 P_{EM,1} + P_{EM,2} &= (u_{EM,1} - u_{EM,2})c \\
 &= \frac{\epsilon_0}{4} \left\{ (E + Z_0 H)^2 - (E - Z_0 H)^2 \right\} c \\
 &= \epsilon_0 Z_0 E H c = E H = P_{EM}
 \end{aligned} \tag{16}$$

となり、これも辻褄が合う。ゆえに、合成速度も

$$\begin{aligned}
 \frac{u_{EM,1} - u_{EM,2}}{u_{EM,1} + u_{EM,2}} c &= \frac{2EH}{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2} \\
 &= \frac{2}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c = v_{EM}
 \end{aligned} \tag{17}$$

となり、(9)式の意味が説明できる。参考までに、電荷シートの実効速度は

$$v_e = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} c = \frac{H/c}{\epsilon_0 E} = \frac{Z_0}{Z} c \tag{18}$$

となる。

図3では、電荷密度 σ_2 を正の値で描いているので、この仕組みで実現できる環境は $Z \geq Z_0$ である。 $Z < Z_0$ については、電荷シートの動く方向を維持したまま σ_2 を負の値（ただし、 $|\sigma_2| < \sigma_1$ ）にすればよい。このようにしても、式(15)~(17)の最終辺に変わりが無く、上記の考え方は、 Z の値の全範囲で成立する。一方、式(18)のみ、 $v_e = (Z/Z_0)c$ に変わる。

以上により、電界と磁界が直交する場合、本節の最初に挙げた仮説③、④に不合理なことは見つからず、受け入れを拒む理由はない。

3.2 電界と磁界が非直交の場合

次に、電界と磁界が直交しない場合を見てみよう。その電磁界を以下のように表そう。

$$\mathbf{E} = E\mathbf{j}, \quad \mathbf{H} = H \sin \theta \mathbf{k} + H \cos \theta \mathbf{j}, \quad Z \equiv E / H \quad (19)$$

非直交の場合、正負の基本成分では表せない成分が必ず残り、上記の例では、直交成分から差し引いた $H \cos \theta \mathbf{j}$ がそれである。ここで、エネルギーの移動に関して、前節③、④の仮定に加えて、以下の仮定を加える。

⑤ 電界のみ、または磁界のみの環境ではエネルギーは静止している。

この環境でのエネルギー密度 $u_{EM,total}$ を、直交成分を $u_{EM,1}$ 、 $u_{EM,2}$ に分け、残りの成分を $u_{EM,0}$ とすると

$$u_{EM,total} = u_{EM,1} + u_{EM,2} + u_{EM,0} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \quad (20)$$

である。エネルギーの移動速度 v_{EM} は③~⑤の仮定より、次式で算定できる。

$$\begin{aligned} v_{EM} &= \frac{u_{EM,1} - u_{EM,2}}{u_{EM,total}} c \\ &= \frac{\frac{1}{4} \epsilon_0 \left\{ (E + Z_0 H \sin \theta)^2 - (E - Z_0 H \sin \theta)^2 \right\}}{\frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)} c \\ &= \frac{2Z_0 E H \sin \theta}{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2} c \\ &= \frac{2 \sin \theta}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c \end{aligned} \quad (21)$$

これにより、(12)式が③~⑤の仕組みで得られていたことが分かる。また、単位面積を通過する電力 P_{EM} は次式となり、(11)式を説明づけることができる。

$$\begin{aligned}
 P_{EM} &= u_{EM, total} v_{EM} = \left(\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2 \right) \frac{\sin \theta}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c \\
 &= EH \sin \theta = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| \tag{22}
 \end{aligned}$$

なお、非直交の電磁界を直交成分と残りの1成分に分ける方法は、上述のように電界の方向を基準として分ける仕方とは別に、磁界を基準にする方法もある。どちらの方法をとっても、式(21), (22)の結果に変わりがないことが確認できる。

4. 交流信号の分布定数回路伝送

ここまでは、静電磁界におけるポインティングベクトルの性質を調べてきた。ここでは、交流伝送線路（分布定数回路）でのエネルギー移動の性質を調べ、上記で述べた直流伝送路の性質との関係のみてみたい。

図2と同じ構造の伝送線路での交流信号伝送を図4を用いて説明する。（伝送路の形は何でもよいのであるが、簡易な式で説明がしやすいと言うだけの理由である）。ここ伝送路の単位長さ当たりの自己インダクタンス L 、静電容量 C 、および特性インピーダンス R_0 は(5)式で与えている。この伝送路では、交流信号に対して x の正方向へ進む進行波と負の方向に進む後進波（反射波）があり、それぞれの電圧と電流を、 V_1, I_1 および V_2, I_2 、その合成したものを V, I とする。 x 軸の基準点 $x=0$ を、伝送線路の終端（=実抵抗負荷 R がある場所）に置く。この回路の位置 x における電流と電圧を、時間変動 $e^{j\omega t}$ を除いた部分について表すと、

$$V_1(x) = V_{10} e^{-j\beta x}, \quad I_1(x) = \frac{V_1(x)}{R_0} = \frac{V_{10}}{R_0} e^{-j\beta x} \tag{23a,b}$$

$$V_2(x) = V_{20} e^{j\beta x}, \quad I_2(x) = \frac{V_2(x)}{R_0} = \frac{V_{20}}{R_0} e^{j\beta x} \tag{24a,b}$$

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) = V_{10} e^{-j\beta x} + V_{20} e^{j\beta x} \tag{25a}$$

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) = \frac{1}{R_0} \left(V_{10} e^{-j\beta x} - V_{20} e^{j\beta x} \right) \tag{25b}$$

$$\left(\beta = \omega \sqrt{LC} = \frac{\omega}{c}, V_{10} \equiv V_1(0), V_{20} \equiv V_2(0) \right)$$

上記 β より、この線路では、電圧と電流は x 軸の正と負の方向に光速で進む。線路の終端 $x=0$ での反射係数 Γ_0 は整合負荷 R を用いて次式になる。

$$\Gamma_0 \equiv \frac{V_{20}}{V_{10}} = \frac{R - R_0}{R + R_0} \tag{26}$$

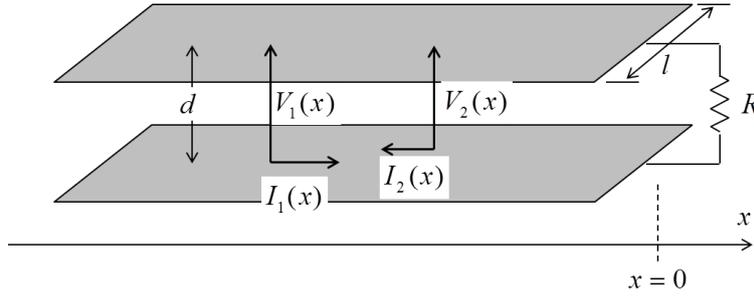


図4 交流信号の分布定数回路での伝送 (V_1, I_1 : 進行波成分、 V_2, I_2 : 後進波成分)

この伝送路では、進行波成分(V_1, I_1)がエネルギーを x 軸の正方向に光速で運び、後進波成分(V_2, I_2)が負方向に光速で運ぶ。その大きさの比率は $1:\Gamma_0^2$ であるので、両方向を合わせたエネルギーの実効移動速度 v_{ave} は

$$v_{ave} = \frac{1 - \Gamma_0^2}{1 + \Gamma_0^2} c = \frac{2}{\frac{R}{R_0} + \frac{R_0}{R}} c \quad (27)$$

となる。一方、平板間にできる電界 E_y と磁界 H_z は

$$E_y(x) = \frac{V(x)}{d} = \frac{1}{d} (V_{10} e^{-j\beta x} + V_{20} e^{j\beta x}) \equiv E_{y,1}(x) + E_{y,2}(x) \quad (28a)$$

$$H_z(x) = \frac{I(x)}{l} = \frac{1}{lR_0} (V_{10} e^{-j\beta x} - V_{20} e^{j\beta x}) \equiv H_{z,1}(x) + H_{z,2}(x) \quad (28b)$$

であり、進行波と後進波の特性インピーダンスは

$$Z_1(x) \left(\equiv \frac{E_{y,1}(x)}{H_{z,1}(x)} \right) = -Z_2(x) \left(\equiv \frac{E_{y,2}(x)}{H_{z,2}(x)} \right) = \frac{lR_0}{d} = Z_0 \quad (29)$$

である。前節で述べた静電磁界については、仮説③、④のもとで、正負二つの基本成分に分解したが、交流信号に対する分布定数線路では、同じ分解が進行波と後進波（反射波）と言う陽に見える形で行われていることが分かる。

なお、電界 E_y と磁界 H_z の比で表すインピーダンス Z は位置 x の関数となり次式になる。

$$Z(x) = \frac{E_y(x)}{H_z(x)} = \frac{lR_0}{d} \frac{V_{10} e^{-j\beta x} + V_{20} e^{j\beta x}}{V_{10} e^{-j\beta x} - V_{20} e^{j\beta x}} = \frac{1 + \Gamma_0 e^{j2\beta x}}{1 - \Gamma_0 e^{j2\beta x}} Z_0 \quad (30)$$

このインピーダンス Z から式(9)によってエネルギーの移動速度を求めると、位置によって異なることになる。これは、図4の伝送路は反射波がある定在波環境になっていて、電界と磁界の節の位置が異なっているためである。ゆえに、速度として意味があるのはその平均値であり、それは、式(27)ですでに求めている。直流の電力伝送線路では $Z \rightarrow Z(0)$ とするときの特性が得られ

ており、それによって求められるエネルギー移動速度は、 $R/R_0=Z(0)/Z_0$ なので、(10)式と一致する。

このように、交流回路（電波で言えば電磁波）のエネルギー流動の動作は、微小時空間領域を構成する直流回路（静電磁界）の動作が、時空間全体（4次元空間）にわたって敷き詰められていると解釈できる。

5. 導波管内の電磁界におけるエネルギー伝送

導波管伝送におけるエネルギーの伝送速度について、3節で述べた論理の電磁波環境への適用性を調べる。ここでの目的は、前述の考え方から、エネルギーの伝送速度が群速度になることを示すことにある。

導波管伝送では、基本的には、管内を壁面で反射しながら斜めに伝搬する平面波が導波管壁での境界条件を満たすような角度をもつ伝送モードを作っている。本節では、図5に示す矩形導波管の中で最も基本である TE_{10} モードに着目する（他のモードも式が複雑になるだけで適用性確認の目的では共通である）。 TE_{10} モードの遮断波長は $\lambda_c=2a$ であり、これより高い周波数において、電磁界と群速度 v_g は以下の式で表される。

$$E_y(z, x) = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} z\right) e^{-jk_x x} \quad (31a)$$

$$H_z(z, x) = \frac{E_0 k_x}{Z_0 k} \sin\left(\frac{\pi}{a} z\right) e^{-jk_x x} \quad (31b)$$

$$H_x(z, x) = -j \frac{\pi E_0}{Z_0 k a} \cos\left(\frac{\pi}{a} z\right) e^{-jk_x x} \quad (31c)$$

$$\frac{k_x}{k} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

$$Z \equiv \frac{E_y}{H_z} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (H_x \text{を除いている定義であることに注意}) \quad (31d)$$

$$v_g = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} c \quad (31e)$$

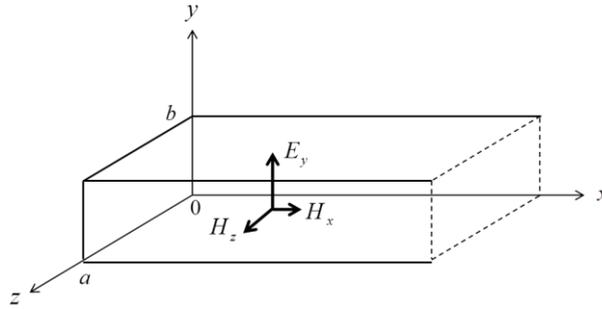


図5 矩形導波管 TE₁₀モードの伝送

電磁界三成分の平均エネルギーの比率は次式である。

$$\varepsilon_0 \langle |E_y|^2 \rangle : \mu_0 \langle |H_z|^2 \rangle : \mu_0 \langle |H_x|^2 \rangle = 1 : 1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 : \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 \quad (32)$$

ここからが本題である。導波管内の電磁界を微視的に見てみよう。 E_y と H_z の比は一定なので、この二つの成分で作る電磁界のエネルギーの伝送方向はポインティングベクトルが示す x 軸正方向であり、導波管内の場所によって電界と磁界の大きさは違うものの、その速度は一定で、(9)式より次式である。

$$v_{E_y+H_z} = \frac{2}{\frac{Z}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z}} c = \frac{2\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}{2 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} c \quad (33)$$

これに H_x が加わることにより、エネルギーの瞬時的な意味での動く方向は z 軸成分が加わって微妙に揺れるが、 x 軸方向の速度には影響がない。ゆえに、 x 軸方向への速度は3成分のエネルギー比による加重平均をとると

$$v_{EM} = \frac{\varepsilon_0 \langle |E_y|^2 \rangle + \mu_0 \langle |H_z|^2 \rangle}{\varepsilon_0 \langle |E_y|^2 \rangle + \mu_0 \langle |H_z|^2 \rangle + \mu_0 \langle |H_x|^2 \rangle} v_{E_y+H_z} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} c = v_g \quad (34)$$

となり、群速度と一致する。

6. エネルギーフローの描像：まとめ

静電磁界のエネルギーの動きに関して、③～⑤の三つの仮説を立て、それに基づく推論を行った。その結果、考えられる動作に対して辻褃の合う説明ができ、この仮説は正しいものと確信している。静電磁界が持つ性質は以下のようにまとめられる。

- 1) $E \times H = 0$ の電磁界（電界のみ、磁界のみ、あるいは、両成分の向きが同じ）ではエネルギーは静止している
- 2) 電界と磁界が直交し、その大きさの比率の絶対値 $|Z|$ が Z_0 であるものを基本成分とする。基本成分は2種類あり、 $Z=Z_0$ （正の基本成分）では、エネルギーは $E \times H$ 方向に光速で動く。もう一つの基本成分は $Z=-Z_0$ （負の基本成分）で、反対方向に光速で動く。
- 3) 電界と磁界が直交する電磁界は2つの基本成分（=正負の基本成分）に分解される。この電磁界でのエネルギーの動きは、逆方向に光速で動く二つの成分の合成である。
- 4) 非直交電磁界は、正負の基本成分よりなる直交電磁界と、電界または磁界どちらか1成分のみの、計3成分よりなり、エネルギーの移動（方向と速度）は、それぞれの成分の移動の合成である。

さらに、3次元空間 r と時間 t の4次元空間に横たわる動電磁界: $E(r,t), H(r,t)$ については、以下のようにまとめられる。

- 5) 電磁界 $E(r,t), H(r,t)$ は、マクスウェルの方程式によって定められる。
- 6) その動的性質（エネルギー流動や運動量）は、4次元空間の固定点 (r_0, t_0) の微小領域を静電磁界とみなすとき、その微小領域の性質に内包されている。（静かなところにもエネルギーの風が吹いている）。
- 7) 動電磁界は、静電磁界の性質をもつ微小領域が4次元空間全体に亘って敷き詰められたものである。

図6は、静電磁界においてエネルギーの流れを生み出す仕組みをまとめている。また、図7は電磁界全体の描像である。

【謝辞】 本内容について有益な議論をしていただいた電気通信大学安藤芳晃博士に感謝する。

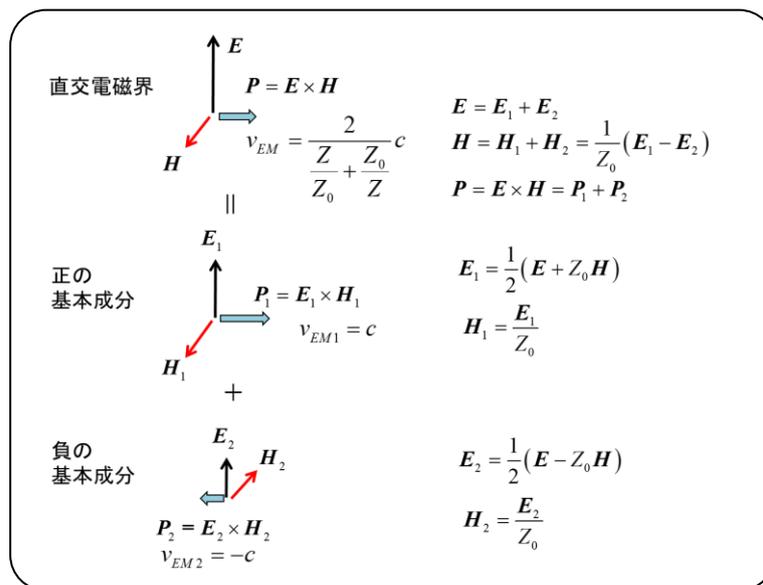


図6 直交静電磁界がある環境でのポインティングベクトルとエネルギー流動の描像

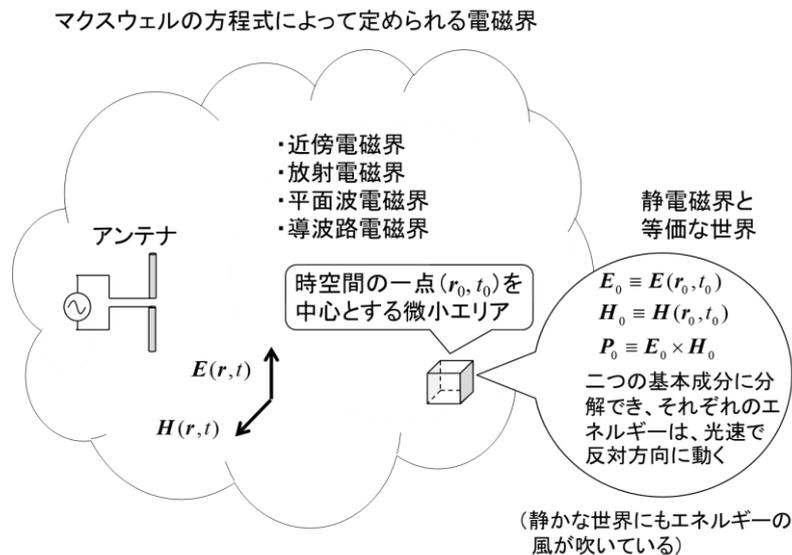


図7 電磁界全体の描像

参考文献

[1] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ (1 3) : 電磁気学のパラドックス「静電磁界において $E \times H$ は電力の流れを生むか？」を考える,” 技術レポート YK-051_rev_2, 2022.06.
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/YK_051_Poynting_Vector.pdf
 (本内容は、唐沢好男, “静電磁界中のポインティングベクトルについて,” 信学技報 AP2022-50, pp. 119-124, 2022.07.)

[2] 本レポートの内容は、唐沢好男, “静電磁界中のポインティングベクトルについて [II],” 信学会 AP 研, 2022.10.

読者の皆様

前稿 (YK-051) と本稿の内容はまとめて私製本「[謎解き電磁気学](#)」の[第10章](#)で解説しています。